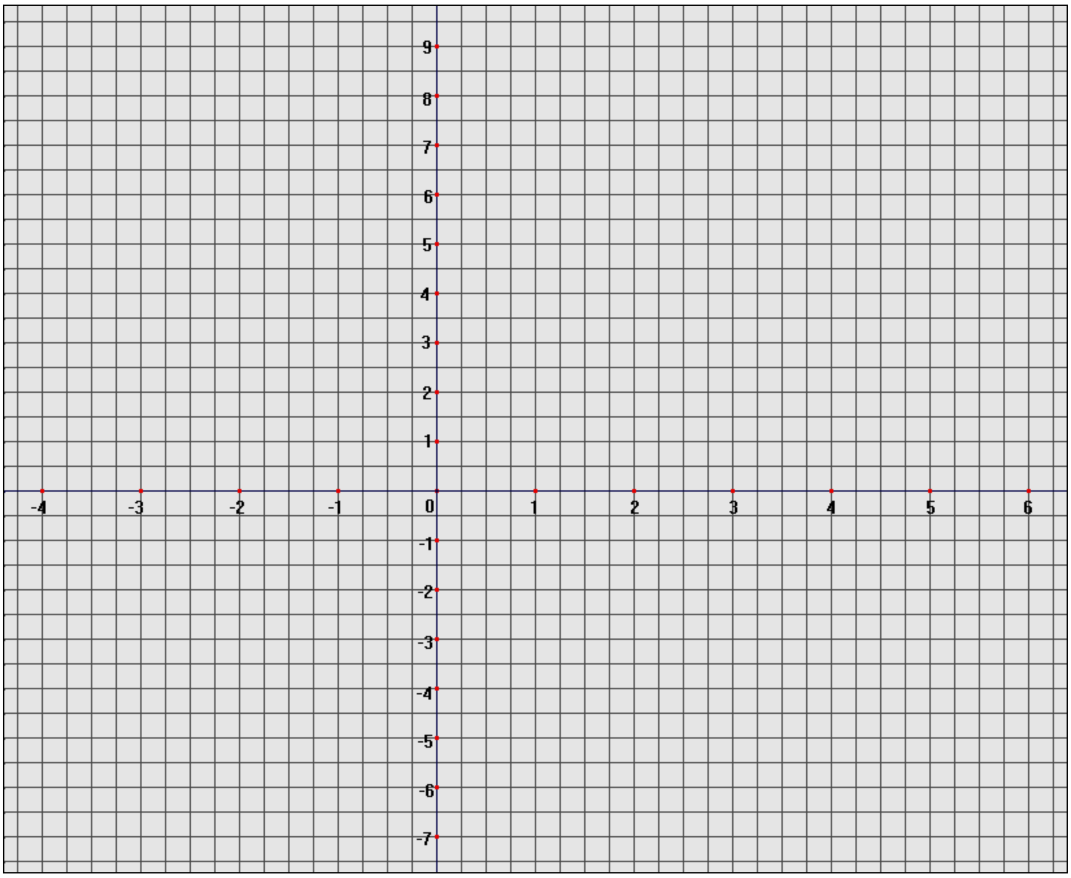


On considère le fonction f définie sur l'intervalle $[-2;4]$ par $f(x)=(x-1)^2-4$.

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f dans le repère ci-dessus.

<u>Autres formes de l'expression algébrique</u>

2. Montrer que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x)=x^2-2x-3$.
   Cette forme est la <u>forme développée</u> de l'expression.

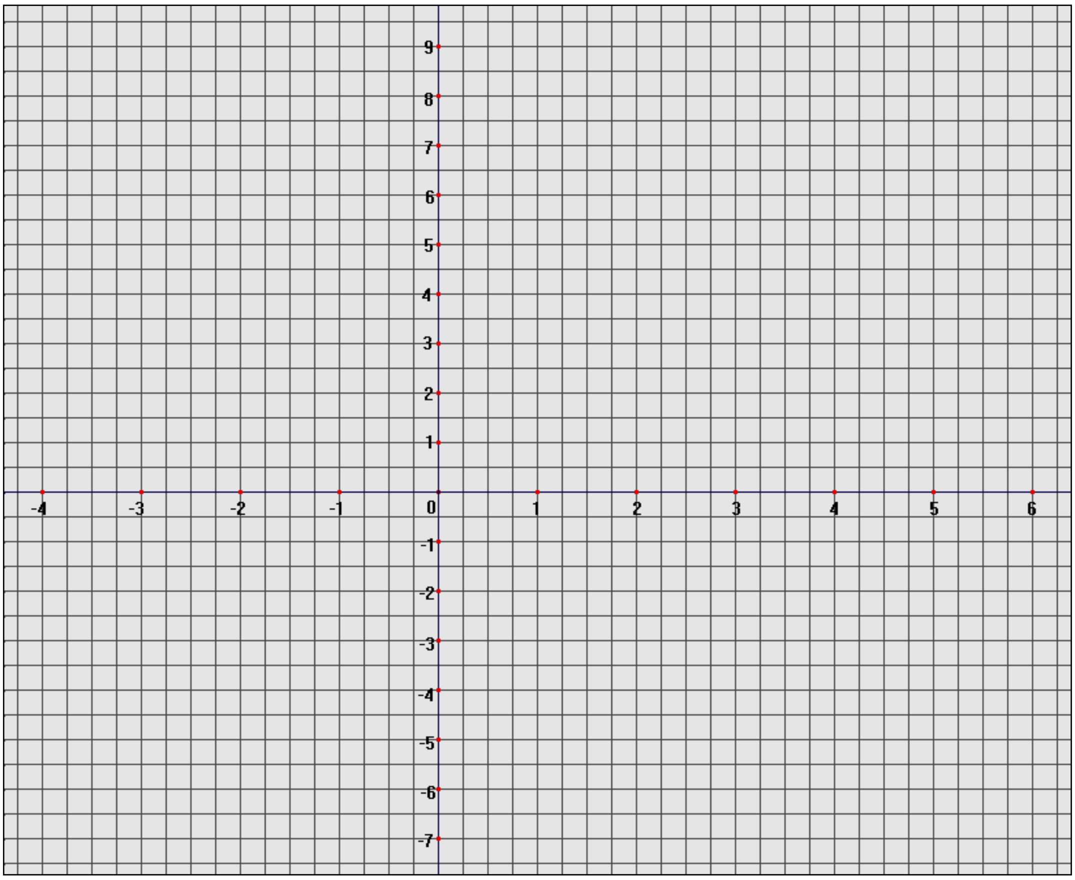
3. Montrer que la fonction f peut aussi s'écrire sous la forme $f(x)=(x+1)(x-3)$.
   Cette forme est la <u>forme factorisée</u> de l'expression.

<u>Utilisation réfléchie de l'une ou l'autre des expressions</u>

4. Répondre aux questions ci-dessous en utilisant l'expression la mieux adaptée.

   - Calculer $f(-1)$.
   - Calculer $f(3)$.
   - Résoudre $f(x)=0$.
   - Résoudre $f(x)=-4$.
   - Calculer $f(1)$.
   - Calculer $f(0)$.
   - Résoudre $f(x)=-3$.
   - Résoudre $f(x)=5$.

5. Quelles informations graphiques contiennent chacune des trois expressions de f ?



On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-3;5]$ par $f(x) = -(x-1)^2 + 9$.

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f dans le repère ci-dessus.

<u>Autres formes de l'expression algébrique</u>

2. Montrer que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x) = -x^2 + 2x + 8$.
   Cette forme est la <u>forme développée</u> de l'expression.

3. Montrer que la fonction f peut aussi s'écrire sous la forme $f(x) = (x+2)(4-x)$.
   Cette forme est la <u>forme factorisée</u> de l'expression.

<u>Utilisation réfléchie de l'une ou l'autre des expressions de la fonction f</u>

4. Répondre aux questions ci-dessous en utilisant l'expression la mieux adaptée.

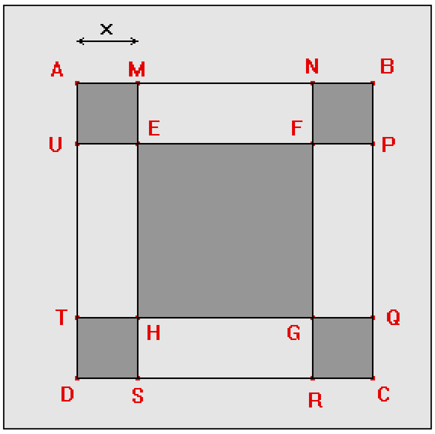
   - Calculer $f(4)$.
   - Calculer l'image de 1.
   - Résoudre $f(x) = 0$.
   - Résoudre $f(x) = 9$.
   - Calculer $f(-2)$.
   - Calculer l'image de 0.
   - Résoudre $f(x) = 8$.
   - Résoudre $f(x) = 5$.

5. Quelles informations graphiques contiennent chacune des trois expressions de f ?

Vocabulaire

Soit $f(x)=ax^2+bx+c$ un **trinôme du second degré** avec $a\neq 0$. On peut parfois écrire le trinôme sous la **forme canonique** suivante : $f(x)=a(x-u)^2+v$. Dans cette écriture les paramètres u et v représentent **les coordonnées du sommet** de la parabole.

Partie A

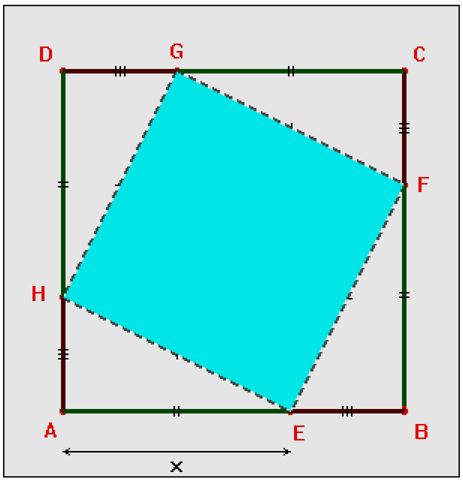


Le quadrilatère ABCD est un carré de 4 cm de coté. Les points M, N, P, Q, R, S, T et U sont tels que AM=NB=BP=QC=CR=SD=DT=UA.

Ces longueurs sont égales et valent x avec $0\leq x\leq 2$. Le but est de déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire colorée est minimale.

1. Déterminer à quel intervalle appartient le nombre réel x.
2. Montrer que la fonction définie par $f(x)=8x^2-16x+16$ représente l'aire de la partie colorée en fonction de x.
3. Déterminer la forme canonique de f et en déduire la valeur de x pour laquelle l'aire colorée est minimale.
4. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire colorée est égale à 10.

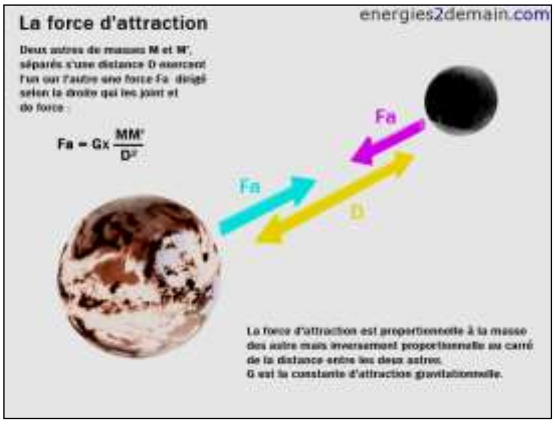
Partie B



$ABCD$ est un carré de 6 cm de coté. Le point E appartient au segment $[AB]$. On note x la longueur AE. Le but est de déterminer la position des points E, F, G et H pour laquelle l'aire du carré $EFGH$ est minimale.

1. Déterminer à quel intervalle appartient x.
2. Montrer que la fonction définie par $f(x)=2x^2-12x+36$ représente l'aire colorée en fonction de x.
3. Déterminer la forme canonique de f et en déduire la valeur de x pour laquelle l'aire colorée est minimale.
4. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire colorée est égale à 26. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire colorée est égale à 20.

Lorsqu'une fusée de masse M (ou tout autre corps de l'espace) est situé sur la droite Terre/Lune, il subit :



- Une attraction de la part de la Terre proportionnelle au produit des deux masses (celle de la Terre et celle de la fusée) et inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare la Terre de la fusée,
- Une attraction de la part de la Lune proportionnelle au produit des deux masses (celle de la Lune et celle de la fusée) et inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare la Lune de la fusée.

Dans ce problème, on appelle x la distance qui sépare la fusée de la Terre, M la masse de la fusée, M_T la masse de la Terre, M_L la masse de la Lune, G le coefficient de proportionnalité appelé la constante d'attraction gravitationnelle.

Dans ce problème, on considère que : la distance Terre/Lune est égale à 400 milliers de kilomètres et que la masse de la Terre est 81 fois supérieure à la masse de la Lune. Le millier de kilomètre sera l'unité de mesure.

Le but du problème est de déterminer les endroits de la droite Terre/Lune où l'attraction exercée par la terre et l'attraction exercée par la lune sur la fusée M sont identiques.

Etude des paramètres du problème

Exprimer, en fonction de x, la distance qui sépare la fusée de la lune. Exprimer, en fonction de x, l'attraction F_T de la terre sur la fusée. Exprimer, en fonction de x, l'attraction F_L de la lune sur la fusée.

Résolution de l'équation du problème

Modéliser le problème par une équation (E) faisant intervenir les lettres G, M, M_T, M_L et x. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $x^2-810x+162000=0$. Déterminer la forme canonique du trinôme $x^2-810x+162000$. En déduire les solutions de l'équation (E).

Réponse au problème posé

Répondre précisément au problème posé. On pourra éventuellement faire un schéma.

Attention ! Démonstrations…

Une équation du second degré est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont trois réels quelconques tels que $a \neq 0$. Nous appelons $\Delta = b^2-4ac$ le **discriminant** du trinôme. Nous appelons **racines** du trinôme les solutions de $ax^2+bx+c=0$.

1. Démontrer l'équivalence suivante : $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$.

2. Lorsque le discriminant est positif, déterminer la forme des deux racines d'un trinôme.

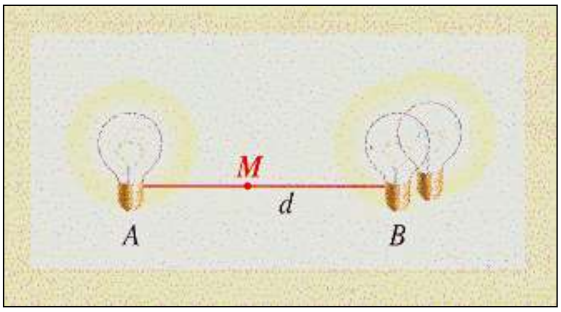
3. Démontrer que la somme des racines d'un trinôme est égale à $-\frac{b}{a}$. Démontrer que le produit des racines d'un trinôme est égal à $\frac{c}{a}$.

Attention ! Programmation…

Ecrire un algorithme (en langage libre puis en langage python) permettant de déterminer si une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ pour laquelle a, b et c sont trois réels donnés (tels que $a \neq 0$) admet ou non des solutions réelles et le cas échéant permet d'afficher les solutions.

Le problème suivant fut proposé par le mathématicien Alexis Clairaut (Paris, 1713 – Paris, 1765).

« Deux lumières, dont l'une est quatre fois plus intense que l'autre, étant séparées par un intervalle de trois pieds, comment déterminer sur la droite qui les joint le/les point(s) qu'elles éclairent également ? »



Appelons M le point cherché, et rappelons une loi physique sur la luminosité en un point éclairé par une source : **« La luminosité est proportionnelle à l'intensité de la source et inversement proportionnelle au carré de la distance à la source »**.

Appelons k le coefficient de proportionnalité évoqué dans la loi physique. Appelons i l'intensité de la lumière la plus faible. Appelons x la distance de la lumière la plus faible au point M.

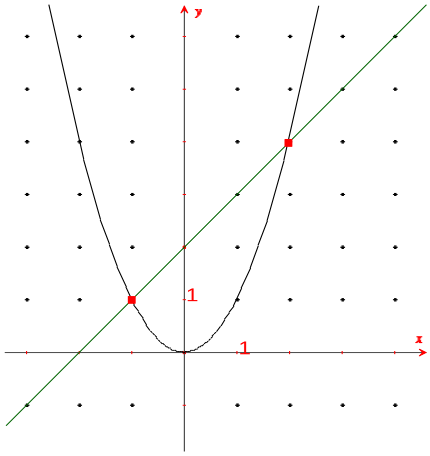
1. Exprimer en fonction de k, i et x la luminosité en M venant de la source la plus faible. Exprimer en fonction de k, i et x la luminosité en M venant de la source la plus forte.

2. Modéliser le problème par une équation (E) faisant intervenir les lettres k, i et x.

3. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $x^2+2x-3=0$. Résoudre l'équation (E) et répondre de manière précise au problème posé par Alexis Clairaut.

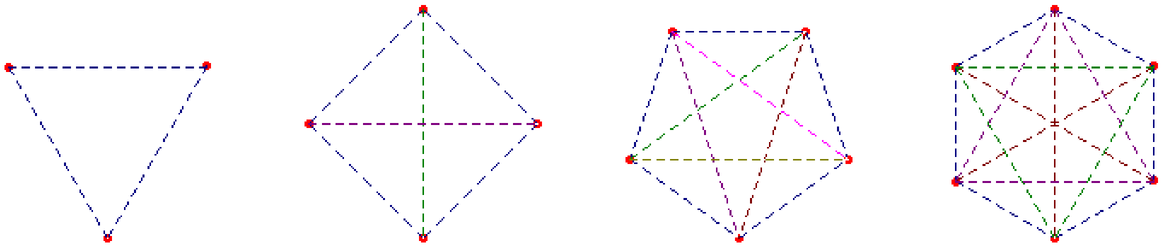
Problème 1

Comme l'indique la figure ci-contre, on a tracé dans un repère orthonormal la parabole (P) d'équation $y = x^2$ et la droite (d) d'équation $y = x + 2$. Démontrer que la droite (d) coupe la parabole (P) en deux points distincts dont on déterminera les coordonnées.



Problème 2

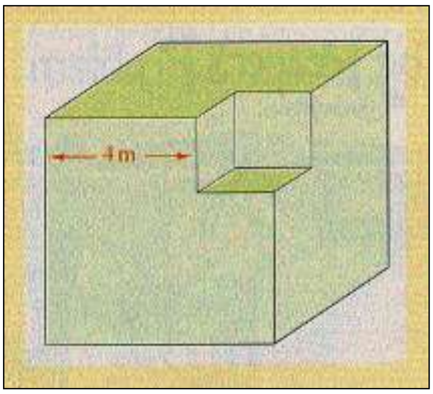
Les participants à une conférence ont échangé des poignées de mains, et l'un d'eux a compté qu'il y avait eu en tout 66 poignées de mains. Combien de personnes ont assisté à la conférence ?



Problème 3

Un grand cube a été évidé d'un petit cube pour obtenir le solide dessiné ci-contre de volume 208 m^3.

Le but du problème est de déterminer l'arête du grand cube.

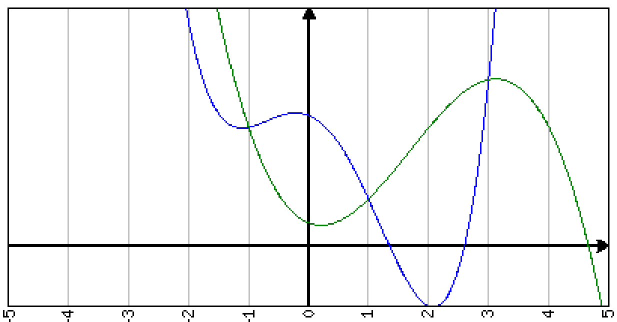


1. Démontrer pour tout a et b l'égalité suivante : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)$.
2. Procéder au choix de l'inconnue du problème. Modéliser la situation par une équation de degré 3.Par un travail algébrique ramener l'équation du degré 3 à une équation équivalente du degré 2. Résoudre l'équation et répondre au problème.

Problème 4

- $f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x + 11$
- $g(x) = -x^3 + 5x^2 - 2x + 2$

Démontrer que les courbes représentatives de ces deux polynômes se coupent en quatre points distincts.



Exercice 1

On propose ci-dessous les expressions algébriques de quatre fonctions du second degré.

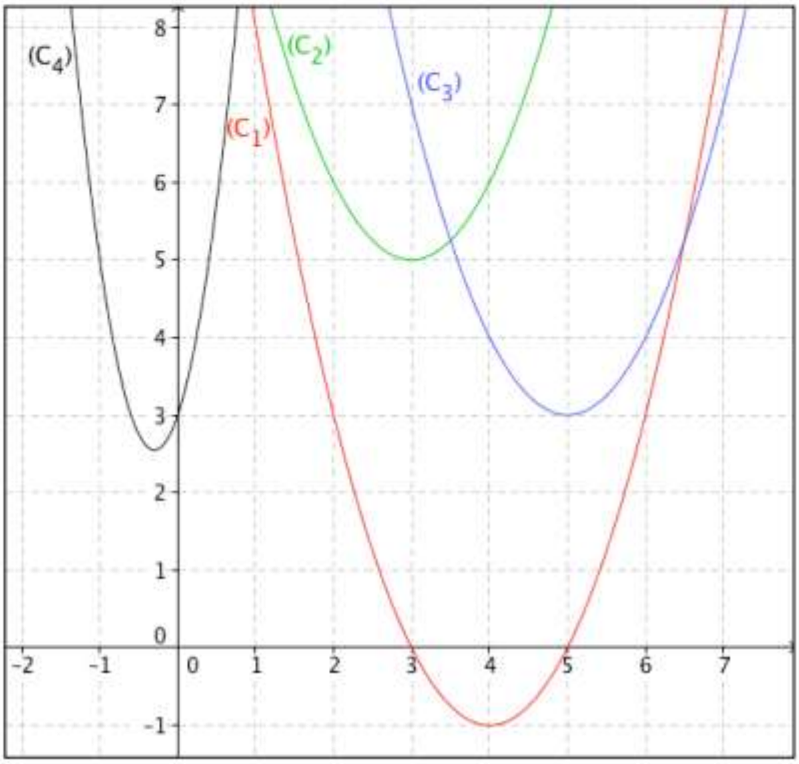
Associer à chaque fonction la courbe représentative qui lui correspond.

$f_1(x)=(x-3)^2+5$

$f_2(x)=(x-5)^2+3$

$f_3(x)=5x^2+3x+3$

$f_4(x)=(x-3)(x-5)$



Exercice 2

On propose ci-dessous les expressions algébriques incomplètes de quatre fonctions du second degré.

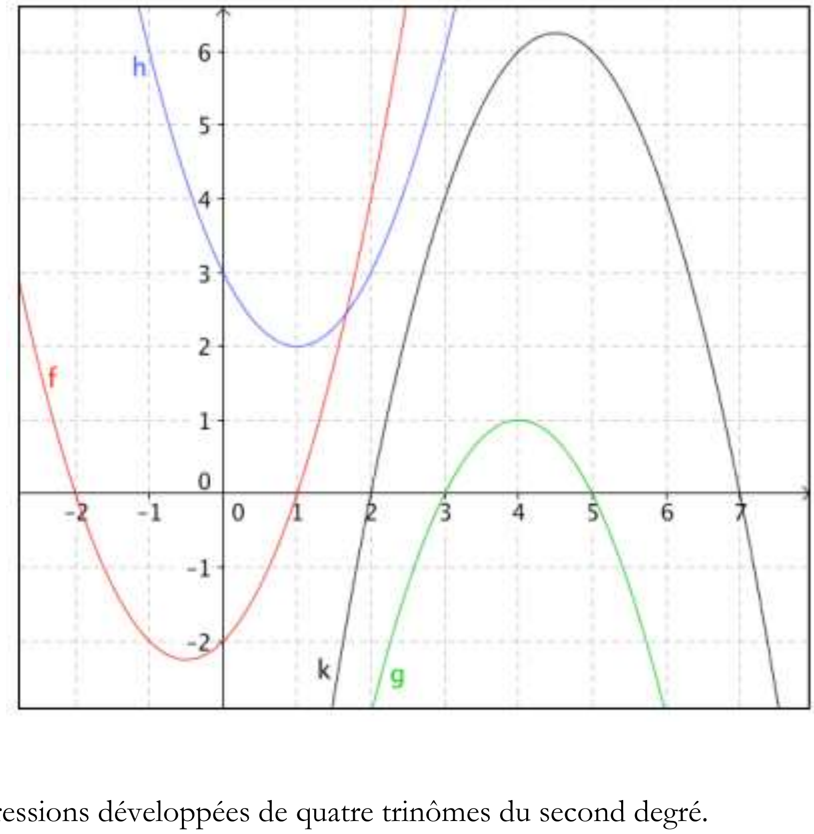
Déterminer ensuite les nombres manquants pour que les représentations graphiques proposées ci-contre correspondent à ces quatre fonctions.

$f(x)=(x+...)(x-...)$

$g(x)=-(x-...)^2+...$

$h(x)=(x-...)^2+...$

$k(x)=-(x-...)(x-...)$



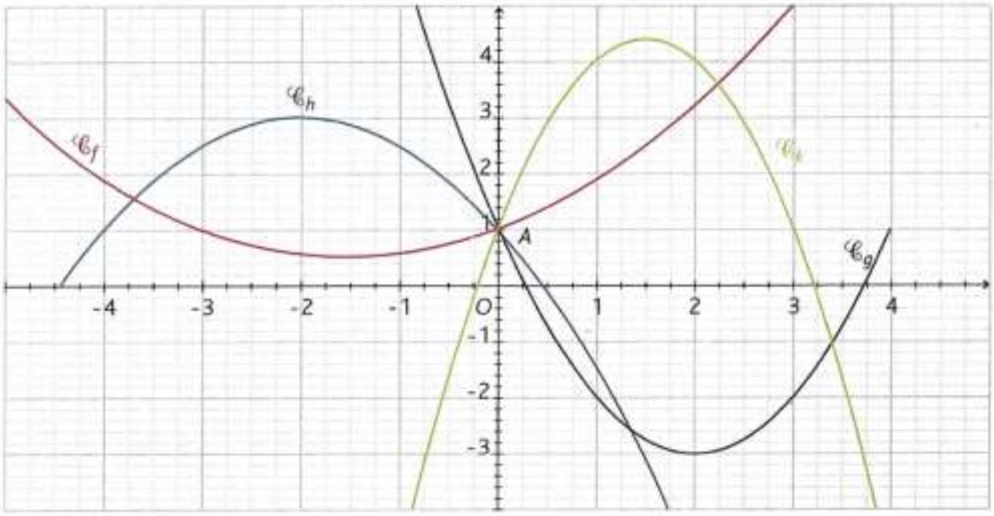
Exercice 3

On propose ci-dessous les expressions développées de quatre trinômes du second degré.

$$p_1(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+1 \qquad p_2(x)=\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{3}x+1$$

$$p_3(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x+1 \qquad p_4(x)=x^2-4x+1$$

On propose ci-dessous les courbes représentatives de quatre fonctions polynômes de degré 2.



Le but de l'exercice est d'associer à chaque trinôme sa représentation graphique.

1. Déterminer la forme canonique du trinôme p_4. Quelle courbe lui associez-vous ?

2. Calculer le discriminant du trinôme p_2. Quelle courbe lui associez-vous ?

3. Déterminer la forme canonique du trinôme p_1. Quelle courbe lui associez-vous ?

4. Quelle courbe reste-t-il à associer à p_3 ?

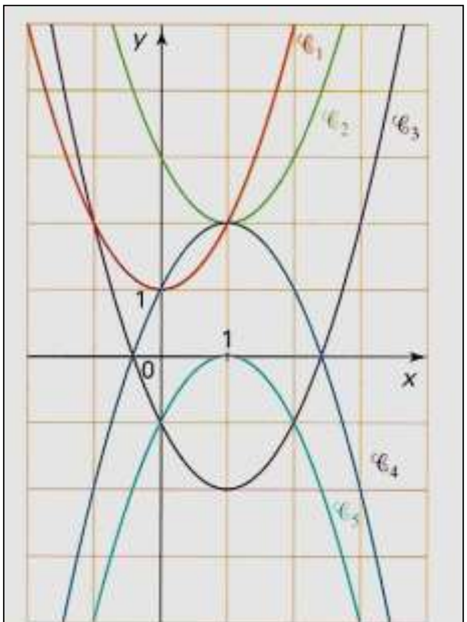
5. Pourquoi les quatre paraboles passent par A ?

Exercice 5

On a représenté ci-contre les courbes représentatives C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 des cinq fonctions suivantes.

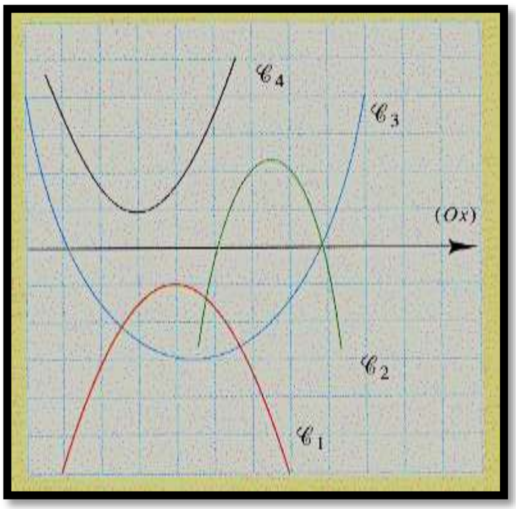
Associer par un raisonnement précis chaque fonction à la représentation graphique qui lui correspond.

- $f(x) = x^2 - 2x + 3$
- $g(x) = x^2 - 2x - 1$
- $h(x) = x^2 + 1$
- $k(x) = -x^2 + 2x - 1$
- $l(x) = -x^2 + 2x + 1$



Exercice 6

Effectuer le même travail pour les courbes représentatives C_1, C_2, C_3 et C_4 et les quatre fonctions suivantes :



- $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}$
- $g(x)=3x-2x^2$
- $h(x)=-x^2-x-\frac{3}{4}$
- $k(x)=x^2+2x+\frac{3}{2}$

Exercice 7

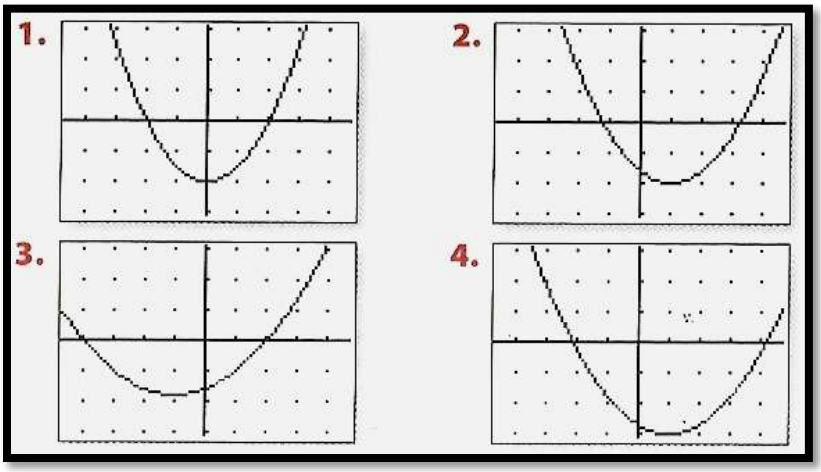
On propose ci-dessous quatre trinômes du second degré et quatre courbes représentatives. Le but est d'associer à chaque trinôme sa courbe représentative. Justifier de manière précise et concise.

$f(x)=0,4(x-1)^2-2$

$g(x)=0,2(x+4)(x-2)$

$h(x)=0,5x^2-2$

$k(x)=0,3(x-1)^2-3$



Exercice 8

On propose ci-dessous quatre trinômes du second degré et quatre courbes représentatives. Le but est d'associer à chaque trinôme sa courbe représentative. Justifier de manière précise et concise.

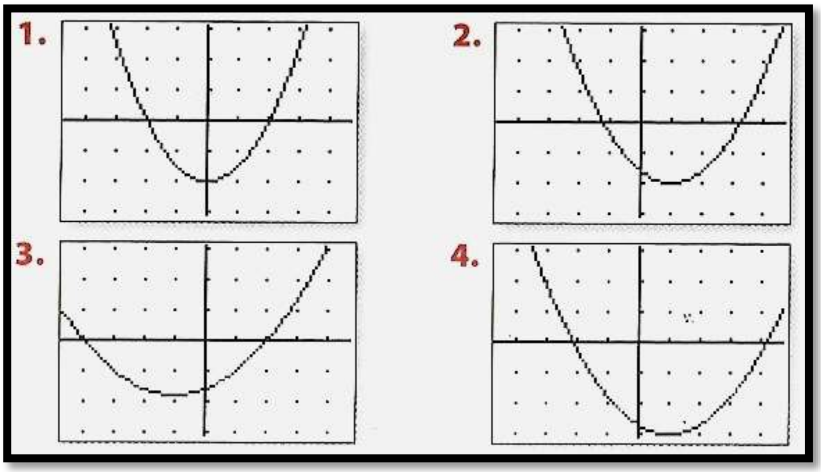
$f(x)=0,4(x-1)^2-2$

$g(x)=0,2(x+4)(x-2)$

$h(x)=0,5x^2-2$

$k(x)=0,3(x-1)^2-3$

Sauriez-vous écrire f et g sous forme développée ?

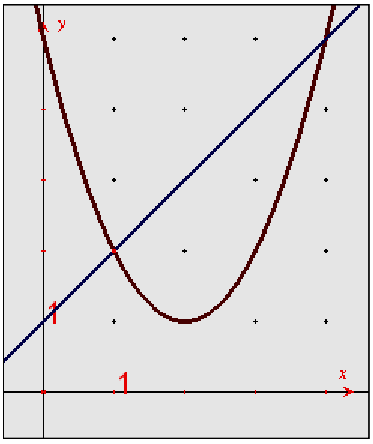


On considère une droite d'équation $y = mx + q$ une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ et on s'intéresse aux **intersections** de la droite avec la parabole. Le problème se traduit par :

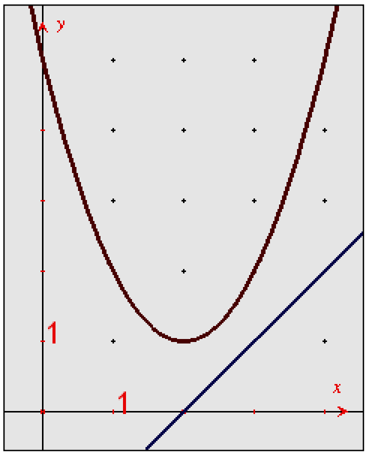
$$\boxed{\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}}$$

Analyse graphique

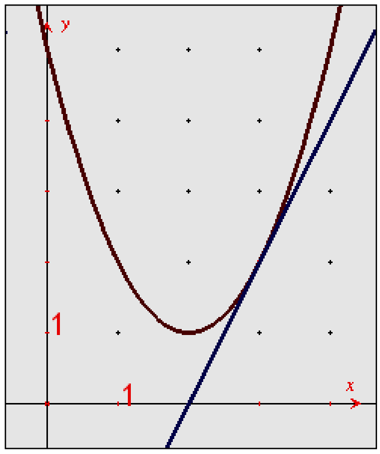
Graphiquement il est clair que **trois situations** sont possibles. Dans la première la droite coupe la parabole en **deux points distincts**, dans la deuxième la droite **ne coupe pas** la parabole, dans la troisième la droite coupe **une seule fois** la parabole, on dit qu'elle est **tangente** à la parabole.



Situation 1



Situation 2



Situation 3

Analyse algébrique

Dans chacun des cas suivants, déterminer combien de fois la droite proposée coupe la parabole (P), puis déterminer, si ils existent, les coordonnées des éventuels points d'intersection.

- la parabole (P) d'équation $y = x^2 - 4x + 5$ et la droite (D1) d'équation $y = x + 1$.
- la parabole (P) d'équation $y = x^2 - 4x + 5$ et la droite (D2) d'équation $y = x - 2$.
- la parabole (P) d'équation $y = x^2 - 4x + 5$ et la droite (D3) d'équation $y = 2x - 4$.

Conclusion

Ainsi le **discriminant** Δ est l'outil algébrique qui permet de compter le nombre de points d'intersections entre une parabole et une droite.

Exercices d'application directe

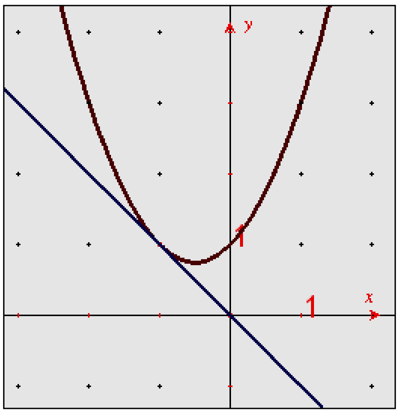
- Etudier la position relative de la parabole (P) d'équation $y = x^2 + x + 1$ et des trois droites (D1), (D2) et (D3) d'équations respectives $y = -x + 4$, $y = -3x - 3$ et $y = 0,5x + 0,5$.
- Etudier la position relative de la parabole (P) d'équation $y = -2x^2 + 3x + 2$ et des trois droites (D1), (D2) et (D3) d'équations respectives $y = x - 2$, $y = -x + 4$ et $y = 2x + 3$.

On considère une droite linéaire d'équation $y = mx$ une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ et on s'intéresse aux **conditions de tangence** de la droite avec la parabole. Le problème se traduit :

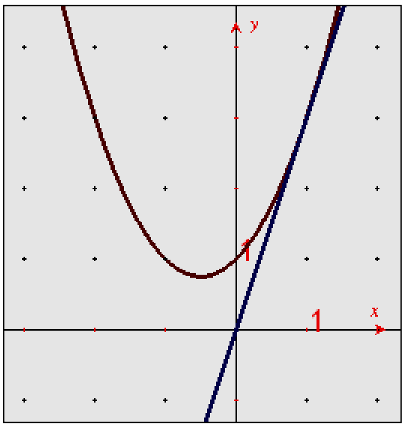
$$\boxed{\begin{cases} ax^2 + bx + c = mx \\ \Delta = (b-m)^2 - 4ac = 0 \end{cases}}$$

Analyse graphique

Graphiquement il est clair que **deux situations** sont possibles. Une première droite linéaire est tangente à la parabole en un point. Une deuxième droite linéaire est tangente à la parable en un autre point. Les valeurs du **paramètre** « m » déterminent **l'inclinaison** de la droite.



Situation 1



Situation 2

Analyse algébrique

On obtient les valeurs du paramètre « m » en calculant un **deuxième discriminant**. Il est nécessaire de comprendre qu'il s'agit d'un problème du second degré **dans** un problème du second degré

Exercices d'application directe

Dans chacun des cas suivants, déterminer les droites linéaires tangentes à la parabole proposée. Déterminer également dans chaque cas étudié les coordonnées des deux points de tangence*.

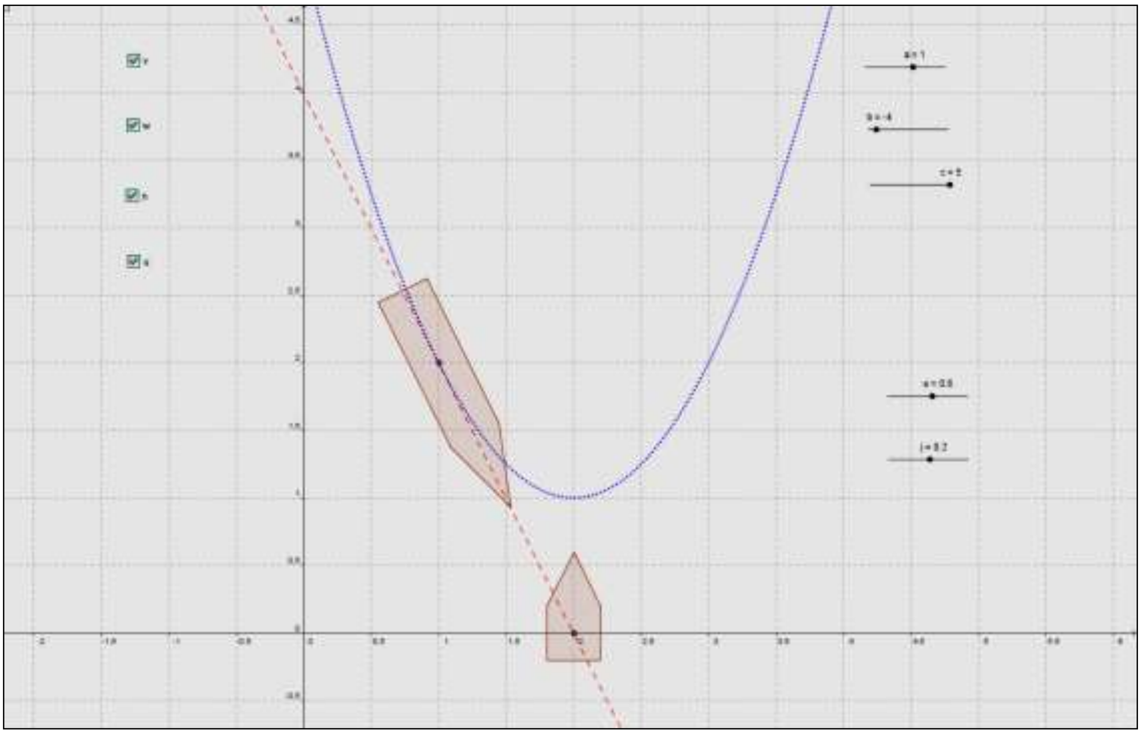
*Le point de tangence est l'endroit où la droite obtenue va « toucher », « frôler » la parabole.

- On considère la parabole (P) d'équation $y = x^2 + 2x + 4$.
- On considère la parabole (P) d'équation $y = x^2 - 2x + 1$
- On considère la parabole (P) d'équation $y = 0,5x^2 - x + 2$.
- On considère la parabole (P) d'équation $y = -x^2 + 1,5x - 1$.

Etude d'un cas particulier

- Effectuer le même travail que précédemment avec la parabole (P) d'équation $y = -x^2 + 2x + 3$.

Un avion suit une trajectoire parabolique. Il lance un projectile de manière **« tangente »** à sa trajectoire. Le but du problème est de déterminer **« où »** le tir doit être déclenché afin qu'une cible fixée soit atteinte.



Mise en équation du problème

On considère une droite d'équation $y = mx + q$, une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ et un point $A(x_A; y_A)$. Les **conditions de tangence** de la droite **passant par A** avec la parabole se traduisent par :

$$\boxed{\begin{cases} ax^2 + bx + c = mx + q \\ \Delta = (b-m)^2 - 4 \times a \times (c-q) = 0 \\ y_A = mx_A + q \Rightarrow q = y_A - mx_A \end{cases}}$$

Exercices d'application

- La trajectoire est la parabole d'équation $y = 2x^2 + 3x + 4$ et la cible se situe au point $A(2;0)$. Où est-ce que le tir doit être déclenché pour que la cible soit atteinte ?

- La trajectoire est la parabole d'équation $y = 2x^2 - 3x + 5$ et la cible se situe au point $A(4,5;0)$. Où est-ce que le tir doit être déclenché pour que la cible soit atteinte ?

- La trajectoire est la parabole d'équation $y = 0,5x^2 - 3x + 5$ et la cible se situe au point $A(3;0)$. Où est-ce que le tir doit être déclenché pour que la cible soit atteinte ?