

Exercice 1

Une urne contient n jetons $n \geq 9$ indiscernables au toucher dont sept sont noirs et les autres blancs. On tire successivement et sans remise deux jetons de cette urne.

1. Dans cette question on suppose que $n = 10$. Calculer les probabilités des événements suivants. A = « les deux jetons sont blancs ». B = « les deux jetons sont de la même couleur ». C = « les deux jetons sont de couleurs différentes ».
2. On suppose maintenant que n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à neuf. On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de couleurs différentes lors d'un tirage. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X en fonction de n . Calculer l'espérance de la variable aléatoire X en fonction de n . Déterminer n afin que l'espérance soit maximale.

Exercice 2

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à deux. On fait tirer à un joueur des boules dans l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, le joueur gagne 2 euros. Pour chaque boule rouge tirée, le joueur perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

1. Démontrer que $p(X = -1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}$.
2. Déterminer en fonction n la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
3. Démontrer que $E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}$.
4. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance est strictement positive.

Exercice 3

Lors des journées classées « rouges » selon Bison Futé, l'autoroute qui relie Paris à Marseille est surchargée. Bison Futé a publié les résultats d'une étude portant sur les habitudes des automobilistes sur le trajet Paris Marseille lors de ces journées « rouges ». Il s'avère que :

- 40% des automobilistes prennent l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence,
- Parmi les automobilistes ayant suivi l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence, 30% prennent la route départementale de Valence à Marseille,
- Parmi les automobilistes n'ayant pas suivi l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence, 60% prennent la route départementale entre Valence et Marseille.

On note B l'événement « l'automobiliste prend l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence » et V l'événement « l'automobiliste prend la route départementale entre Valence et Marseille ».

1. Montrer que $p(\overline{B} \cap \overline{V}) = 0,24$ et interpréter ce résultat.
2. Calculer la probabilité que l'automobiliste ne choisisse pas la route départementale entre Valence et Marseille.

On donne les temps de parcours. Paris/Beaune par autoroute : 4 heures, Beaune/Valence par autoroute : 5 heures, Beaune/Valence par itinéraire de délestage : 4 heures, Valence/Marseille par autoroute : 5 heures, Valence/Marseille par itinéraire de délestage : 3 heures.

3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire égale à la durée du trajet exprimée en heures pour se rendre de Paris à Marseille selon l'itinéraire choisi. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire et en donner une interprétation.

Exercice 4

Un magazine est proposé sous deux versions, l'une papier, l'autre numérique. L'éditeur a chargé une plateforme d'appels de démarcher une liste de clients potentiels. Le centre d'appel contacte une personne au hasard sur cette liste. On considère les événements $P = \ll \text{la personne contactée s'abonne à la version papier} \gg$ et $N = \ll \text{la personne contactée s'abonne à la version numérique} \gg$.

Une étude a montré que :

- La probabilité qu'une personne contactée s'abonne à la version papier est égale à 0,18
- La probabilité qu'une personne contactée s'abonne à la version numérique est égale à 0,22
- La probabilité qu'une personne contactée ne s'abonne à aucune des deux est égale à 0,83

Pour chacune des personnes appelées par le centre, l'éditeur paie au centre d'appels :

- 1 euro si la personne ne s'abonne pas,
- 5 euros si la personne s'abonne seulement à la version numérique,
- 6 euros si la personne s'abonne seulement à la version papier,
- 10 euros si la personne s'abonne aux deux versions.

On appelle S la variable aléatoire indiquant la somme reçue par la plateforme d'appels pour une personne contactée. Déterminer la loi de probabilité de S . Donner une estimation de la somme perçue par la plateforme si elle parvient à contacter 10000 clients potentiels.

Exercice 5

Lors du lancer de deux dés cubiques équilibrés, un joueur gagne la valeur absolue de la différence entre les résultats des deux dés. Quelle somme le joueur doit-il miser au départ pour que ce jeu soit qualifié d'équitable ? Justifier de manière précise et détaillée votre réponse.

Un jeu consiste à tirer une carte parmi quatre cartes bleues numérotées 0, 1, 2, 3 et une carte parmi 4 cartes rouges numérotées 1, 2, 3, 4. Le joueur gagne 2 euros si le produit de deux résultats est inférieur à 5 et il gagne le produit des deux résultats lorsque celui-ci est supérieur à 5. A quel montant l'organisateur de ce jeu doit-il fixer la mise initiale du joueur pour que les 50 parties journalières qu'il réussit à proposer lui rapportent en moyenne 120 euros par jour ? Justifier de manière précise et détaillée votre réponse.