Définition de la moyenne

$$\boxed{\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \dots + n_p \times x_p}{N}}$$

x_1, x_2, … , x_p sont les différentes valeurs prises par la série statistique.

n_1, n_2, … , n_p sont les effectifs respectifs de chacune de ces valeurs.

N est l'effectif total.

Définition de la variance

La variance d'une série statistique est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

Définition de l'écart type

L'écart type d'une série statistique est la racine carrée de la variance.

L'écart type mesure la dispersion des valeurs de la série autour de la moyenne.

Application directe des définitions

On considère deux séries statistiques constituées des notes obtenues par une classe de 17 élèves à deux devoirs :

Devoir 1 : 8, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13, 14.
Devoir 2 : 3, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 13, 15, 15, 15, 17, 20.

Deux séries statistiques

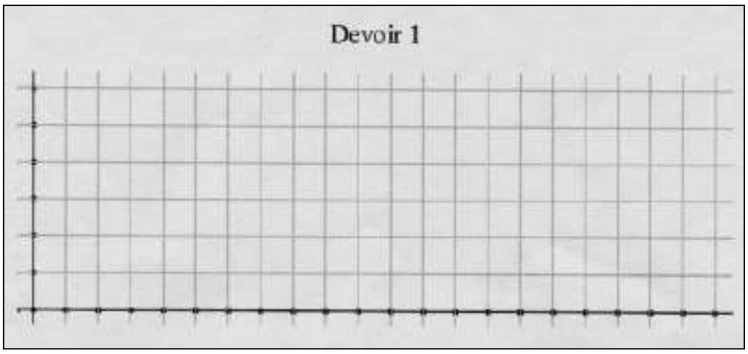


Diagramme en bâtons série 1

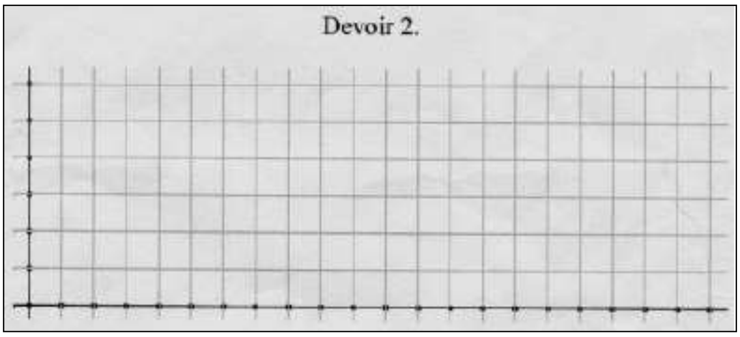


Diagramme en bâtons série 2

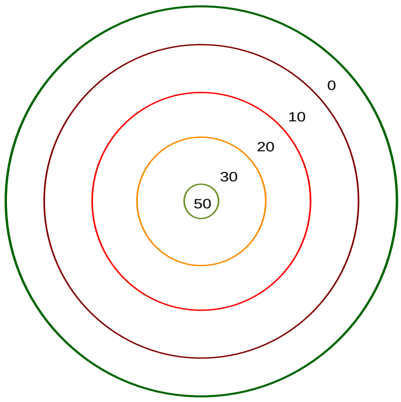
Exercice d'application

Xavier et Yves s'affrontent en vue d'une sélection lors d'une épreuve comportant 20 tirs sur cible.

Xavier : **50 – 20 – 20 – 30 – 10 – 20 – 30 – 10 – 50 – 30 – 0 – 20 – 30 – 50 – 10 – 50 – 20 – 30 – 30 – 10**
Yves : **50 – 20 – 20 – 50 – 10 – 20 – 30 – 10 – 50 – 30 – 0 – 20 – 0 – 50 – 10 – 50 – 20 – 50 – 30 – 0**

Partie A – Calcul de moyenne

Calculer la moyenne des points obtenus par Xavier. Calculer la moyenne des points obtenus par Yves. La moyenne permet-elle de départager les deux concurrents ?



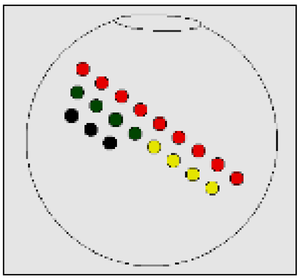
Partie B – Calcul d'écart type

Calculer l'écart type de la série des points obtenus par Xavier. Calculer l'écart type des points obtenus par Yves. On désire récompenser le tireur le plus régulier. Qui récompensera-t-on ? Justifier votre réponse.

Une expérience aléatoire

Un sac contient 20 jetons unicolores :

- 9 rouges,
- 4 verts,
- 4 jaunes,
- 3 noirs.



Un joueur prend au hasard un jeton du sac :

- Si le jeton est noir il gagne 5 €,
- S'il est vert ou jaune il gagne 3 €,
- S'il est rouge il perd 2 €.

Une variable aléatoire

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique du joueur.

Evènement exprimé à l'aide de la variable aléatoire X.	Evènement exprimé en compréhension.	Probabilité de l'événement.
« X = –2 »		
« X = 3 »		
« X = 5 »		

Deux remarques importantes

- P(« X = –2 ») + P(« X = 3 ») + P(« X = 5 ») =
- La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	–2	3	5
p_i			

Trois formules à connaître

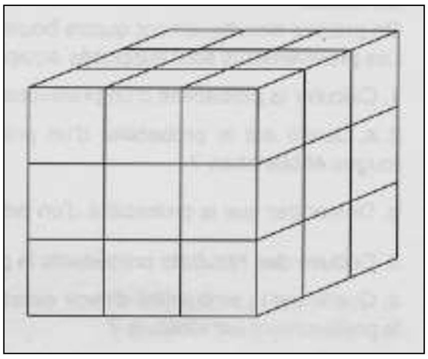
- Espérance :
  $E(X) = \sum_i p_i \times x_i$
- Variance :
  $V(X) = \sum_i p_i \times (x_i - E(x))^2$
- Ecart type :
  $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

x_i	–2	3	5
p_i			
$(x_i - E(X))^2$			

Calculer l'espérance, la variance puis l'écart type de la variable aléatoire X. On pourra s'aider du tableau ci-dessus afin d'organiser les différents calculs. Que représente l'espérance ?

Avec un cube

On dispose d'un cube en bois de 3 cm d'arête peint en bleu. On le découpe, parallèlement aux faces, en 27 cubes de 1 cm d'arête. On place ces 27 cubes dans un sac. On tire au hasard l'un des 27 cubes du sac.



On suppose que les tirages sont équiprobables.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de faces peintes sur le cube tiré.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Avec une roulette

On considère une roulette que l'on fait tourner. Lorsqu'elle s'arrête on peut considérer que la flèche s'immobilise au hasard sur l'un des quinze numéros. On suppose que les quinze secteurs angulaires sont égaux. On notera Y la variable aléatoire représentant le gain du joueur. Les règles du jeu sont les suivantes :

- On mise 2€ sur un numéro (la mise est automatiquement perdue),
- Si le numéro misé sort, on gagne 20€, si l'un des numéros voisins sort, on gagne 3€,
- Sinon on ne gagne rien.

1. Déterminer les différentes valeurs prises par la variable aléatoire Y.

2. Etablir dans un tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

3. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire ? A quoi correspond cette valeur ?

Avec des boules

Une urne contient 2 boules vertes, 5 boules blanches et 8 boules rouges. Après avoir misé, un joueur tire au hasard une boule de l'urne. La mise est un nombre réel noté m.

Les règles du jeu sont les suivantes :

- Si la boule est verte il reçoit 16€,
- Si elle est blanche il récupère sa mise,
- Si elle est rouge il perd sa mise.

On appelle Z la variable aléatoire représentant le gain du joueur à l'issue de la partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de Z.

2. Déterminer la mise m pour que le jeu soit équitable.

Une loterie

Lors d'une loterie, un joueur mise 1 euro. S'il gagne la partie, il reçoit 5 euros. S'il perd la partie, il ne reçoit rien. La probabilité que le joueur gagne la partie est $\frac{7}{30}$. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter.
3. Ce jeu est-il favorable ou défavorable au joueur ? Justifier.

Deux dés

Un joueur mise m euros et lance deux dés équilibrés. Si la somme des deux nombres est égale à 7, il gagne 15 euros, sinon, il ne gagne rien. On appelle Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue de la partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de Y.
2. Quand peut-on dire qu'un jeu d'argent est équitable ?
3. Déterminer la valeur de la mise pour que ce jeu d'argent soit équitable.

Une roulette

On considère une roulette que l'on fait tourner. Lorsqu'elle s'arrête on peut considérer que la flèche s'immobilise au hasard sur l'un des quinze numéros. On suppose que les quinze secteurs angulaires sont égaux. On notera Z la variable aléatoire représentant le gain du joueur. Les règles du jeu sont les suivantes :

- On mise 2€ sur un numéro (la mise est automatiquement perdue),
- Si le numéro misé sort, on gagne 20€, si l'un des numéros voisins sort, on gagne 3€,
- Sinon on ne gagne rien.

Déterminer les différentes valeurs prises par la variable aléatoire Z. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z. Le jeu est-il favorable ou défavorable au joueur ? Justifier.

Jeu électronique

Un jeu de hasard électronique est composé d'une cible (voir ci-contre) et d'un dispositif allumant de manière aléatoire une des cases.

B	B	B	B	B	B
B	J	V	V	J	B
B	J	R	R	J	B
B	J	V	V	J	B
B	B	B	B	B	B

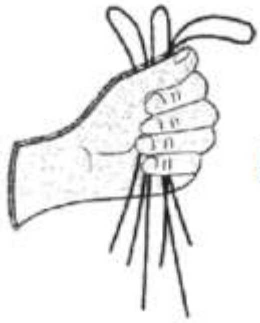
La mise pour une partie est de m euros. Chaque case a la même probabilité de s'allumer.

- Si une case rouge s'allume, le joueur gagne 16€,
- Si une case verte s'allume, le joueur gagne 7€,
- Si une case jaune s'allume, le joueur ne gagne rien,
- Si une case bleue s'allume, le joueur perd 2€.

On note G la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur. Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire. Déterminer la valeur de m pour que le jeu soit équitable.

Mariage en Russie

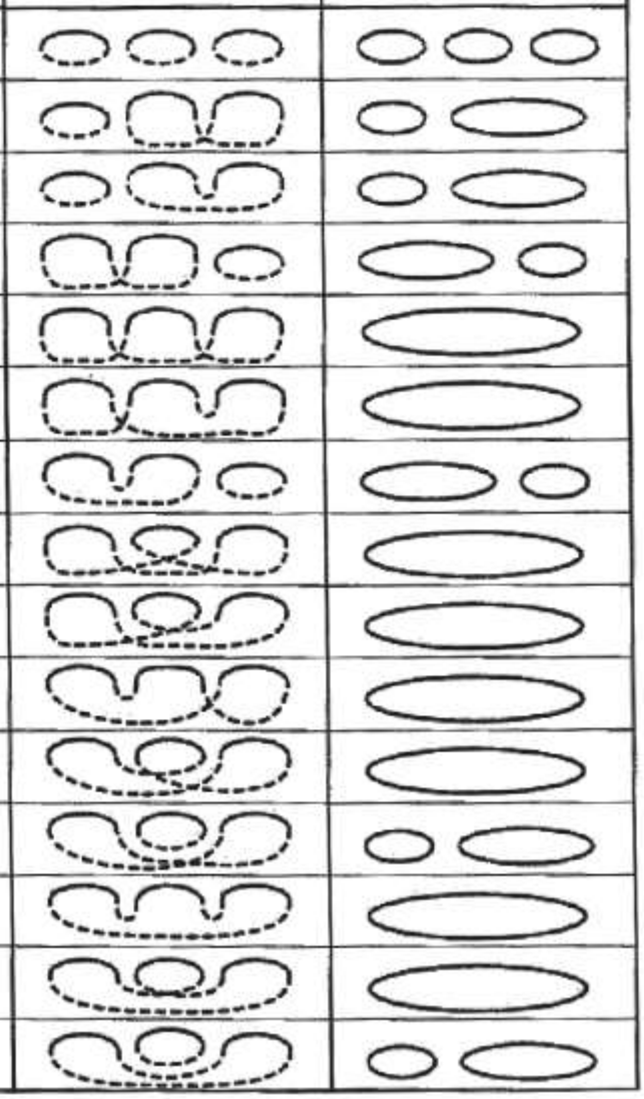
Dans certaines régions rurales de Russie, on prévoyait les mariages de la manière suivante : une jeune fille tenait dans sa main 3 longs brins d'herbe repliés en deux, dont les six extrémités dépassaient sous sa main (dessin 1) ; une autre jeune fille nouait au hasard les extrémités deux par deux ; si le résultat formait une seule boucle fermée (dessin 2), c'est que la jeune fille qui nouait les brins d'herbe allait se marier dans l'année. On note X le nombre de boucles fermées obtenues. A l'aide des documents proposés ci-dessous, déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X. Donner la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance de X et interpréter.



Dessin 1

Dessin 2

Résultats possibles	Liens	Schémas des boucles otenues
{12} {34} {56}		
{12} {35} {46}		
{12} {36} {45}		
{13} {24} {56}		
{13} {25} {46}		
{13} {26} {45}		
{14} {23} {56}		
{14} {25} {36}		
{14} {26} {35}		
{15} {23} {46}		
{15} {24} {36}		
{15} {26} {34}		
{16} {23} {45}		
{16} {24} {35}		
{16} {25} {34}		



Produit des faces de deux dés

Un joueur mise 4 euros (la mise est immédiatement perdue) et lance deux dés équilibrés.

- Si le **produit des deux nombres est impair**, il gagne 36 euros,
- Sinon, il ne gagne rien.

On appelle Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue de la partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de Y.
2. Calculer l'espérance de Y.
3. Le jeu est-il équitable ?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
2	*2*	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*
3	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*
4	*4*	*8*	*12*	*16*	*20*	*24*
5	*5*	*10*	*15*	*20*	*25*	*30*
6	*6*	*12*	*18*	*24*	*30*	*36*

Somme des faces de deux dés

Un joueur mise 6 euros (la mise est immédiatement perdue) et lance deux dés équilibrés.

- Si la **somme des deux nombres est égale à 7**, il gagne 30 euros,
- Sinon, il ne gagne rien.

On appelle Z la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue de la partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de Z.
2. Calculer l'espérance de Z.
3. Le jeu est-il équitable ?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
2	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
3	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
4	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
5	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
6	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*

Contrôle qualité

Une entreprise fabrique des casques audio. Dans sa production, 5% d'entre eux ne sont pas conformes (ils ont un défaut). Le contrôle de production mis en place rejette 96% des casques défaillants et malheureusement rejette aussi 7% des casques qui n'ont pas de défaut.

1. Quelle est la probabilité qu'un casque, choisi au hasard dans cette production, ne soit pas conforme et ne soit pas rejeté par le contrôle ?
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
3. Quelle est la probabilité qu'un casque pris au hasard ne soit pas rejeté ?

Un second contrôle est réalisé, indépendamment du premier. La probabilité qu'un casque de cette entreprise ne soit pas rejeté après ce deuxième contrôle est égale à 0,94. Un casque subit les deux contrôles : l'entreprise réalise un bénéfice de 89 euros s'il n'est rejeté par aucun contrôle, elle perd 40 euros s'il est rejeté par les deux contrôles, elle réalise un bénéfice de 29 euros sinon. On appelle B la variable aléatoire égale au bénéfice exprimé en euros. Déterminer l'espérance de B.