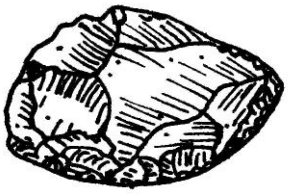
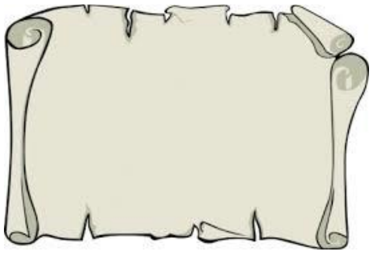
Pierre, feuille et ciseaux

Dans le jeu « Pierre, feuille et ciseaux » deux joueurs choisissent simultanément l'un des trois « coups » suivants : « Pierre » en fermant la main, « Feuille » en tendant la main et « Ciseaux » en écartant deux doigts. La règle du jeu est la suivante :

- La Pierre bat les ciseaux en les cassant,
- Les ciseaux battent la feuille en la coupant,
- La feuille bat la pierre en la recouvrant,
- Il y a « égalité » si les deux joueurs choisissent le même « coup ».

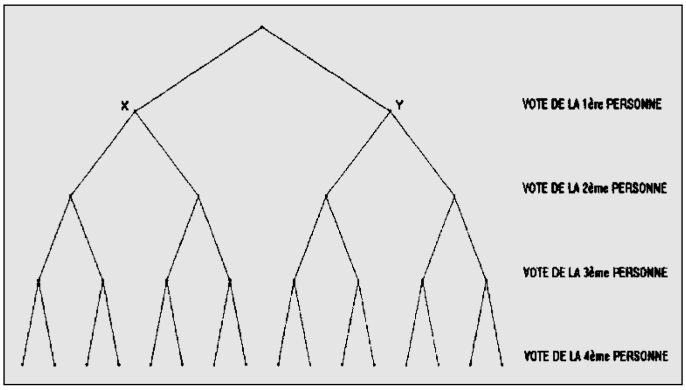
Quelle est la probabilité de « Gagner », quelle est la probabilité de « Perdre », quelle est la probabilité d'obtenir « égalité » ? Justifier les réponses en faisant apparaître une explication basée sur un arbre (puis une basée sur un tableau à double entrée) présentant toutes les issues possibles.





Lors d'une élection

Quatre personnes votent pour élire un candidat parmi deux : Xavier ou Yves. Un candidat ne sera élu au premier tour que s'il obtient la majorité absolue c'est à dire : « au moins trois voix ». Chacun des votants doit voter pour un seul des deux candidats. Après avoir recopié et complété l'arbre des probabilités proposé ci-contre, calculer la probabilité pour que le candidat Xavier soit élu au premier tour.



Avec un jeu de cartes

On pioche une carte dans un jeu de 32 cartes.

- On note A l'événement « j'ai tiré un roi ».
- On note B l'événement « j'ai tiré un trèfle ».

Calculer $p(A)$. Calculer $p(B)$. Calculer $p(A\cap B)$.

Calculer $p(A\cup B)$. Calculer $p(\overline{A})$. Calculer $p(\overline{B})$.

Somme de deux dés

On lance deux dés équilibrés à six faces et on calcule la **somme** de leurs faces supérieures. Compléter le tableau à double entrée proposé ci-contre.

1. Est-il plus probable d'obtenir comme résultat le nombre deux ou le nombre douze ?
2. Quel résultat a-t-on le plus de chance d'obtenir ?

dé vert / dé bleu

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3	4					
4						
5						
6						

Produit de deux dés

On lance deux dés équilibrés à six faces et on calcule le **produit** de leurs faces supérieures. Compléter le tableau à double entrée proposé ci-contre.

Produit	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5			15			
6						

1. Est-il plus probable d'obtenir un nombre pair ou un nombre impair ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de trois ? Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de cinq ? Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de sept ?

Port de lunettes et genre

Après avoir reçu et interrogé les élèves d'une même classe, l'infirmière scolaire dresse le tableau à double entrée proposé ci-contre.

	Porte des lunettes	Ne porte pas de lunettes
Fille	3	15
Garçon	7	5

On choisit un élève au hasard dans cette classe. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ? Quelle est la probabilité que l'élève porte des lunettes ? Quelle est la probabilité que ce soit une fille qui porte des lunettes ? Les résultats seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.

Régime scolaire et genre

Une classe de troisième est constituée de 25 élèves. Certains sont externes, les autres demi-pensionnaires.

Le tableau ci-contre donne la composition de la classe.

	Garçons	Filles	Total
Externes		3	
DP	9	11	
Total			25

On choisit au hasard un élève de cette classe. Déterminer la probabilité que cet élève soit un garçon. Déterminer la probabilité que cet élève soit externe. Déterminer la probabilité que cet élève soit un garçon externe. Donner les résultats sous la forme d'une fraction.

Fiabilité d'un test

Un test permet de dépister les personnes atteintes d'une maladie rare. Pour étudier les performances de ce test, on fait une étude statistique sur 5000 personnes.

	Personnes malades	Personnes non malades
Personnes testées positives	18	300
Personnes testées négatives	2	4680

On choisit au hasard une personne et on considère les événements suivants :

- T = « la personne testée est positive »,
- M = « la personne testée est malade ».

1. Calculer les probabilités $p(M)$, $p(T)$ et $p(T \cap M)$. Interpréter les résultats obtenus.
2. Un médecin affirme que ce test a une efficacité de 90% sur les malades. A-t-il raison ?
3. Une personne a été dépistée positive, doit-elle être inquiète d'être malade ? Pourquoi ?

Changement d'univers

On lance deux dés, l'un tétraédrique, l'autre cubique, supposés bien équilibrés. Le dé tétraédrique se stabilise sur une face portant un numéro t et le dé cubique se stabilise sur une face portant un numéro c, avec $1 \leq t \leq 4$ et $1 \leq c \leq 6$. On note $(t;c)$ le couple ainsi obtenu.

On considère les deux évènements suivants : $A = "t \leq 3"$ et $B = "t + c = 8"$.

- Déterminer le nombre de tirages possibles,
- Déterminer la probabilité de l'événement A,
- Déterminer la probabilité de l'événement B,
- Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap B$.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$	$(1;5)$	$(1;6)$
2	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$	$(2;4)$	$(2;5)$	$(2;6)$
3	$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;3)$	$(3;4)$	$(3;5)$	$(3;6)$
4	$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$	$(4;4)$	$(4;5)$	$(4;6)$

On suppose que l'événement B est réalisé

A quel nouvel univers cette information nous restreint-elle ? Quelle est la probabilité, sachant que l'événement B est réalisé, que l'événement A le soit également ?

On suppose désormais que l'événement A est réalisé

A quel nouvel univers cette information nous restreint-elle ? Quelle est la probabilité, sachant que l'événement A est réalisé, que l'événement B le soit également ?

Conjectures

A partir des résultats obtenus précédemment, proposer une relation liant probabilité de l'intersection de deux événements, probabilité simple et probabilité conditionnelle.

Des probabilités sous condition

Une dame nourrit son chat Gédéon avec des aliments en boîte. Chaque jour elle choisit une boîte au hasard parmi les trois variétés : volaille, bœuf ou lapin. Cette dame a remarqué que :

- Si on lui sert de la volaille, Gédéon finit toujours sa gamelle.
- Si on lui sert du bœuf, Gédéon finit sa gamelle une fois sur deux.
- Si on lui sert du lapin, Gédéon finit sa gamelle une fois sur trois seulement.

1. Calculer la probabilité pour que, un jour donné, Gédéon finisse sa gamelle.

2. Aujourd'hui, Gédéon a fini sa gamelle.
   Calculer la probabilité pour qu'il ait mangé du lapin.

Test de dépistage

Une agence de lutte contre le dopage a mis au point un test pour détecter un nouveau produit dopant. On estime que :

- 2% des sportifs utilisent ce produit dopant,
- Si un sportif a ingéré ce produit, le test est positif dans 99% des cas,
- Si un sportif n'a pas ingéré ce produit, le test est positif dans 1,5% des cas.

1. Un sportif est testé positif. Peut-on prendre le risque de dire qu'il s'est dopé ?

2. Un sportif est testé négatif. Peut-on prendre le risque de dire qu'il ne s'est pas dopé ?

Les deux réponses seront argumentées par :

- Le tracé d'un arbre pondéré des probabilités,
- L'application de la formule des probabilités totales,
- le calcul détaillé de deux probabilités conditionnelles bien choisies.

Antivirus

Chaque jour, 3% des mails reçus par Benjamin sont indésirables. Parmi les mails indésirables 95% sont automatiquement supprimés par son logiciel antivirus. Parmi les mails qui ne sont pas indésirables l'antivirus en supprime 2% par erreur. On note : I l'événement : « le mail reçu est indésirable », S l'événement : « le mail reçu est supprimé ».

1. Calculer $p(S)$.

2. Calculer $p_S(I)$. Calculer $p_{\overline{S}}(\overline{I})$.

3. Un mail vient d'être supprimé par l'antivirus : est-on sûr que c'est un mail indésirable qui vient d'être supprimé ? Justifier la réponse à l'aide de l'une des probabilités calculées.

4. Un mail n'a pas été supprimé par l'antivirus, prend-on un risque en l'ouvrant quand même ? Justifier la réponse à l'aide de l'une des probabilités calculées.

Feu tricolore

A un croisement se trouve un feu tricolore dont les feux sont alternativement vert, orange ou rouge avec les probabilités respectives de 0,4 ; 0,1 et 0,5. Des cyclistes empruntent régulièrement ce croisement et une étude statistique a permis de déterminer les résultats suivants :

- Si le feu est vert, le cycliste passe avec une probabilité de 1 ;
- Si le feu est orange, le cycliste passe avec une probabilité de 0,1 ;
- Si le feu est rouge, le cycliste passe avec une probabilité de 0,02.

On note : V l'événement : « le feu est vert », O l'événement : « le feu est orange », R l'événement : « le feu est rouge », A l'événement : « le cycliste s'arrête ».

1. Montrer que la probabilité que le cycliste ne s'arrête pas au feu tricolore est égale à 0,42.
2. Sachant que le cycliste ne s'est pas arrêté au feu, calculer la probabilité que le feu soit vert.

Test de dépistage

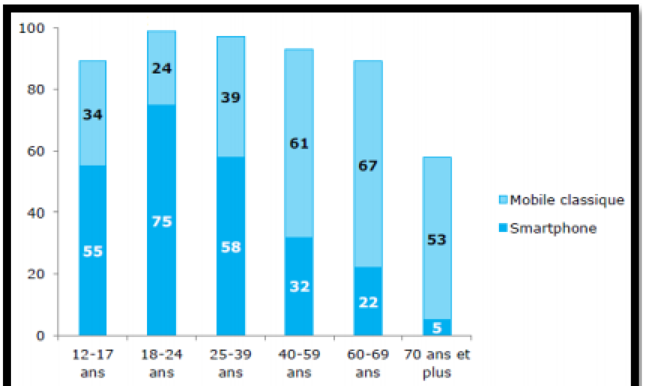
Dans un pays, 2% de la population est contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes : dans 99% des cas une personne contaminée a un test positif (il s'agit de la sensibilité du test), dans 97% des cas une personne non contaminée a un test négatif (il s'agit de la spécificité du test). Une revue scientifique affirme que « dans ces conditions, si le test effectué sur une personne quelconque est positif, il n'y a environ que 40% de chances que la personne soit contaminée ».

1. Que pensez-vous de cette affirmation ?
2. Qu'en est-il de la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée sachant que son test est négatif ?

Smartphone

Le premier graphique permet de visualiser le taux d'équipement en téléphone mobile classique et smartphone entre les tranches d'âges en France en 2013. Le deuxième graphique indique la proportion de chaque tranche d'âge dans la population française âgée de 12 ans et plus en 2013. Une société de sondage interroge au hasard une personne âgée de plus de 12 ans.

1. Quelle est la probabilité que cette personne possède un smartphone ?
2. Si la personne a un smartphone, quelle est la probabilité qu'elle ait plus de 70 ans ?



Source : CREDOC, Enquête sur les « Conditions de vie et les Aspirations», juin 2013.

Tranche d'âge	Proportion (en %) dans la population des plus de 12 ans
12 - 17 ans	9
18 - 24 ans	11
25 – 39 ans	21
40 – 59 ans	32
60 – 69 ans	13
70 ans et plus	14

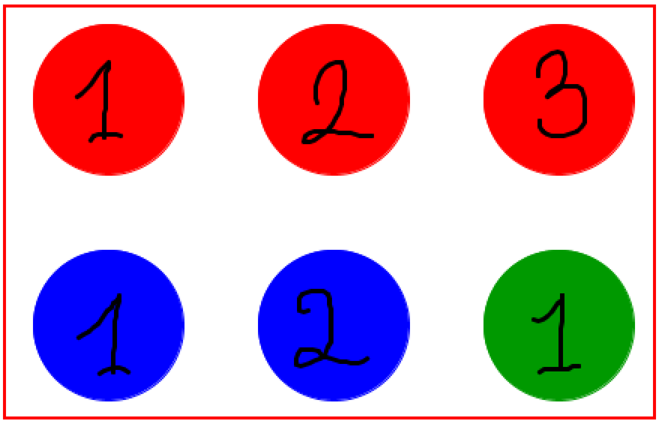
Dépendance et indépendance

On considère l'événement $C = "t + c = 5"$. Déterminer la probabilité, sachant que l'événement A est réalisé, que l'événement C le soit également. Déterminer la probabilité, sachant que l'événement C est réalisé, que l'événement A le soit également. Comparer ces deux probabilités conditionnelles aux probabilités de l'événement C et de l'événement A. Quelle incidence semble avoir la réalisation de A sur la probabilité de C et la réalisation de C sur la probabilité de A ?

Des couleurs et des chiffres

On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant les six jetons représentés ci-contre. On considère trois événements :

- R = « le jeton est Rouge »,
- U = « le numéro est Un »,
- D = « le numéro est Deux ».

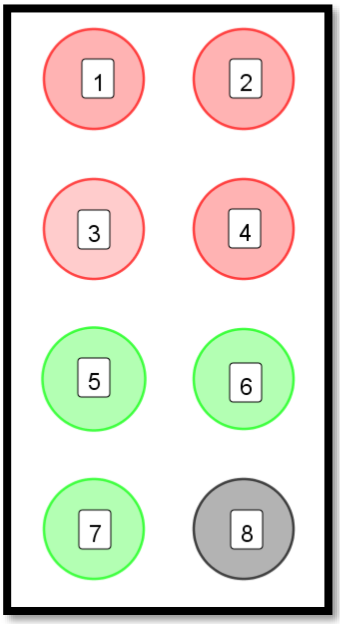


Les événements R et U sont-ils indépendants ? Les événements R et D sont-ils indépendants ?

Des couleurs et des chiffres, encore…

Une urne contient quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4, trois jetons verts numérotés de 5 à 7 et un jeton noir numéroté 8. On tire au hasard un jeton de l'urne et on s'intéresse aux événements :

- A = « obtenir un numéro pair »,
- B = « obtenir un jeton rouge »,
- C = « obtenir un jeton vert ».



Donner sans justification les probabilités simples $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, les probabilités conditionnelles $p_B(A)$, $p_A(B)$, $p_C(A)$, $p_A(C)$ et les probabilités d'intersection $p(A \cap B)$ et $p(A \cap C)$.

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.
2. Les événements A et C sont-ils indépendants ? Justifier.

Des sports et des langues

On donne ci-contre la répartition de 150 étudiants selon la langue étudiée et l'activité sportive choisie.

	Tennis	Equitation	Voile
Anglais	45	18	27
Allemand	33	9	18

Les événements A = « étudier l'anglais » et T = « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ?
Les événements D = « étudier l'allemand » et V = « pratiquer la voile » sont-ils indépendants ?