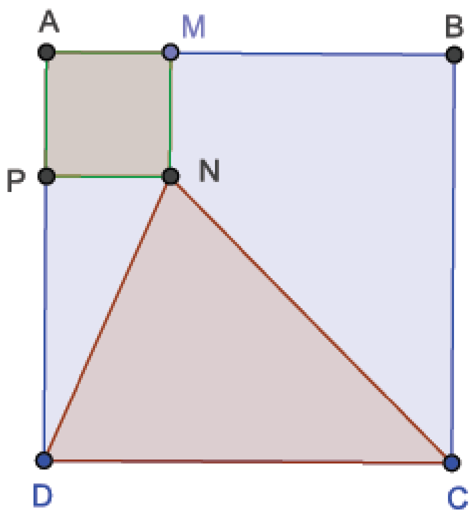
Géométrie dynamique

Exercice 1

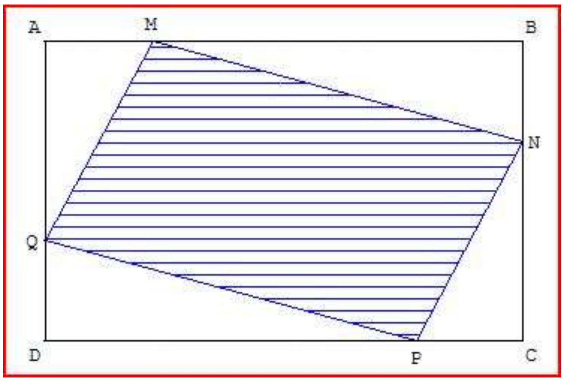


ABCD est un carré de 20 centimètres de côté. Soit M un point du segment [AB] et N et P tels que le quadrilatère AMNP soit un carré, P appartenant au segment [AD]. On note $x = AM$. On notera $f(x)$ l'aire du carré AMNP et $g(x)$ celle du triangle CDN.

Existe-t-il une ou plusieurs valeurs de x dans l'intervalle $[0;20]$ pour lesquelles l'aire du carré AMNP est égale à celle du triangle CDN ? Pourquoi ?

Exercice 2

ABCD est un rectangle de longueur $a = 9$ et de largeur $b = 6$. À l'intérieur de ce rectangle on trace le quadrilatère MNPQ tel que AM = BN = CP = DQ = x. On notera $A(x)$ l'aire de ce quadrilatère. Le but de cet exercice est de déterminer où il faut placer le point M pour que l'aire du quadrilatère MNPQ soit la plus petite possible.



Une conjecture

A l'aide d'une figure dynamique conjecturer quelle est la valeur de x pour laquelle l'aire de MNPQ est minimale.

Etude mathématique du cas particulier

Démontrer que $A(x) = 2x^2 - 15x + 54$.

Déterminer la forme canonique du trinôme.

En déduire que le minimum de l'aire est atteint pour $x = 3{,}75$. Quel est ce minimum ?

Etude mathématique du cas général

ABCD est un rectangle de longueur a et de largeur b. À l'intérieur de ce rectangle on trace le quadrilatère MNPQ tel que AM = BN = CP = DQ = x. On notera $A(x)$ l'aire de ce quadrilatère. Le but de cet exercice est de déterminer où il faut placer le point M pour que l'aire du quadrilatère MNPQ soit la plus petite possible.

Démontrer que $A(x) = 2x^2 - (a+b)x + ab$. Déterminer la forme canonique du trinôme $A(x)$.

En déduire que le minimum de l'aire est atteint pour $x = \dfrac{a+b}{4}$. Quel est ce minimum ?

Pensée algorithmique

Exercice 3

Ecrire un algorithme qui demande la saisie d'un nombre entier naturel n et qui renvoie **la somme des entiers naturels** de 0 à n, c'est-à-dire le nombre suivant :

$$\boxed{S(n)=\sum_{i=0}^{n} i=0+1+2+\ldots+n}$$

Programmation

Programmer cet algorithme à l'aide d'un logiciel et donner la valeur de $S(100)$.

Travail mathématique

Le but du travail mathématique proposé ci-après, est de déterminer une formule permettant de calculer directement $S(n)$ quelle que soit $n\in\mathbb{N}$. On parle de la formule explicite de $S(n)$.

On considère pour cela σ la **fonction trinôme** définie par $\sigma(x)=\dfrac{x(x+1)}{2}$. Montrer que $\forall x\in[0;+\infty[$, $\sigma(x+1)-\sigma(x)=x+1$. Ecrire la relation précédente pour $x=0,1,2,\ldots,n$ et en déduire $S(n)$ en fonction de n.

Exercice 4

Ecrire un algorithme qui demande la saisie d'un nombre entier naturel n et qui renvoie **la somme des carrés des entiers naturels** de 0 à n, c'est-à-dire le nombre suivant :

$$\boxed{S(n)=\sum_{i=0}^{n} i^2=0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2}$$

Programmation

Programmer cet algorithme à l'aide d'un logiciel et donner la valeur de $S(100)$.

Travail mathématique

Le but du travail mathématique proposé ci-après, est de déterminer une formule permettant de calculer directement $S(n)$ quelle que soit $n\in\mathbb{N}$. On parle de la formule explicite de $S(n)$.

On considère pour cela σ la **fonction polynôme** définie par $\sigma(x)=\dfrac{x(x+1)(2x+1)}{6}$. Montrer que : $\forall x\in[0;+\infty[$, $\sigma(x+1)-\sigma(x)=(x+1)^2$. Ecrire la relation précédente pour $x=0,1,2,\ldots,n$ puis en déduire l'expression de $S(n)$ en fonction de n.