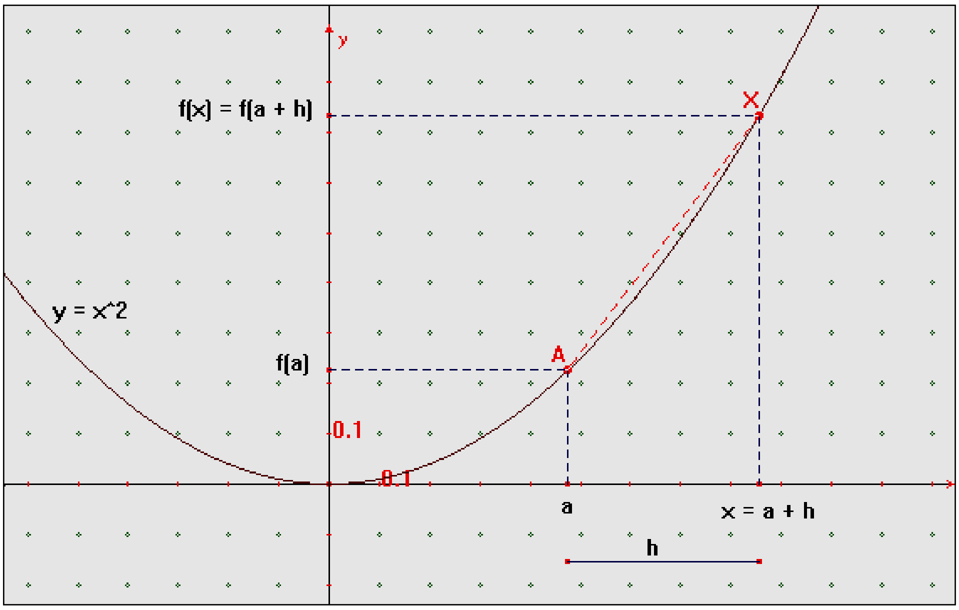


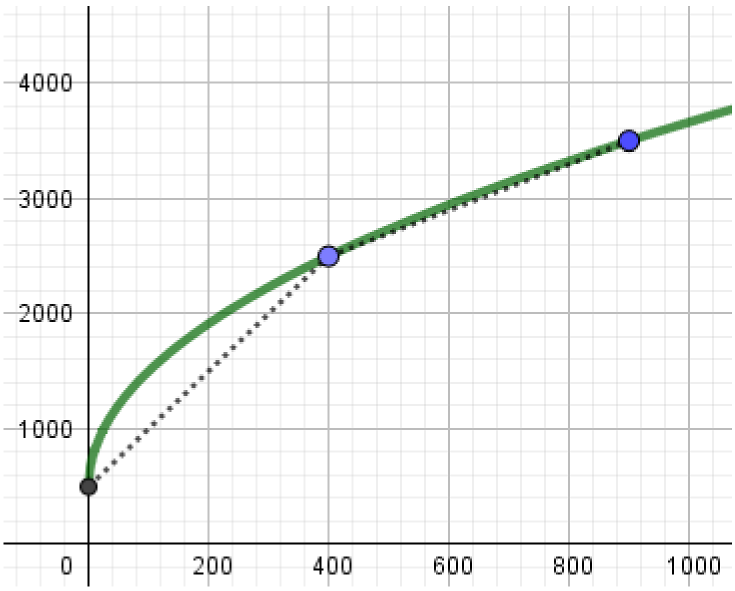
Le **taux de variation** d'un fonction f entre a et x est le nombre $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Le **taux de variation** d'une fonction f entre a et $a+h$ est le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

<u>En économie</u>

Une entreprise fabrique des pièces automobiles. Elle peut en produire jusqu'à 1000 par jour. Le coût de fabrication de ces pièces dépend du nombre de pièces fabriquées. On modélise le coût total de fabrication en euros pour x pièces fabriquées par la fonction $C(x)=100\sqrt{x}+500$.

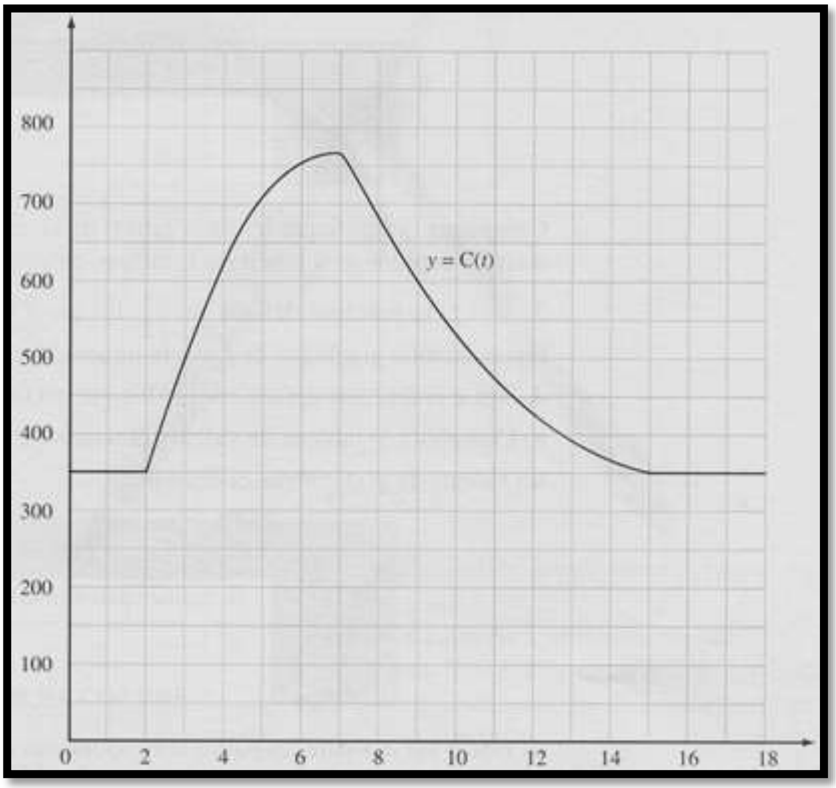
1. Quels sont les coûts fixes de cette entreprise ?
2. Déterminer le coût de fabrication pour 400 pièces produites, puis le coût de fabrication pour 900 pièces produites.
3. Déterminer le taux de variation du coût de fabrication entre 0 et 400 pièces fabriquées, puis le taux de variation du coût de fabrication entre 400 et 900 pièces produites.



4. En économie, on utilise un indicateur appelé coût marginal qui se définit comme le coût de fabrication d'une unité supplémentaire après avoir déjà fabriqué x unités. Calculer le coût marginal pour 200 pièces fabriquées, puis le coût marginal pour 800 pièces fabriquées. Arrondir au centime d'euro près et comparer ces deux valeurs.

En biologie

Au début de l'expérience la personne est placée pendant 2 minutes dans un bain chaud, puis dans un bain froid pendant 5 minutes avant d'être remise dans un bain chaud jusqu'à la fin de l'étude.



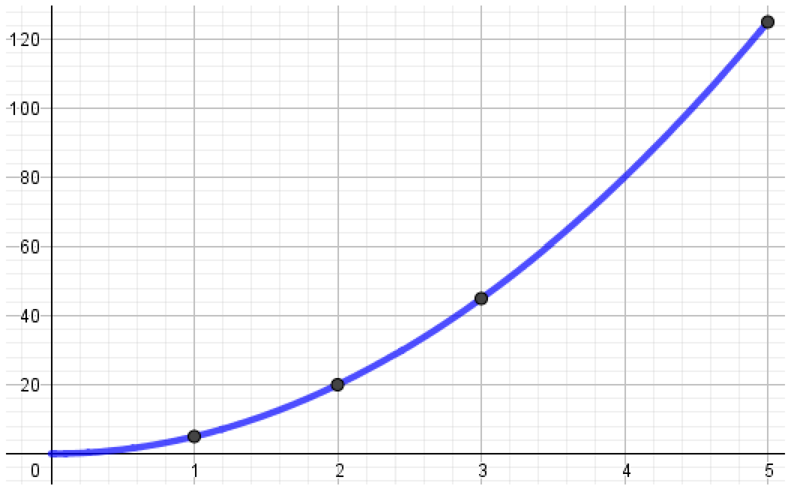
La courbe proposée ci-contre représente l'évolution de la consommation d'oxygène exprimée en millilitre par minute de cette personne en fonction du temps exprimé en minutes.

On indique que le maximum de la fonction est (7 ; 760).

Déterminer le taux de variation de la consommation d'oxygène entre le moment où la personne entre dans le bain froid et le moment où elle réintègre le bain chaud. Déterminer le taux de variation de la consommation d'oxygène entre le moment où la personne réintègre le bain chaud et le moment où elle retrouve sa consommation d'oxygène initiale. Interpréter les deux résultats.

En cinétique

On dit qu'un corps est en chute libre lorsqu'il est lâché sans vitesse initiale depuis un point et qu'il n'est soumis qu'à son poids (on néglige pour cela les frottements de l'air).



Le corps parcourt alors en t secondes une distance que l'on peut approcher par $d(t)=5t^2$ mètres.

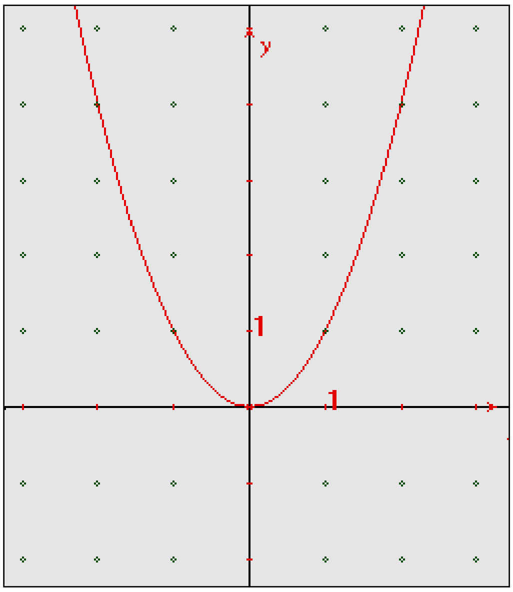
1. Calculer la vitesse moyenne entre les instants 1 et 5, puis entre les instants 1 et 3, puis entre les instants 1 et 2. Comment interpréter ces résultats sur le graphique ci-dessus ?

2. Soit h un réel non nul. Calculer la vitesse moyenne entre $t=1$ et $t=1+h$. On affirme que « la vitesse instantanée à l'instant $t=1$ est de 10 m/s ». Expliquer cette affirmation. En utilisant un raisonnement analogue, déterminer la vitesse instantanée à l'instant $t=3$.

Idée intuitive de la notion de tangente

On a représenté ci-contre la courbe représentative de la **fonction carrée**.

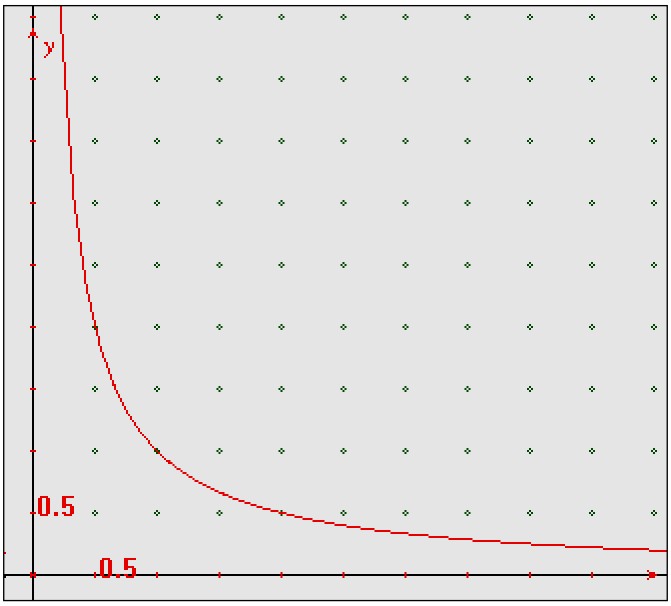
1. Placer A le point de la courbe d'abscisse $x=1$.
2. Tracer la droite d_1 passant par A et par $B(0;-1)$.
3. Tracer la droite d_2 d'équation $y=-2x+3$.
4. Tracer la droite d_3 passant par A et de coefficient directeur nul.
5. Tracer la droite d_4 passant par A et l'origine du repère.



6. Déterminer les équations des droites d_1, d_3 et d_4.
7. Parmi les droites tracées, déterminer celle qui répond à l'idée intuitive de tangente ?

On a représenté ci-contre une portion de la courbe représentative de la **fonction inverse**.

8. Placer A le point de la courbe d'abscisse $x=2$.
9. Tracer la droite d_1 passant par le point $B(0;1)$ et le point $C(4;0)$. Déterminer l'équation de cette droite.
10. La droite d_1 correspond-elle à l'idée intuitive de tangente ?

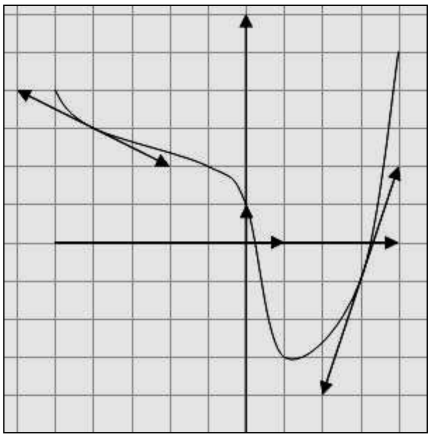


Définition du nombre dérivé

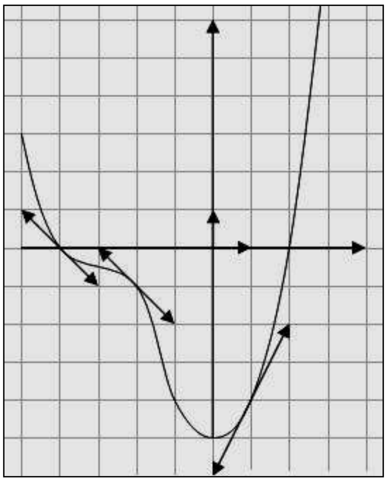
Le nombre dérivé d'une fonction en un point donné est le coefficient directeur de la tangente en ce point.

11. Déterminer le nombre dérivé de la fonction carrée au point d'abscisse $x=1$. Expliquer votre raisonnement.
12. Déterminer le nombre dérivé de la fonction inverse au point d'abscisse $x=2$. Expliquer votre raisonnement.

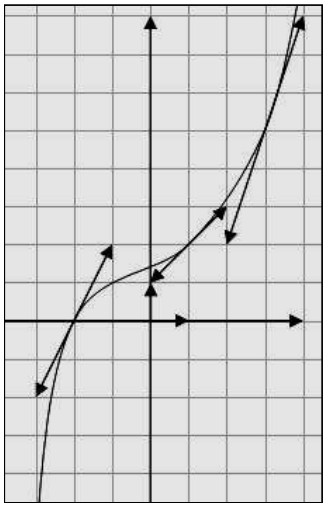
Tangentes et nombres dérivés



Fonction f



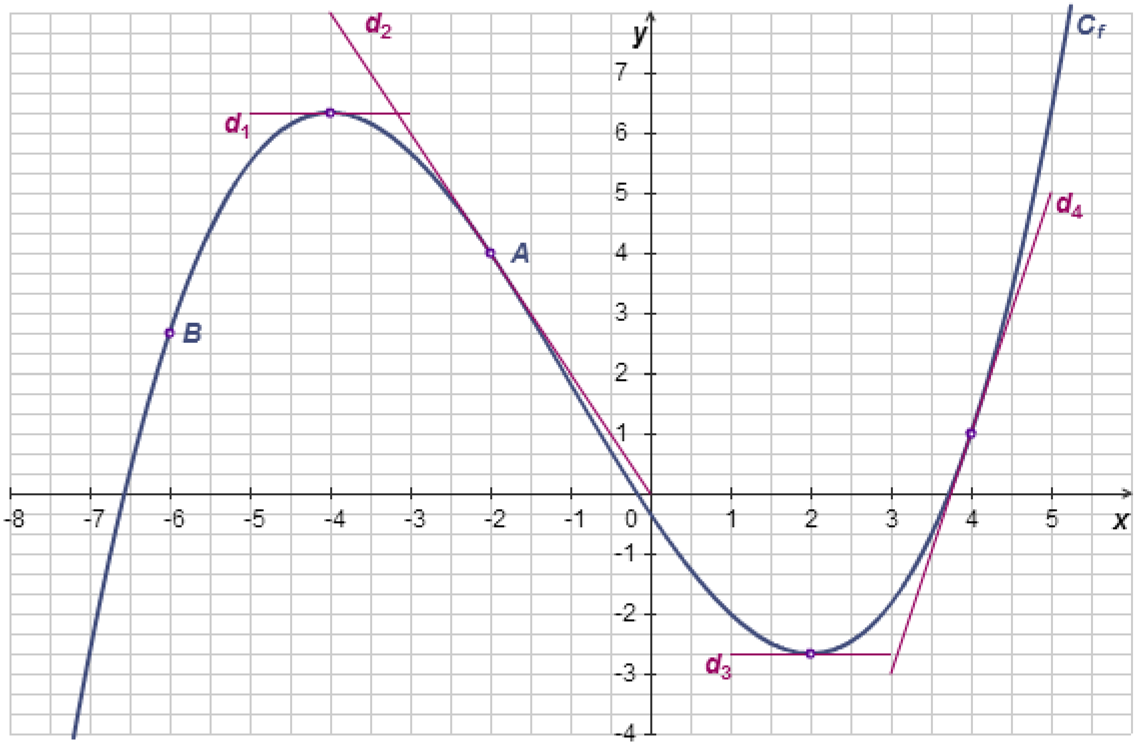
Fonction g



Fonction h

On a représenté ci-dessus les courbes représentatives de trois fonctions f, g et h et huit tangentes. Déterminer graphiquement les huit nombres dérivés suivants : $f'(-4)$, $f'(3)$, $g'(-4)$, $g'(-2)$, $g'(1)$, $h'(-2)$, $h'(1)$ et $h'(3)$. Aucune justification ni calcul n'est attendu.

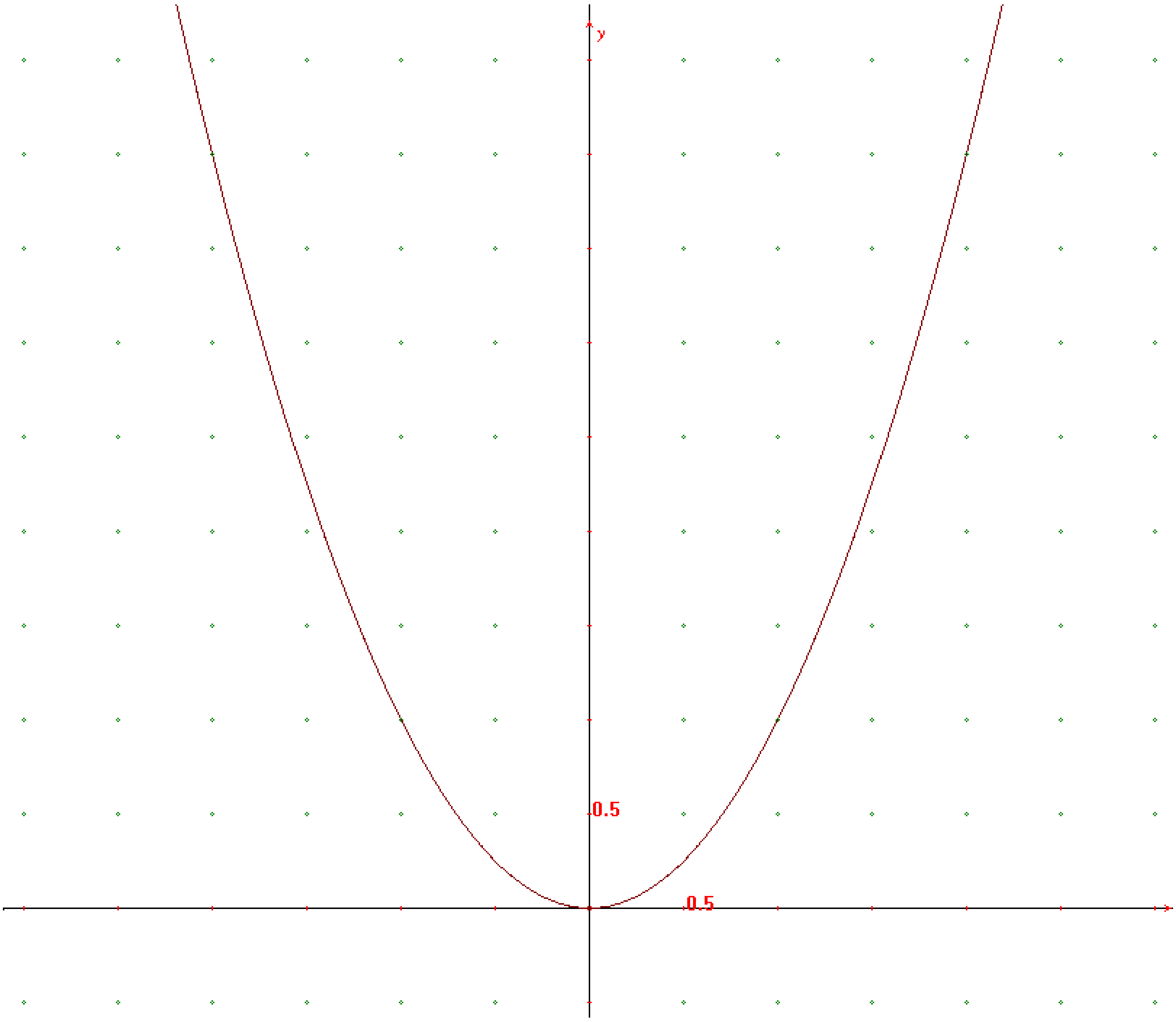
Tangentes, équations de droite et nombres dérivés



Que peut-on dire des droites (d1) et (d3) ? En déduire les nombres dérivés $f'(-4)$ et $f'(2)$. Sachant que (d2) passe par le point $A(-2;4)$ et l'origine du repère, déterminer l'équation de la droite (d2). En déduire $f'(-2)$. Sachant que (d4) passe par les points $(4;1)$ et $(5;5)$, déterminer l'équation de la droite (d4). En déduire $f'(4)$.

Nombre dérivé de la fonction carrée en un point

On considère la **fonction carrée** $f(x) = x^2$. On a tracé ci-dessous sa représentation graphique.



Travail algébrique

1. Calculer le taux de variation de la fonction carrée entre a et $a+h$.
   Simplifier l'écriture de cette expression.

2. Déterminer la limite de cette expression lorsque h tend vers 0.
   En déduire le nombre dérivé de la fonction carrée en a noté $f'(a)$.

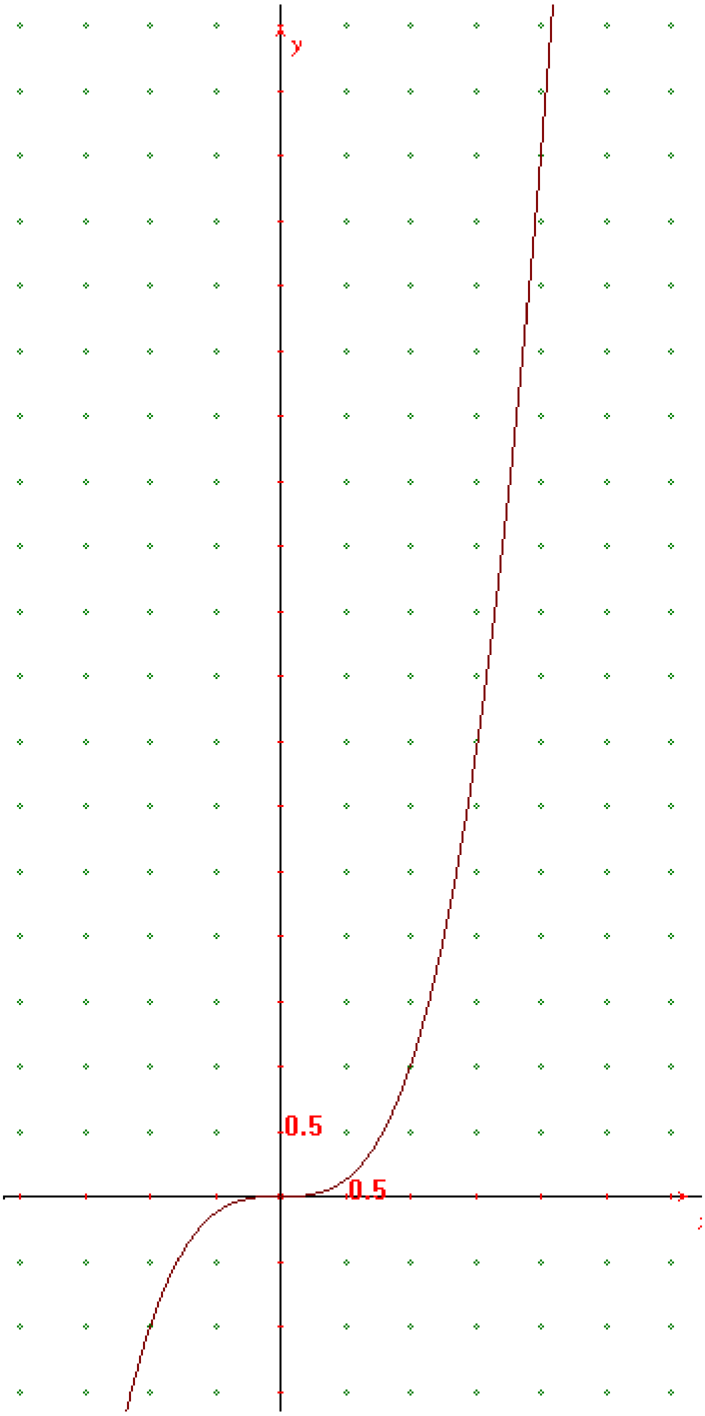
Travail graphique

3. Placer les points A, B, C, D et E de la courbe d'abscisses respectives –2, –1, 0, 1 et 2.

4. Déterminer les nombres dérivés de la fonction carrée en chacun de ces points.

5. Tracer de manière précise la tangente à la courbe en ces cinq points.

Nombre dérivé de la fonction cube en un point



On considère la **fonction cube** définie par $f(x)=x^3$. On a tracé ci-contre une partie de sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Soit a un réel quelconque désignant l'abscisse d'un point quelconque situé sur la courbe.

Travail algébrique

1. Calculer le taux de variation de la fonction entre a et $a+h$.
2. Déterminer l'expression simplifiée du taux de variation. Tous les détails de calcul seront indiqués.
3. Déterminer la limite de cette expression simplifiée lorsque h tend vers 0.
4. En déduire le nombre dérivé de la fonction cube en a noté $f'(a)$.

Travail graphique

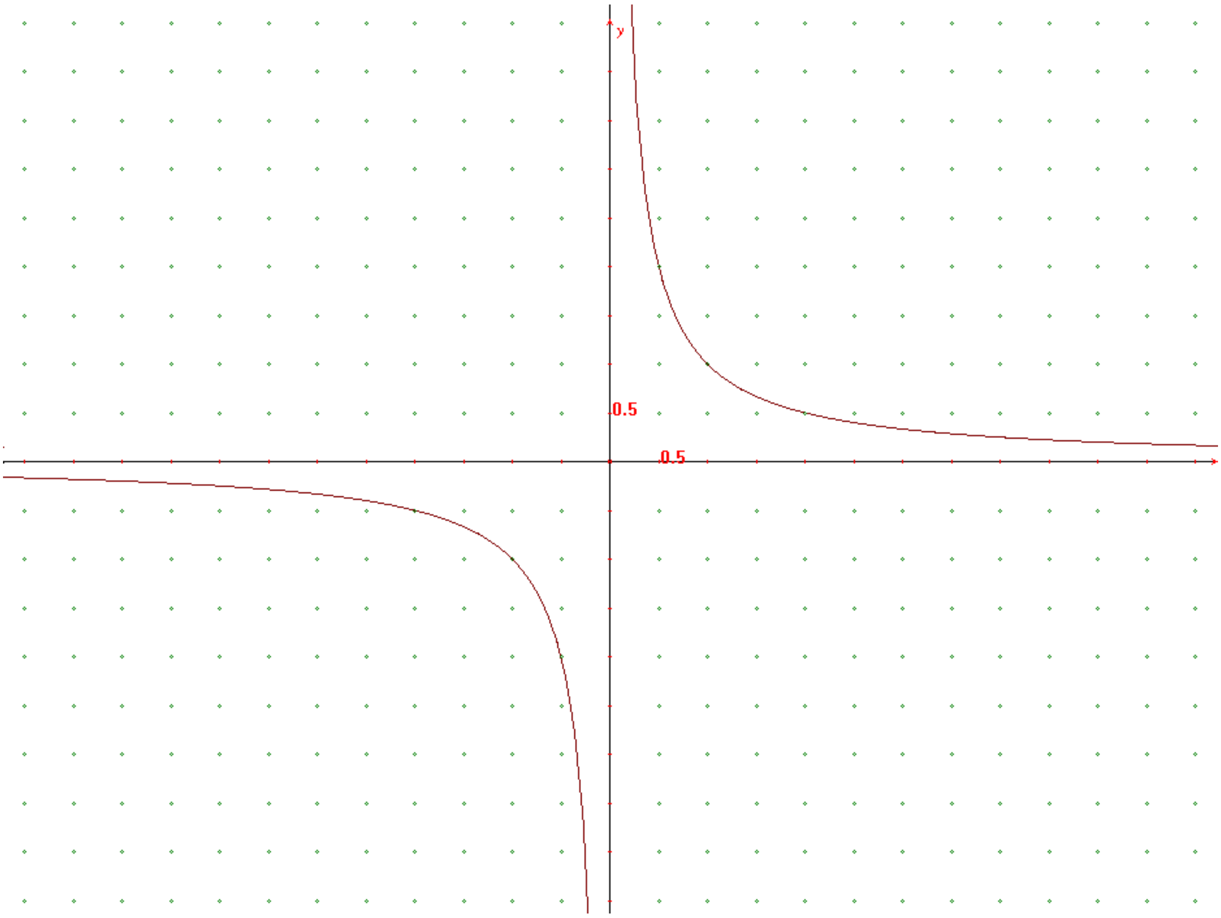
5. Placer sur le graphique les quatre points A, B, C et D de la courbe d'abscisses respectives -1, 0, 1 et 2.
6. Déterminer les nombres dérivés de la fonction cube en chacun de ces quatre points.
7. Tracer de manière précise les tangentes à la courbe en ces quatre points (vous utiliserez de la couleur et donnerez une longueur suffisante aux tangentes tracées pour que l'on sache évaluer la précision de vos tracés). Quelle remarque faites-vous sur le couple des tangentes T_A et T_C à la courbe respectivement aux points A et C.

Travail algébrique nécessaire pour simplifier le taux de variation

Démontrer que pour tout réel a et b on a l'égalité suivante : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Nombre dérivé de la fonction inverse en un point

On considère la **fonction inverse** $f(x)=\frac{1}{x}$. On tracé ci-dessous sa représentation graphique.



Dans la suite du travail proposé, on suppose que a est nombre réel non nul.

Travail algébrique

1. Calculer le taux de variation de la fonction inverse entre a et $a+h$.
   Simplifier l'écriture de cette expression.

2. Déterminer la limite de cette expression lorsque h tend vers 0.
   En déduire le nombre dérivé de la fonction inverse en a noté $f'(a)$.

Travail graphique

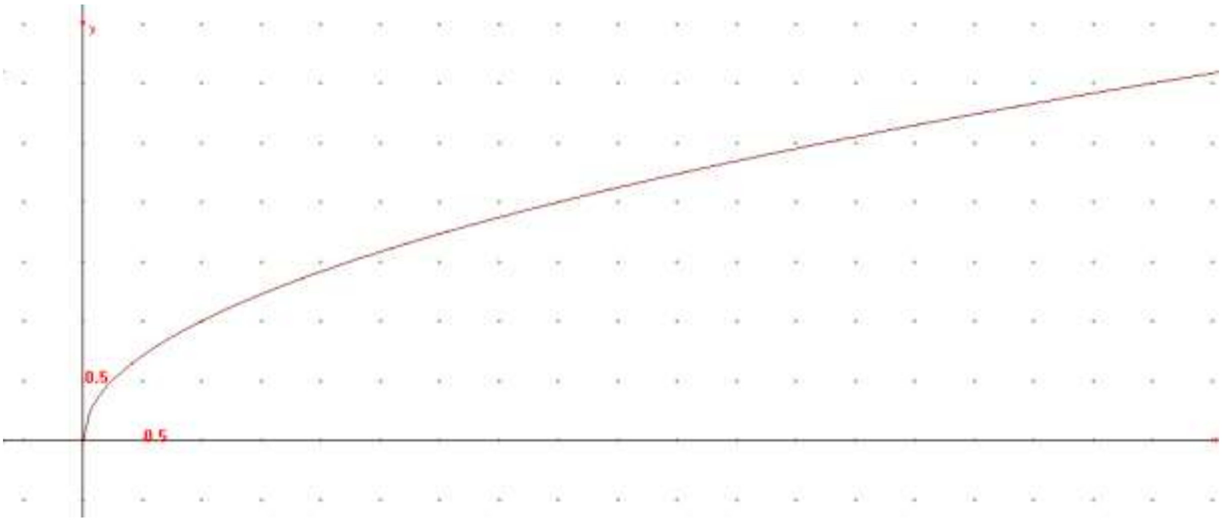
3. Placer sur le graphe les points A, B, et C de la courbe d'abscisses respectives –1, 0,5 et 2.

4. Déterminer les nombres dérivés de la fonction inverse en chacun de ces points.

5. Tracer de manière précise la tangente à la courbe en ces trois points.

Nombre dérivé de la fonction racine en un point

On considère la fonction racine $f(x)=\sqrt{x}$. On a tracé ci-dessous sa représentation graphique. Les points A, B, C et D sont les points de la courbe d'abscisses respectives 0, 1, 4 et 9.



Dans cette première partie du travail proposé, on suppose que a est un réel strictement positif.

Travail algébrique

1. Calculer le taux de variation de la fonction racine entre a et $a+h$.
   Simplifier l'écriture de cette expression*.

2. Déterminer la limite de cette expression lorsque h tend vers 0.
   En déduire le nombre dérivé de la fonction racine en a noté $f'(a)$.

(*) Lorsqu'on manipule des racines carrées, les simplifications d'expressions nécessitent le recours à la **quantité conjuguée**. La quantité conjuguée de $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ est $\sqrt{b}+\sqrt{a}$. On remarquera que le produit de ces deux quantités donne la relation suivante : $\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)=b-a$.

Travail graphique

3. Placer les points A, B et C de la courbe d'abscisses respectives 1, 4 et 9

4. Déterminer les nombres dérivés de la fonction racine en chacun de ces points.

5. Tracer de manière précise la tangente à la courbe en ces trois points.

Que se passe-t-il lorsque $a=0$?

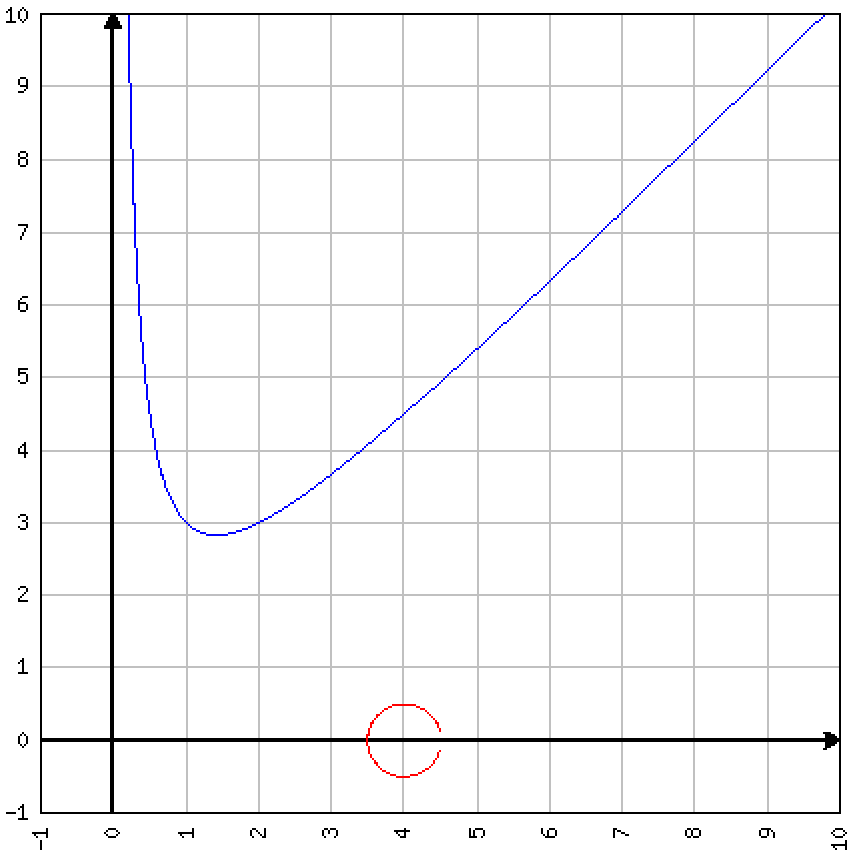
6. Point de vue algébrique : peut-on calculer le nombre dérivé de la fonction racine carrée au point de la courbe d'abscisse 0 ? Pourquoi ? Point de vue graphique : que peut-on dire du coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction racine carrée en ce point ?

Balistique

On a représenté ci-contre la trajectoire d'un avion qui effectue un « piqué » avant de reprendre de l'altitude. Sa trajectoire est décrite par la fonction suivante :

$$\boxed{f(x) = x + \frac{2}{x}}$$

Cet avion peut tirer des missiles selon les tangentes à sa trajectoire. Le but de l'exercice est de déterminer en quel point l'avion doit déclencher son tir pour « atteindre un objectif » situé au point de coordonnées $(4;0)$.



Conjecture

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique apporter une réponse à la question posée.

Le nombre dérivé de la fonction en a

1. Calculer le taux de variation de la fonction f entre a et $a+h$.
   Déterminer l'expression simplifiée du taux de variation.

2. Calculer la valeur limite de ce taux d'accroissement lorsque h tend vers 0.
   En déduire la valeur du nombre dérivé de la fonction f au point a.

Equation de la tangente au point d'abscisse a

On note $y = \alpha x + \beta$ l'équation de la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse a.

3. Quelle est l'ordonnée du point A ? Déterminer α. Déterminer β.
   En déduire, exprimée en fonction de a, l'équation de la tangente au point A.

Atteindre l'objectif

Pour atteindre l'objectif la tangente doit passer par le point de coordonnées $(4;0)$.

4. Déterminer une équation modélisant la situation.
5. Montrer que cette équation est équivalente à $a^2 + a - 2 = 0$ et la résoudre.
6. Répondre au problème et illustrer la réponse par le tracé d'une tangente à la courbe.

Monster' killer

Emettre une conjecture

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, vous proposerez la position de tir pour abattre le monstre 3.

Nombre dérivé de la fonction f en a

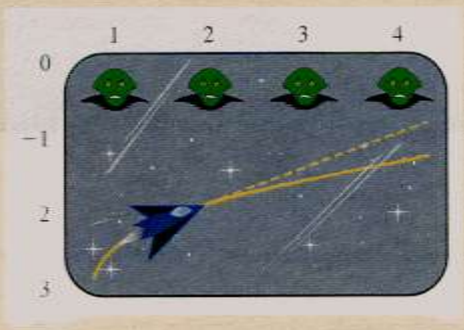
Dans tout le problème on notera f la fonction définie pour tout $x \neq 0$ par $f(x) = -1 - \dfrac{1}{x}$ et on considérera a un nombre réel strictement positif. Par un raisonnement précis et détaillé, déterminer la valeur du nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse a.

Equation de la tangente au point d'abscisse a

66 Monster' killer

(D'après Analyse, Swokowski, De Bœck Université.)

La figure ci-dessous représente un écran de jeu vidéo. Un avion remonte l'écran de gauche à droite en suivant la courbe d'équation $y = -1 - \dfrac{1}{x}$. L'avion peut tirer des missiles selon la tangente à sa trajectoire.



En quels points de sa trajectoire l'avion doit-il tirer ses missiles pour abattre successivement les quatre monstres situés en haut de l'écran en $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$ et $(4, 0)$?

On note $y = \alpha x + \beta$ l'équation de la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse a. Par un raisonnement précis et détaillé, déterminer, en fonction de a, l'équation de la tangente.

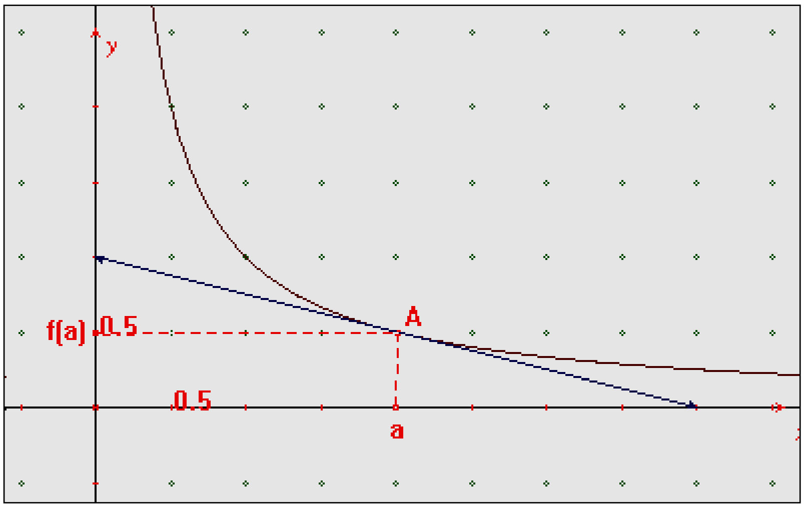
Abattre le monstre 3

« Pour abattre le monstre 3 la tangente doit passer par le point (3 ; 0) ». Déterminer une équation modélisant la situation. Montrer que cette équation est équivalente à $a^2 + 2a - 3 = 0$. Résoudre cette équation. Répondre au problème concernant le monstre 3. Illustrer la réponse par un dessin.

Attention démonstration !

On considère ci-contre la courbe représentative d'une fonction f. On a tracé la tangente (T) à la courbe au point A d'abscisse a. On souhaite démontrer que l'équation de la tangente (T) est de la forme :

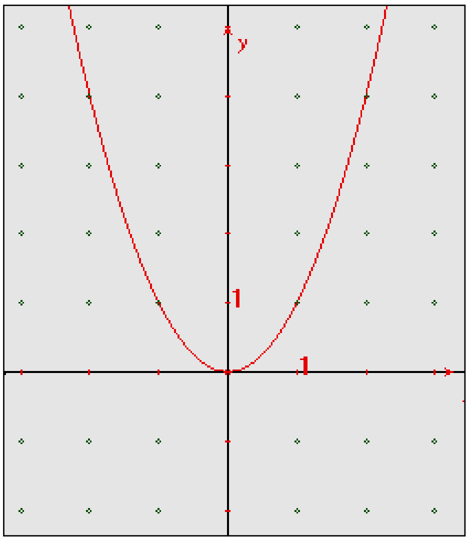
$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

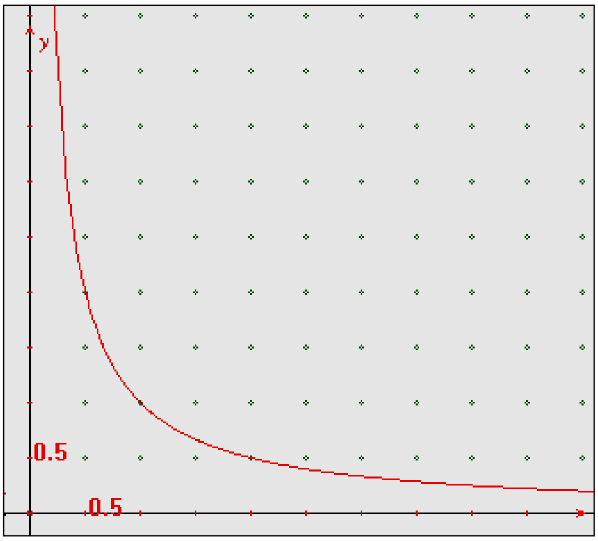


Pour cela on notera $y = \alpha x + \beta$ l'équation de la tangente (T) où α est le coefficient directeur et où β est l'ordonnée à l'origine. Expliquer pourquoi $\alpha = f'(a)$. Montrer ensuite que $\beta = f(a) - f'(a) \times a$. Conclure.

Application directe

Déterminer l'équation de la tangente à la fonction carrée au point d'abscisse 1 puis tracer cette tangente sur la figure de gauche proposée ci-dessous. Déterminer l'équation de la tangente à la fonction inverse au point d'abscisse 2 puis tracer cette tangente sur la figure de droite.

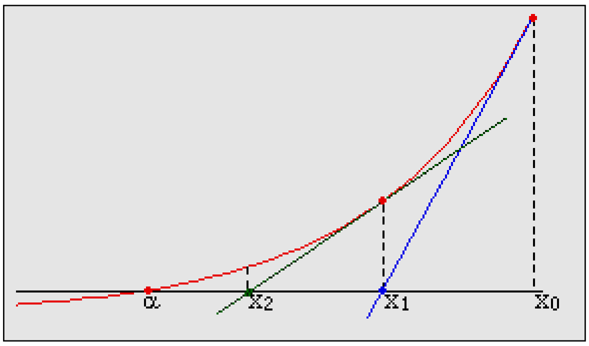




Méthode de Newton

Le schéma proposé ci-contre illustre le procédé mis en place par Newton pour déterminer une valeur approchée de la racine α d'une fonction : à partir d'un point d'abscisse x_0 de la courbe, on trace la tangente à la courbe qui coupe l'axe des abscisses en x_1, à partir du point d'abscisse x_1 de la courbe, on trace la tangente à la courbe qui coupe l'axe des abscisses en x_2, et on réitère cette opération afin de s'approcher de α …

Vocabulaire : on appelle racine d'une fonction une valeur pour laquelle la fonction s'annule.



On note $f(x)$ l'expression algébrique d'une fonction, $f'(x)$ l'expression algébrique de la dérivée de cette fonction, x_0 l'abscisse d'un point de la courbe, x_1 l'intersection de la tangente à la courbe en x_0 avec l'axe des abscisses, x_2 l'intersection de la tangente à la courbe en x_1 avec l'axe des abscisses, …, x_{n+1} l'intersection de la tangente à la courbe en x_n avec l'axe des abscisses.

- Sauriez-vous exprimer x_1 en fonction de x_0 ?
- Sauriez-vous exprimer x_2 en fonction de x_1 ?
- Sauriez-vous exprimer x_{n+1} en fonction de x_n ?
- On admettra que la suite x_n converge vers α …

Situation 1

Compléter le script proposé ci-contre afin qu'il affiche le nombre dérivé de la fonction carrée au point d'abscisse 3. Modifier ce script afin qu'il affiche le nombre dérivé de la fonction inverse au point d'abscisse 3

```
def f(x):
  return(x**2)

def nbederive(f,a):
  h=1e-10
  v=(...-...)/h
  return(v)

print(nbederive(f,3))
```

Situation 2

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2-2$ qui s'annule pour $x=\sqrt{2}$. On souhaite déterminer une valeur approchée de la racine de cette fonction à l'aide de la méthode de Newton proposée en page 10 des activités.

Compléter le script proposé ci-contre afin d'être en mesure de comparer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ après 10 itérations de la méthode de Newton et la valeur affichée par la commande « sqrt(2) ». Commenter…

```
from math import *

def f(x):
  return(x**2-2)

def nbederive(f,a):
  h=1e-10
  v=(...-...)/h
  return(v)

def newton(n):
  x=2
  for i in range(...):
    x=...
  return(x)

print(newton(10))
print(sqrt(2))
```

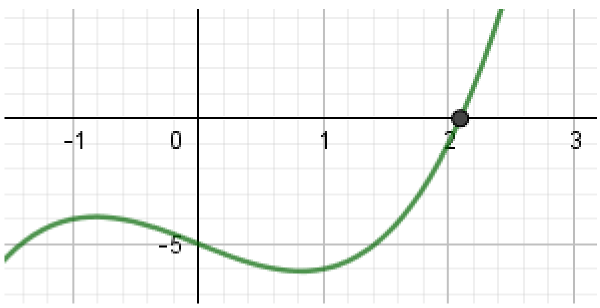
Situation 3

On reprend les données de la situation 2. Compléter les cellules d'un tableur afin de déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à l'aide de la méthode de Newton. Commenter les résultats obtenus en termes de vitesse de convergence.

	A	B	C	D
1	INDICE	ABSCISSE	IMAGE	NBE DERIVE
2	0	2	2	4
3	1	1,5	0,25	3
4	2	1,416666667	0,006944444	2,833333333
5	3	1,414215686	6,0073E-06	2,828431373
6	4	1,414213562	4,51061E-12	2,828427125

Situation 4

On considère la fonction définie par $f(x)=x^3-2x-5$. On s'intéresse à la racine de cette fonction, c'est-à-dire au nombre α tel que $f(\alpha)=0$. Compléter le script pour obtenir une valeur approchée de α par la méthode de Newton.




```
def f(x):
  return(...)

def fprime(x):
  h=...
  v=(...-...)/h
  return(...)

def newton(x,n):
  l=[]
  l.append(x)
  for i in range(1,n+1):
    x=l[i-1]
    l.append(...-.../...)
  return(...)

def affichage(l):
  n=len(l)
  for k in range(n):
    print("x{}={}".format(k,l[k]))

affichage(newton(1.5,5))
```