Définition de la moyenne

$$\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \ldots + n_p \times x_p}{N}$$

x_1, x_2, … , x_p sont les différentes valeurs prises par la série statistique.

n_1, n_2, … , n_p sont les effectifs respectifs de chacune de ces valeurs.

N est l'effectif total.

Définition de la variance

La variance d'une série statistique est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

Définition de l'écart type

L'écart type d'une série statistique est la racine carrée de la variance.

L'écart type mesure la dispersion des valeurs de la série autour de la moyenne.

Application directe des définitions

On considère deux séries statistiques constituées des notes obtenues par une classe de 17 élèves à deux devoirs :

Devoir 1 : 8, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13, 14.
Devoir 2 : 3, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 13, 15, 15, 15, 17, 20.

Deux séries statistiques

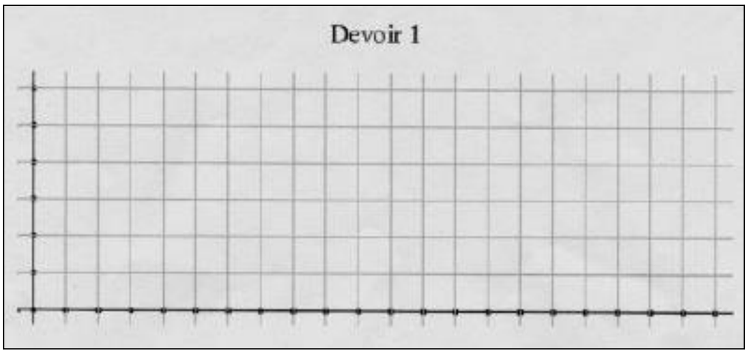


Diagramme en bâtons série 1

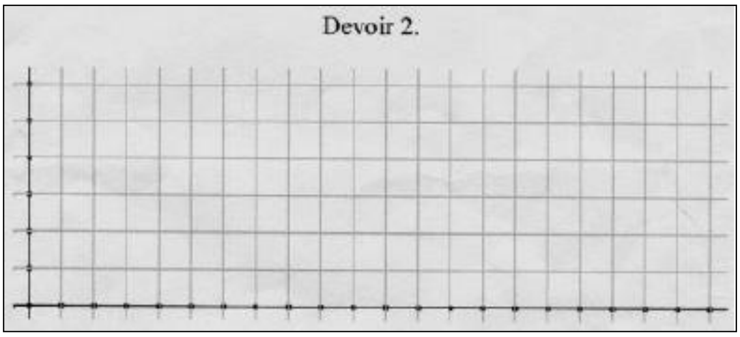


Diagramme en bâtons série 2

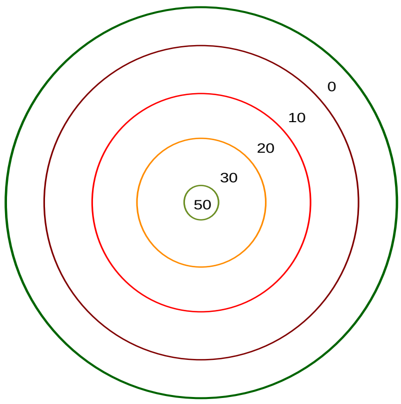
Exercice d'application

Xavier et Yves s'affrontent en vue d'une sélection lors d'une épreuve comportant 20 tirs sur cible.

Xavier : **50 – 20 – 20 – 30 – 10 – 20 – 30 – 10 – 50 – 30 – 0 – 20 – 30 – 50 – 10 – 50 – 20 – 30 – 30 – 10**
Yves : **50 – 20 – 20 – 50 – 10 – 20 – 30 – 10 – 50 – 30 – 0 – 20 – 0 – 50 – 10 – 50 – 20 – 50 – 30 – 0**

Partie A – Calcul de moyenne

Calculer la moyenne des points obtenus par Xavier. Calculer la moyenne des points obtenus par Yves. La moyenne permet-elle de départager les deux concurrents ?



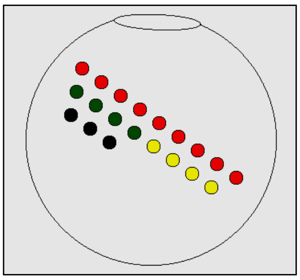
Partie B – Calcul d'écart type

Calculer l'écart type de la série des points obtenus par Xavier. Calculer l'écart type des points obtenus par Yves. On désire récompenser le tireur le plus régulier. Qui récompensera-t-on ? Justifier votre réponse.

Une expérience aléatoire

Un sac contient 20 jetons unicolores :

- 9 rouges,
- 4 verts,
- 4 jaunes,
- 3 noirs.



Un joueur prend au hasard un jeton du sac :

- Si le jeton est noir il gagne 5 €,
- S'il est vert ou jaune il gagne 3 €,
- S'il est rouge il perd 2 €.

Une variable aléatoire

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique du joueur.

Evènement exprimé à l'aide de la variable aléatoire X.	Evènement exprimé en compréhension.	Probabilité de l'événement.
« X = –2 »		
« X = 3 »		
« X = 5 »		

Deux remarques importantes

- P(« X = –2 ») + P(« X = 3 ») + P(« X = 5 ») =
- La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	–2	3	5
p_i			

Trois formules à connaître

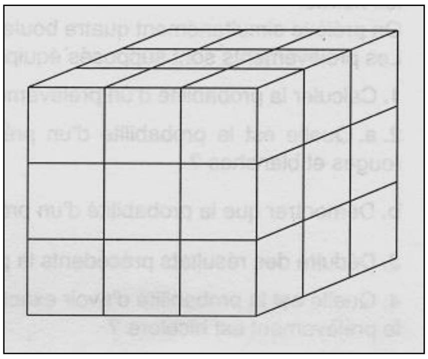
- Espérance :
  $E(X) = \sum_i p_i \times x_i$
- Variance :
  $V(X) = \sum_i p_i \times (x_i - E(x))^2$
- Ecart type :
  $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

x_i	–2	3	5
p_i			
$(x_i - E(X))^2$			

Calculer l'espérance, la variance puis l'écart type de la variable aléatoire X. On pourra s'aider du tableau ci-dessus afin d'organiser les différents calculs. Que représente l'espérance ?

Avec un cube

On dispose d'un cube en bois de 3 cm d'arête peint en bleu. On le découpe, parallèlement aux faces, en 27 cubes de 1 cm d'arête. On place ces 27 cubes dans un sac. On tire au hasard l'un des 27 cubes du sac.



On suppose que les tirages sont équiprobables.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de faces peintes sur le cube tiré.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Avec une roulette

On considère une roulette que l'on fait tourner. Lorsqu'elle s'arrête on peut considérer que la flèche s'immobilise au hasard sur l'un des quinze numéros. On suppose que les quinze secteurs angulaires sont égaux. On notera Y la variable aléatoire représentant le gain du joueur. Les règles du jeu sont les suivantes :

- On mise 2€ sur un numéro (la mise est automatiquement perdue),
- Si le numéro misé sort, on gagne 20€, si l'un des numéros voisins sort, on gagne 3€,
- Sinon on ne gagne rien.

1. Déterminer les différentes valeurs prises par la variable aléatoire Y.

2. Etablir dans un tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

3. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire ? A quoi correspond cette valeur ?

Avec des boules

Une urne contient 2 boules vertes, 5 boules blanches et 8 boules rouges. Après avoir misé, un joueur tire au hasard une boule de l'urne. La mise est un nombre réel noté m.

Les règles du jeu sont les suivantes :

- Si la boule est verte il reçoit 16€,
- Si elle est blanche il récupère sa mise,
- Si elle est rouge il perd sa mise.

On appelle Z la variable aléatoire représentant le gain du joueur à l'issue de la partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de Z.

2. Déterminer la mise m pour que le jeu soit équitable.

Une loterie

Lors d'une loterie, un joueur mise 1 euro. S'il gagne la partie, il reçoit 5 euros. S'il perd la partie, il ne reçoit rien. La probabilité que le joueur gagne la partie est $\frac{7}{30}$. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter.
3. Ce jeu est-il favorable ou défavorable au joueur ? Justifier.

Deux dés

Un joueur mise m euros et lance deux dés équilibrés. Si la somme des deux nombres est égale à 7, il gagne 15 euros, sinon, il ne gagne rien. On appelle Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue de la partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de Y.
2. Quand peut-on dire qu'un jeu d'argent est équitable ?
3. Déterminer la valeur de la mise pour que ce jeu d'argent soit équitable.

Une roulette

On considère une roulette que l'on fait tourner. Lorsqu'elle s'arrête on peut considérer que la flèche s'immobilise au hasard sur l'un des quinze numéros. On suppose que les quinze secteurs angulaires sont égaux. On notera Z la variable aléatoire représentant le gain du joueur. Les règles du jeu sont les suivantes :

- On mise 2€ sur un numéro (la mise est automatiquement perdue),
- Si le numéro misé sort, on gagne 20€, si l'un des numéros voisins sort, on gagne 3€,
- Sinon on ne gagne rien.

Déterminer les différentes valeurs prises par la variable aléatoire Z. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z. Le jeu est-il favorable ou défavorable au joueur ? Justifier.

Jeu électronique

Un jeu de hasard électronique est composé d'une cible (voir ci-contre) et d'un dispositif allumant de manière aléatoire une des cases.

B	B	B	B	B	B
B	J	V	V	J	B
B	J	R	R	J	B
B	J	V	V	J	B
B	B	B	B	B	B

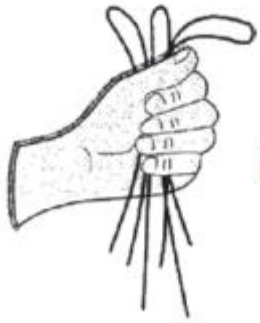
La mise pour une partie est de m euros. Chaque case a la même probabilité de s'allumer.

- Si une case rouge s'allume, le joueur gagne 16€,
- Si une case verte s'allume, le joueur gagne 7€,
- Si une case jaune s'allume, le joueur ne gagne rien,
- Si une case bleue s'allume, le joueur perd 2€.

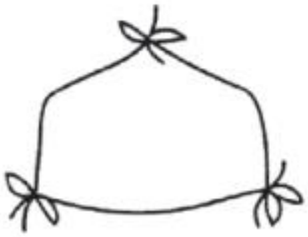
On note G la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur. Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire. Déterminer la valeur de m pour que le jeu soit équitable.

Mariage en Russie

Dans certaines régions rurales de Russie, on prévoyait les mariages de la manière suivante : une jeune fille tenait dans sa main 3 longs brins d'herbe repliés en deux, dont les six extrémités dépassaient sous sa main (dessin 1) ; une autre jeune fille nouait au hasard les extrémités deux par deux ; si le résultat formait une seule boucle fermée (dessin 2), c'est que la jeune fille qui nouait les brins d'herbe allait se marier dans l'année. On note X le nombre de boucles fermées obtenues. A l'aide des documents proposés ci-dessous, déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X. Donner la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance de X et interpréter.



Dessin 1



Dessin 2

Résultats possibles	Liens	Schémas des boucles otenues
{12} {34} {56}		
{12} {35} {46}		
{12} {36} {45}		
{13} {24} {56}		
{13} {25} {46}		
{13} {26} {45}		
{14} {23} {56}		
{14} {25} {36}		
{14} {26} {35}		
{15} {23} {46}		
{15} {24} {36}		
{15} {26} {34}		
{16} {23} {45}		
{16} {24} {35}		
{16} {25} {34}		

Produit des faces de deux dés

Un joueur mise 4 euros (la mise est immédiatement perdue) et lance deux dés équilibrés.

- Si le **produit des deux nombres est impair**, il gagne 36 euros,
- Sinon, il ne gagne rien.

On appelle Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue de la partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de Y.

2. Calculer l'espérance de Y.

3. Le jeu est-il équitable ?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
2	*2*	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*
3	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*
4	*4*	*8*	*12*	*16*	*20*	*24*
5	*5*	*10*	*15*	*20*	*25*	*30*
6	*6*	*12*	*18*	*24*	*30*	*36*

Somme des faces de deux dés

Un joueur mise 6 euros (la mise est immédiatement perdue) et lance deux dés équilibrés.

- Si la **somme des deux nombres est égale à 7**, il gagne 30 euros,
- Sinon, il ne gagne rien.

On appelle Z la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue de la partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de Z.

2. Calculer l'espérance de Z.

3. Le jeu est-il équitable ?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
2	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
3	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
4	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
5	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
6	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*

Contrôle qualité

Une entreprise fabrique des casques audio. Dans sa production, 5% d'entre eux ne sont pas conformes (ils ont un défaut). Le contrôle de production mis en place rejette 96% des casques défaillants et malheureusement rejette aussi 7% des casques qui n'ont pas de défaut.

1. Quelle est la probabilité qu'un casque, choisi au hasard dans cette production, ne soit pas conforme et ne soit pas rejeté par le contrôle ?

2. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?

3. Quelle est la probabilité qu'un casque pris au hasard ne soit pas rejeté ?

Un second contrôle est réalisé, indépendamment du premier. La probabilité qu'un casque de cette entreprise ne soit pas rejeté après ce deuxième contrôle est égale à 0,94. Un casque subit les deux contrôles : l'entreprise réalise un bénéfice de 89 euros s'il n'est rejeté par aucun contrôle, elle perd 40 euros s'il est rejeté par les deux contrôles, elle réalise un bénéfice de 29 euros sinon. On appelle B la variable aléatoire égale au bénéfice exprimé en euros. Déterminer l'espérance de B.

Correcte compréhension et utilisation de certaines notations

Situation 1

Une urne contient 50 tickets numérotés et sa composition est détaillée dans le tableau ci-dessous.

Numéro	10	15	20	22	30	31	40	50
Nombre de tickets	2	14	8	4	7	8	4	3

On tire au hasard un ticket et on note X la variable aléatoire donnant le numéro du ticket tiré. Déterminer les probabilités suivantes après avoir détaillé les événements correspondants :

$p(X=15)$ $p(X\leq 25)$ $p(X\geq 40)$ $p(X<31)$ $p(X>20)$

Situation 2

Soit une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau proposé ci-dessous. Déterminer les probabilités après avoir détaillé les événements correspondants :

x_i	-8	0	7	8	20
$P(X=x_i)$	0,4	0,12	0,3	...	0,08

$p(X=8)$ $p(X\leq 0)$ $p(X\geq 7)$ $p(X<0)$ $p(X>7)$

Situation 3

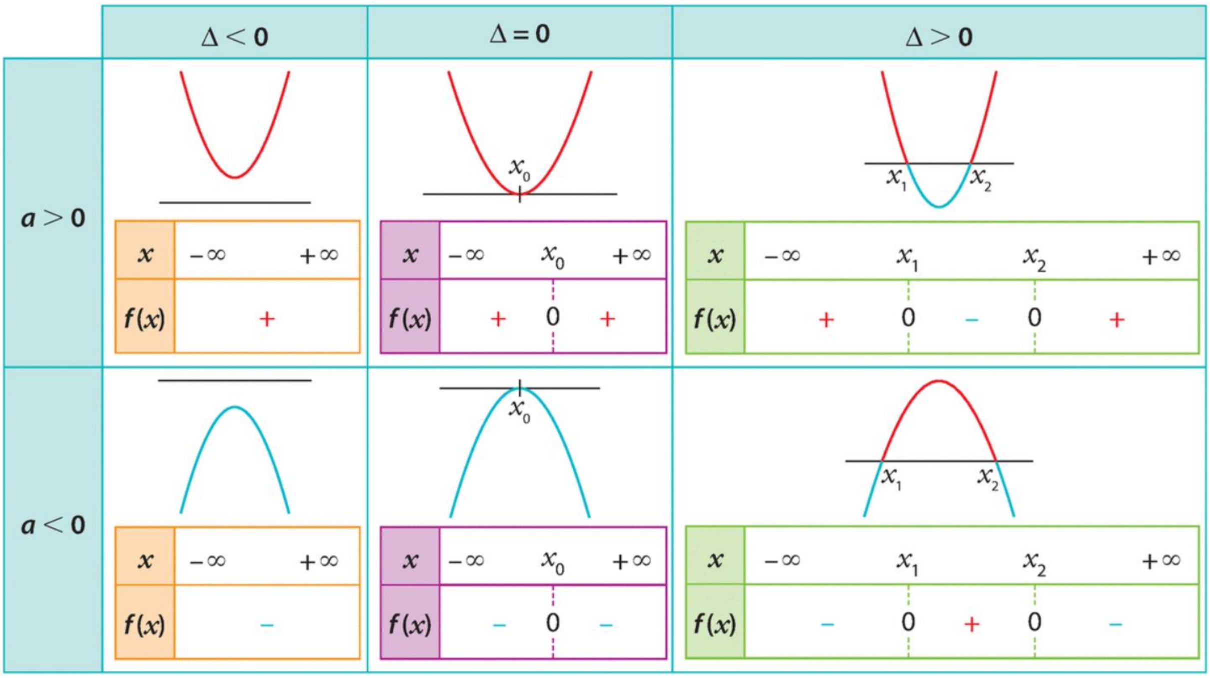
A l'issue d'une chaine de fabrication de jouets en bois, on recherche deux types de défauts : les défauts de solidité et les défauts de couleur. Une étude a permis de dresser le tableau suivant sur un échantillon de 1000 jouets. A réparer, un défaut de couleur coute 5 euros par jouet tandis qu'un défaut de solidité coute 12 euros par jouet. On note X la variable aléatoire donnant le cout de réparation d'un objet avant d'être mis sur le marché. Déterminer la loi de probabilité de X puis déterminer les probabilités suivantes : $p(X\leq 5)$, $p(X\geq 12)$, $p(X\geq 5)$, $p(X\leq 12)$.

	Défaut de couleur	Pas de défaut de couleur	Total
Défaut de solidité	5	28	33
Pas de défaut de solidité	15	952	967
Total	20	980	1 000

Signe d'un trinôme du second degré

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré.
On rappelle la formule $\Delta = b^2 - 4ac$ permettant de calculer le discriminant du trinôme.
On rappelle également les formules $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ permettant de calculer les racines du trinôme.

Le tableau proposé ci-dessous résume les différentes situations rencontrées (qui dépendent du signe du paramètre a et du discriminant Δ) et propose le tableau de signe correspondant.



Exercice d'application directe

Dresser le tableau de signe des trinômes proposés ci-dessous.

Situation 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 12x - 15$.

Situation 2

$7x^2 + 14x - 56$	$5x^2 + 15x + 10$
$3x^2 + 6x - 9$	$2x^2 - 8x + 8$
$-2x^2 + 4x - 5$	$2x^2 - 5x + 10$

Savoir étudier le signe d'un trinôme peut s'avérer utile pour établir le signe d'une espérance…

Tirages successifs avec remise

Une urne contient n boules jaunes, n étant un entier naturel et 5 boules vertes. On tire au hasard, successivement et avec remise, deux boules de l'urne.

- Si les deux boules tirées sont jaunes, on perd 5 euros,
- Si les deux boules tirées sont vertes, on gagne 10 euros,
- Sinon, on gagne 5 euros.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique obtenu par le joueur.

1. Construire un arbre pondéré résumant la situation.

2. Donner la loi de probabilité de X en fonction du paramètre n.
   Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X en fonction de n.

3. Comment doit-on choisir n pour que l'espérance de gain soit positive. Interpréter.

Tirages successifs sans remise

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel. Le joueur tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

- Pour chaque boule blanche tirée, le joueur gagne 2 euros,
- Pour chaque boule rouge tirée, le joueur perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

1. Construire un arbre pondéré résumant la situation.

2. Déterminer la loi de probabilité de X en fonction n.
   Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X en fonction de n.

3. Pour quelles valeurs de n l'espérance de gain est-elle positive ? Interpréter.

Tirages successifs sans remise, encore…

Une urne contient n boules n étant un entier naturel : 10 boules sont jaunes et les autres sont rouges. On tire successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

- Si les deux boules tirées sont jaunes, on gagne 100 euros,
- Si les deux boules tirées sont rouges, on perd 10 euros,
- Sinon on ne gagne pas ni ne perd d'argent.

On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X en fonction du paramètre n.

2. Pour quelles valeurs de n l'espérance de gain est-elle positive ? Interpréter.

La formule de König Huygens

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

On rappelle que l'espérance se calcule de la manière suivante :

- $E(X)=m=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n$

On rappelle également que la variance se calcule de la manière suivante :

- $V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-m)^2 = p_1(x_1-m)^2+p_2(x_2-m)^2+\ldots+p_n(x_n-m)^2$

En développant les termes $(x_i-m)^2$, démontrer l'égalité suivante :

- $V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2-m^2 = p_1x_1^2+p_2x_2^2+\ldots+p_nx_n^2-m^2$

Cette égalité (appelée formule de König Huygens) permet d'affirmer que la variance (qui est par définition, la moyenne des carrés des écarts à la moyenne) peut également se calculer comme la différence entre la moyenne des carrés des valeurs et le carré de la moyenne.

Application directe de la formule

Devoir 1 : 8, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13, 14.
Devoir 2 : 3, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 13, 15, 15, 15, 17, 20.

On note X la variable aléatoire correspondant aux notes obtenues sur le devoir 1.
On note Y la variable aléatoire correspondant aux notes obtenues sur le devoir 2.
Calculer $E(X)$ et $E(Y)$. Calculer ensuite $V(X)$ et $V(Y)$ à l'aide de la formule de König Huygens présentée et démontrée ci-dessus. Comparer avec les résultats obtenus en page 1.

Application directe de la formule, encore…

Xavier et Yves s'affrontent en vue d'une sélection lors d'une épreuve comportant 20 tirs sur cible.

Xavier : **50 – 20 – 20 – 30 – 10 – 20 – 30 – 10 – 50 – 30 – 0 – 20 – 30 – 50 – 10 – 50 – 20 – 30 – 30 – 10**
Yves : **50 – 20 – 20 – 50 – 10 – 20 – 30 – 10 – 50 – 30 – 0 – 20 – 0 – 50 – 10 – 50 – 20 – 50 – 30 – 0**

On note X la variable aléatoire correspondant aux points obtenus par Xavier.
On note Y la variable aléatoire correspondant aux points obtenus par Yves.
Calculer $E(X)$ et $E(Y)$. Calculer ensuite $V(X)$ et $V(Y)$ à l'aide de la formule de König Huygens présentée et démontrée ci-dessus. Comparer avec les résultats obtenus en page 1.

Propriétés de l'espérance

Une situation pour comprendre

Une entreprise compte 100 employés. Le tableau ci-dessous donne la répartition des salaires.

Salaire en euros	1 550	1 750	2 200	3 000
Nombre de personnes	40	35	24	1

Le directeur prend au hasard le bulletin de salaire d'un de ses employés. On note X la variable aléatoire correspondant au salaire de cet employé. Calculer l'espérance $E(X)$.

1. Le directeur décide d'augmenter tous les salaires de 10 euros. Que devient l'espérance ?
2. Le directeur décide d'augmenter tous les salaires de 2%. Que devient l'espérance ?

Vos résultats seront validés par la détermination de la loi de probabilité puis le calcul de l'espérance de deux nouvelles variables aléatoires Y et Z associées à la variable aléatoire X par deux relations simples que vous déterminerez.

Une autre situation pour comprendre

On donne la loi de probabilité de la variable aléatoire C correspondant aux températures d'une région exprimées en degrés Celsius.

x_i	-1	3	5	10
$p(X = x_i)$	0,5	0,32	0,16	0,02

On rappelle que la relation permettant de transformer des degrés Celsius en degrés Fahrenheit est : $F = 1{,}8 \times C + 32$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire F correspondant à la conversion des températures en Fahrenheit. Comparer les espérances de ces deux variables.

Une généralisation pour démontrer

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Valeurs	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Probabilités	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

On considère la variable aléatoire Y reliée à la variable aléatoire X par la relation $Y = a \times X + b$ et on donne ci-dessous la loi de probabilité de cette nouvelle variable aléatoire.

Valeurs	$a \times x_1 + b$	$a \times x_2 + b$	$\cdots$	$a \times x_n + b$
Probabilités	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Démontrer, en détaillant tous les calculs, la relation suivante : $E(a \times X + b) = a \times E(X) + b$.

Propriétés de la variance

Une situation pour une première conjecture

On considère ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X. Calculer $E(X)$, $V(X)$.

x_i	0	3	8	200
$p(X=x_i)$	0,4	0,3	0,2	0,1

On s'intéresse à variable aléatoire $Z = X+10$. Sauriez-vous déterminer la loi de probabilité de cette nouvelle variable aléatoire ? Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$. Proposez un commentaire.

Rappeler la relation entre $E(X+b)$ et $E(X)$ pour tout nombre réel b.
Conjecturer la relation entre $V(X+b)$ et $V(X)$ pour tout nombre réel b.

Une autre situation pour une deuxième conjecture

On considère ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire Y. Calculer $E(Y)$, $V(Y)$.

y_i	-4	5	10	100
$p(Y=y_i)$	0,25	0,2	0,4	0,15

On s'intéresse à variable aléatoire $Z = 2\times Y$. Sauriez-vous déterminer la loi de probabilité de cette nouvelle variable aléatoire ? Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$. Proposez un commentaire.

Rappeler la relation entre $E(a\times X)$ et $E(X)$ pour tout nombre réel a.
Conjecturer la relation entre $V(a\times Y)$ et $V(Y)$ pour tout nombre réel a.

Une généralisation pour démontrer

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par :

x_i	x_1	x_2	•••	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	•••	p_n

Montrer que $V(a\times X) = a^2\times V(X)$ et que $V(X+b)=V(X)$ pour tout nombre réel a et b.

Exercice 1

Lors des journées classées « rouges » selon Bison Futé, l'autoroute qui relie Paris à Marseille est surchargée. Bison Futé a publié les résultats d'une étude portant sur les habitudes des automobilistes sur le trajet Paris Marseille lors de ces journées « rouges ». Il s'avère que :

- 40% des automobilistes prennent l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence,
- Parmi les automobilistes ayant suivi l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence, 30% prennent la route départementale de Valence à Marseille,
- Parmi les automobilistes n'ayant pas suivi l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence, 60% prennent la route départementale entre Valence et Marseille.

On donne les temps de parcours estimés lors de ces journées classées « rouge ».

- Paris/Beaune par autoroute : 4 heures,
- Beaune/Valence par autoroute : 5 heures,
- Beaune/Valence par itinéraire de délestage : 4 heures,
- Valence/Marseille par autoroute : 5 heures,
- Valence/Marseille par la route départementale : 3 heures.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire égale à la durée du trajet pour se rendre de Paris à Marseille. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire et en donner une interprétation.

Exercice 2

Un magazine est proposé sous deux versions, l'une papier, l'autre numérique. L'éditeur a chargé une plateforme d'appels de démarcher une liste de clients potentiels. Le centre d'appel contacte une personne au hasard sur cette liste. Une étude a montré que :

- La probabilité qu'une personne contactée s'abonne à la version papier est égale à 0,18
- La probabilité qu'une personne contactée s'abonne à la version numérique est égale à 0,22
- La probabilité qu'une personne contactée ne s'abonne à aucune des deux est égale à 0,63

Pour chacune des personnes appelées par le centre, l'éditeur paie au centre d'appels :

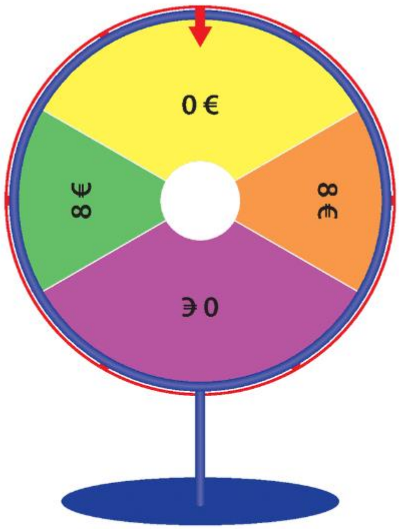
- 1 euro si la personne ne s'abonne pas,
- 5 euros si la personne s'abonne seulement à la version numérique,
- 6 euros si la personne s'abonne seulement à la version papier,
- 10 euros si la personne s'abonne aux deux versions.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire indiquant la somme reçue par la plateforme d'appels pour une personne contactée. Estimer la somme perçue par la plateforme si elle parvient à contacter 10000 clients potentiels.

Exercice 3

Lors du lancer de deux dés cubiques équilibrés, un joueur gagne la valeur absolue de la différence entre les résultats des deux dés. Quelle somme le jouer doit-il miser au départ pour que ce jeu soit qualifié d'équitable ? Justifier de manière précise et détaillée votre réponse.

Exercice 4



La roulette proposée ci-contre contient 4 secteurs angulaires. Les deux secteurs « 0 € » mesurent 120° chacun tandis que les deux secteurs « 8 € » mesurent 60° chacun. On estime que la probabilité de tomber sur chacun de ces 4 secteurs est proportionnelle à la mesure de l'angle formé par le secteur.

Pour jouer, on mise m euros, la mise étant automatiquement perdue. Elle donne le droit au joueur de tourner la roue une fois. Le joueur gagne la somme indiquée sur le secteur angulaire obtenu. On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Déterminer la valeur de la mise m rendant ce jeu équitable. Arrondir au centime près.

3. Reprendre l'intégralité de l'exercice si la mise permet de tourner la roue deux fois de suite et si la variable aléatoire X correspond à la somme des deux résultats successifs obtenus.

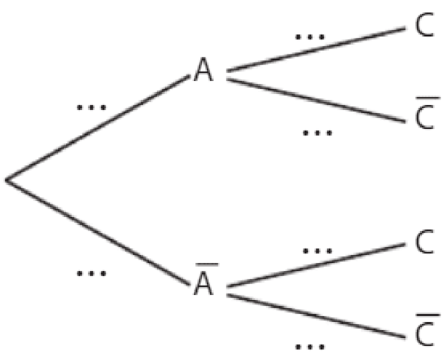
Exercice 5

Un commerçant propose en promotion un modèle d'appareil photo numérique et un modèle de carte mémoire compatible avec cet appareil. Il a constaté, lors d'une précédente promotion, que :

- 20% des clients achètent l'appareil photo numérique en promotion,

- 70% des clients qui achètent l'appareil en promotion achètent aussi la carte mémoire,

- 25% des clients qui n'achètent pas l'appareil photo numérique en promotion achètent quand même la carte mémoire.



On note A l'événement « le client achète l'appareil photo en promotion » et C l'événement « le client achète la carte mémoire en promotion ». Le commerçant sait qu'il réalise un bénéfice de 30€ sur chaque appareil photo numérique en promotion vendu et il sait qu'il réalise un bénéfice de 4€ sur chaque carte mémoire compatible en promotion vendue. On note B la variable aléatoire correspond au bénéfice réalisé par le commerçant au cours de cette opération promotionnelle.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré des probabilités modélisant la situation décrite.

2. Déterminer la loi de probabilité de B.

3. Pour 100 clients entrant dans son magasin, quel bénéfice le commerçant peut-il espérer obtenir ?

Bénéfice par client en euros	0	...	...	...
Probabilité d'atteindre le bénéfice	0,6	...	...	...

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	x_3
p_i	p_1	p_2	p_3

On rappelle que l'espérance se calcule de la manière suivante : $E(X) = m = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$.

1. En faisant apparaitre sur votre copie <u>les détails des différentes étapes du raisonnement</u>, démontrer que, pour tout réel a et b, on a l'égalité suivante : $E(aX+b) = aE(X)+b$. Cette égalité s'appelle la propriété de linéarité de l'espérance.

On rappelle que la variance se calcule ainsi : $V(X) = p_1(x_1-m)^2 + p_2(x_2-m)^2 + p_3(x_3-m)^2$.

2. En faisant apparaitre sur votre copie <u>les détails des différentes étapes du raisonnement</u>, démontrer l'égalité suivante : $V(X) = p_1x_1{}^2 + p_2x_2{}^2 + p_3x_3{}^2 - m^2$. Cette égalité s'appelle la formule de de König Huygens.

Exercice 7

Le premier tableau donne la loi de probabilité de la variable aléatoire X résumant l'évolution, en euros, du cours d'une action A, le deuxième tableau donne la loi de probabilité de la variable aléatoire Y résumant l'évolution, en euros, du cours d'une action B.

Valeurs de X	-50	0	10	40
Probabilités	0,1	0,3	0,5	0,1

Calculer E(X) et E(Y). L'espérance permet-elle de déterminer quelle est l'action la plus intéressante ?

Calculer V(X) et V(Y). Un trader ne souhaite pas trop prendre de risques et décide d'investir sur l'action la moins volatile : quelle action lui conseillez-vous ?

Valeurs de Y	-30	10	30
Probabilités	0,3	0,4	0,3

Exercice 8

Les deux tableaux proposés ci-dessous donnent les lois de probabilité d'une variable aléatoire X et d'une variable aléatoire Y représentant le cours de deux actions A et B <u>exprimé en euros</u>.

1. Calculer E(X) et E(Y). L'espérance permet-elle de différencier ces deux actions ?
   Calculer V(X) et V(Y). On souhaite choisir l'action la moins volatile. Laquelle choisir ?

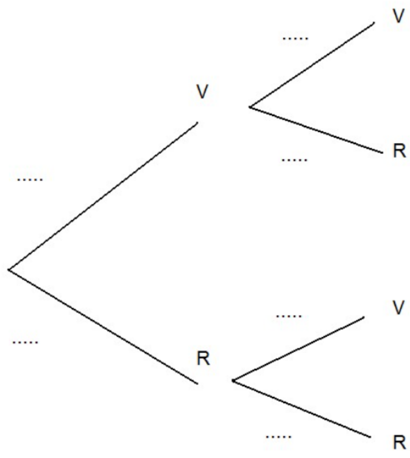
2. Lors de la conversion euro/dollar on applique le taux de change 1 euro = 1,10 dollar sur la valeur de l'action. Recalculer l'espérance et la variance de X et de Y exprimés en dollars.

x_i	-8	0	8	20
$p(X=x_i)$	0,25	0,25	0,25	0,25

y_i	-20	-12	-2	10	15
$p(Y=y_i)$	0,1	0,1	0,15	0,25	0,4

Exercice 9

On dispose dans une urne n boules vertes et 9 boules rouges. On pioche successivement et AVEC remise deux boules de cette urne. A chaque boule verte piochée on gagne 2,50 € tandis que à chaque boule rouge piochée on perd 1,5 €. On note X le gain algébrique du joueur.



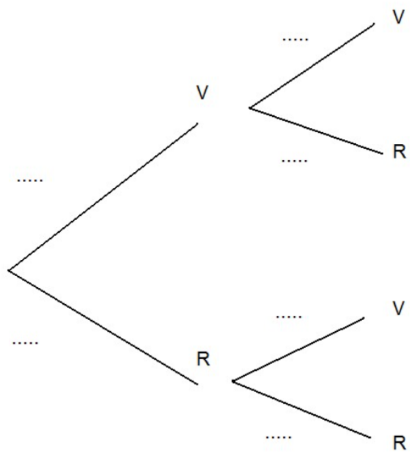
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré proposé ci-contre résumant la situation décrite.

2. Déterminer la loi de probabilité de X, calculer son espérance en fonction de n et étudier son signe.

3. Combien de boules vertes doit-on mettre pour que le jeu soit favorable au joueur ?

Exercice 9bis

On dispose dans une urne n boules vertes et 9 boules rouges. On pioche successivement et SANS remise deux boules de cette urne. A chaque boule verte piochée on gagne 2,50 € tandis que à chaque boule rouge piochée on perd 1,5 €. On note Y le gain algébrique du joueur.



1. Recopier et compléter l'arbre pondéré proposé ci-contre résumant la situation décrite.

2. Déterminer la loi de probabilité de Y, calculer son espérance en fonction de n et étudier son signe.

3. Combien de boules vertes doit-on mettre pour que le jeu soit favorable au joueur ?

Exercice 10

On considère une urne dans laquelle on dispose n boules blanches et 7 boules rouges. On pioche successivement et AVEC remise deux boules de cette urne. A chaque boule blanche piochée on gagne 10 euros tandis que à chaque boule rouge piochée on perd 5 euros. On note X le gain algébrique du joueur et on souhaite déterminer le nombre de boules blanches que l'on doit mettre dans cette urne pour que le jeu soit favorable au joueur. Après avoir dressé un arbre pondéré résumant la situation, déterminer la loi de probabilité de X, calculer son espérance en fonction de n et étudier son signe à l'aide de vos connaissances sur le second degré.

Exercice 10bis

On considère une urne dans laquelle on dispose 7 boules blanches et n boules rouges. On pioche successivement et SANS remise deux boules de cette urne. A chaque boule blanche piochée on gagne 10 euros tandis que à chaque boule rouge piochée on perd 5 euros. On note Y le gain algébrique du joueur et on souhaite déterminer le nombre de boules rouges que l'on doit mettre dans cette urne pour que le jeu soit favorable au joueur. Après avoir dressé un arbre pondéré résumant la situation, déterminer la loi de probabilité de Y, calculer son espérance en fonction de n et étudier son signe à l'aide de vos connaissances sur le second degré.