Exercice 1

1. Soit n un nombre entier quelconque. Montrer que $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.
2. Les VHF (voleurs fortement hiérarchisés) avaient tous, dans leur bande, un grade différent. Comme ils avaient une nuit volé un lot d'appareils photographiques, leur chef déclara : « le moins gradé en prendra un, celui du grade immédiatement supérieur en prendra deux, celui du troisième grade en prendra trois et ainsi de suite. » Cependant les voleurs se révoltèrent contre cette injustice : « nous en prendrons cinq chacun dit le plus audacieux. » Et ainsi fut fait. Combien d'appareils les VHF avaient-ils volés ?

Exercice 2

1. Soit q un nombre réel tel que $q\neq 1$. Montrer que $1+q+q^2...+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
2. La légende du jeu d'échec : le roi demanda à l'inventeur du jeu d'échec de choisir lui-même sa récompense. Celui-ci répondit : « place un grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux grains de blé sur la deuxième, quatre grains de blé sur la troisième, huit grains de blé sur la quatrième, et ainsi de suite jusqu'à la $64^{ème}$ case. Le roi sourit de la modestie de cette demande. Avait-il raison de sourire ? On calculera pour répondre à cette question le nombre total de grains de blé que le roi devra placer sur l'échiquier.

Exercice 3

Partie A - *Vous pouvez réutiliser les résultats des questions 1 des deux exercices précédents.*

1. Démontrer que si (u_n) est arithmétique alors $u_0+u_1+...+u_n=(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$.
2. Démontrer que si (v_n) est géométrique de raison q alors $v_0+v_1+...+v_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Partie B

Un artisan propose de réaliser le forage d'un puits selon le tarif suivant : l'installation du matériel coûte 100 euros, le premier mètre foré coûte 110 euros, le deuxième coûte 120 euros, le troisième coûte 130 euros, chaque mètre supplémentaire coûtant dix euros de plus que le précédent. On note c_n le montant du $n$ème mètre creusé (c_0 représentant le coût de l'installation). On note d_n la dépense totale pour effectuer un forage d'une profondeur de n mètres.

1. Exprimer c_n en fonction de n. Exprimer d_n en fonction de n.
2. Avec 2800 euros, quelle sera la profondeur du puits que nous pouvons faire creuser ?

Partie B

En 2017, la consommation annuelle mondiale de pétrole était de 36 milliards de barils. Malgré les engagements pour limiter cette consommation, elle a continué d'augmenter de 1,8% par an. On supposera ce taux d'augmentation stable et on arrondira les résultats au milliard de baril près.

3. A ce rythme quel sera la consommation annuelle mondiale en 2050 ?
4. Combien de barils de pétroles auront été consommés entre 2017 et 2050 ?