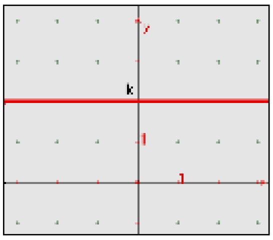
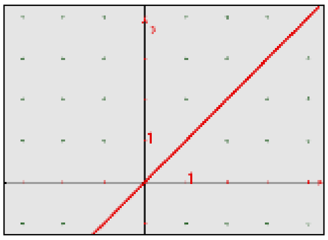
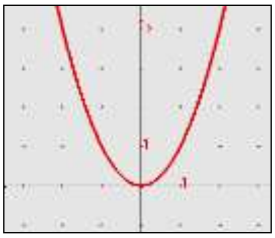
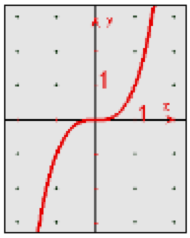
Nombre dérivé des fonctions usuelles

			
$f(x)=k$ $D=\mathbb{R}$	$f(x)=x$ $D=\mathbb{R}$	$f(x)=x^2$ $D=\mathbb{R}$	$f(x)=x^3$ $D=\mathbb{R}$

1. Rappeler la définition du nombre dérivé d'une fonction f au point d'abscisse a. Que représente graphiquement ce nombre ? Comment se note-t-il ?

2. Que peut-on dire du nombre dérivé d'une fonction constante ? Que peut-on dire du nombre dérivé de la fonction identité ? Quel est le nombre dérivé de la fonction carrée en a ? Quel est le nombre dérivé de la fonction cube en a ?

Opérations usuelles

3. On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2+x^3$. Il s'agit de la somme de la fonction carrée avec la fonction cube. Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en a. Quelle remarque peut-on faire ?

4. On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2-x$. Il s'agit de la différence entre la fonction carrée et la fonction identité. Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en a. Quelle remarque peut-on faire ?

5. On considère la fonction f définie par $f(x)=k\times x^2$ où k est une constante. Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en a. Quelle remarque peut-on faire ?

Tableau récapitulatif

6. Recopier et compléter le tableau suivant :

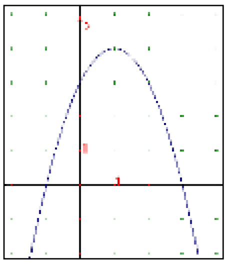
Dérivées des fonctions usuelles		*Opérations sur les dérivées*	
$\boxed{f(x)=k}$ Constante	?	$\boxed{f=u+v}$ Somme	?
$\boxed{f(x)=x}$ Identité	?	$\boxed{f=u-v}$ Différence	?
$\boxed{f(x)=x^n}$ Puissance n	?	$\boxed{f=k\times u}$ Produit par une constante	?

Situation 1

Calculer la dérivée et fresser le tableau de signe de la dérivée.

x	
f'(x)	

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$



Dresser le tableau de variation de la fonction à partir de sa représentation graphique.

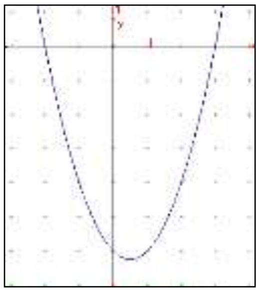
x	
f (x)	

Situation 2

Calculer la dérivée et dresser le tableau de signe de la dérivée.

x	
f'(x)	

$f(x) = x^2 - x - 6$



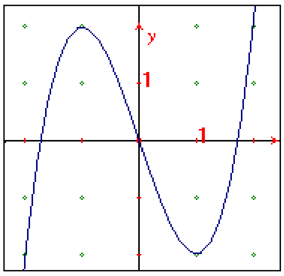
Dresser le tableau de variation de la fonction à partir de sa représentation graphique.

x	
f (x)	

Situation 3

Calculer la dérivée et dresser le tableau de signe de la dérivée de la fonction.

$f(x) = x^3 - 3x$



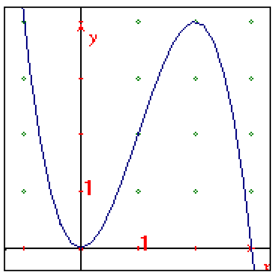
Dresser le tableau de variation de la fonction à partir de sa représentation graphique.

x	
f (x)	

Situation 4

Calculer la dérivée et dresser le tableau de signe de la dérivée de la fonction.

$f(x) = 3x^2 - x^3$



Dresser le tableau de variation de la fonction à partir de sa représentation graphique.

x	
f (x)	

Conclusion

- A partir des 4 situations étudiées à la page précédente, énoncer deux implications mathématiques entre le signe de la dérivée sur un intervalle et les variations de la fonction sur ce même intervalle. Enoncer ensuite une troisième implication entre l'annulation de la dérivée en un point et la nature de la tangente à la courbe en ce point.

- A l'issue de ce travail préciser les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction admette un extrémum en un point. Préciser les conditions nécessaires et suffisantes pour que cet extrémum soit un maximum. Préciser les conditions nécessaires et suffisantes pour que cet extrémum soit un minimum.

Etude de deux fonctions polynômes sur un intervalle

La fonction f est définie sur l'intervalle $I=[-1;3]$ par la formule : $f(x)=x^3-3x^2$.

1. Calculer la dérivée $f'(x)$. Montrer que $f'(x)=3x(x-2)$.
   Etudier, à l'aide d'un tableau, le signe de la dérivée.

2. En déduire les variations de la fonction
   Vous ferez figurer les valeurs aux extrémités des flèches de variations.

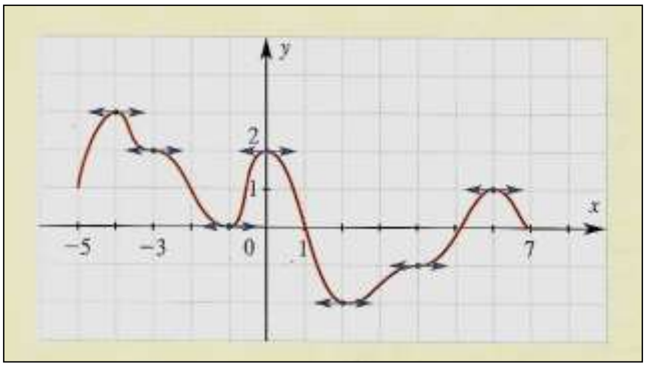
x			
$f'(x)$			
$f(x)$			

La fonction g est définie sur l'intervalle $I=[-2;2]$ par la formule : $g(x)=x-\frac{1}{3}x^3$.

1. Calculer la dérivée $g'(x)$. Montrer que $g'(x)=(1-x)(1+x)$.
   Etudier, à l'aide d'un tableau, le signe de la dérivée.

2. En déduire les variations de la fonction
   Vous ferez figurer les valeurs aux extrémités des flèches de variations.

x			
$g'(x)$			
$g(x)$			



On propose ci-dessus la courbe représentative d'une fonction.

Variations de la fonction et signe de la dérivée

1. Déterminer le signe de la dérivée et les variations de la fonction sur l'intervalle $[-5;7]$.

Majorant et minorant

2. La fonction est-elle majorée sur l'intervalle $[-5;7]$? Proposer un majorant de la fonction sur cet intervalle. Proposer un autre majorant. Quel est le plus petit des majorants ?

3. La fonction est-elle minorée sur l'intervalle $[-5;7]$? Proposer un minorant de la fonction sur cet intervalle. Proposer un autre minorant. Quel est le pus grand des minorants ?

4. La fonction est-elle bornée sur l'intervalle $[-5;7]$?

Maximum et minimum

5. Quel est le maximum de la fonction sur l'intervalle $[-5;7]$?

6. Quel est le minimum de la fonction sur l'intervalle $[-5;7]$?

Extremums locaux

1. Quels sont les maximums locaux de la fonction sur l'intervalle $[-5;7]$? Rappeler les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction admette un maximum local.

2. Quels sont les minimums locaux de la fonction sur l'intervalle $[-5;7]$? Rappeler les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction admette un minimum local.

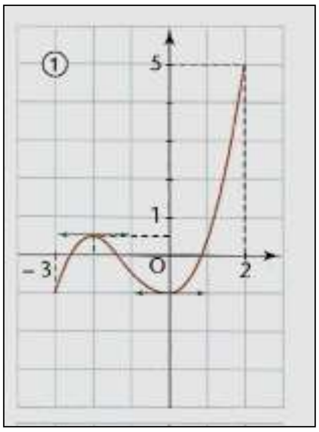
Recherche et caractérisation d'extrémums locaux

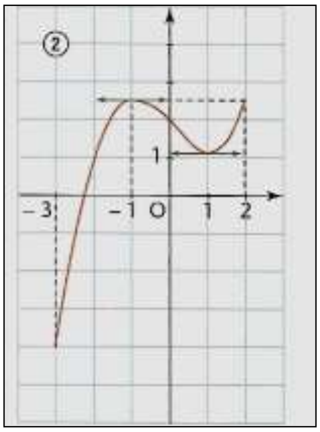
1. On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$. Etudier les variations de la fonction sur $\mathbb{R}$. Déterminer et caractériser les extremums locaux de la fonction.

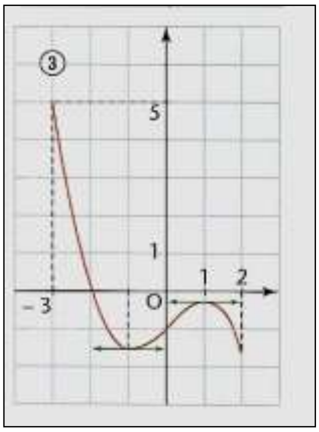
2. On considère la fonction g définie par $g(x) = 3x^4 - 4x^3$. Etudier les variations de la fonction sur $\mathbb{R}$. Déterminer et caractériser les extremums locaux de la fonction.

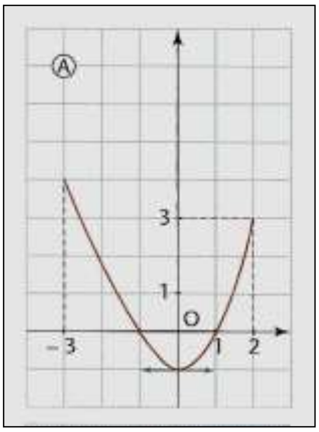
Associer une fonction à sa dérivée

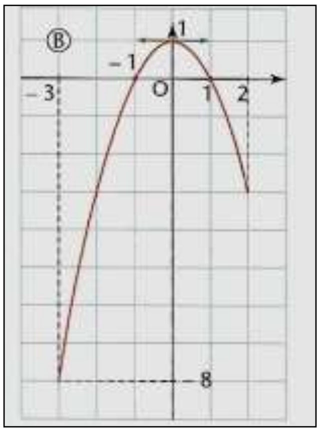
Les courbes 1, 2 et 3 sont les courbes représentatives de trois fonctions f, g et h et les courbes A, B et C représentent leurs fonctions dérivées f', g' et h'. Dresser les tableaux de variations des trois fonctions f, g et h. Dresser les tableaux de signe des trois courbes A, B et C. Associer à chaque fonction sa dérivée.

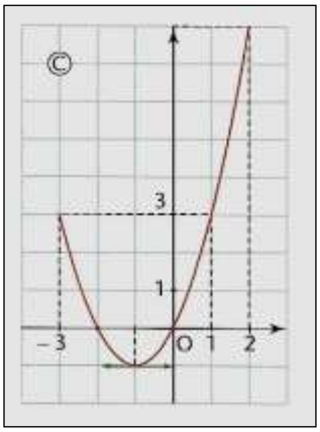




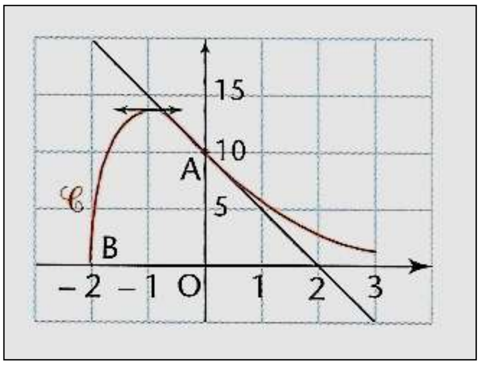


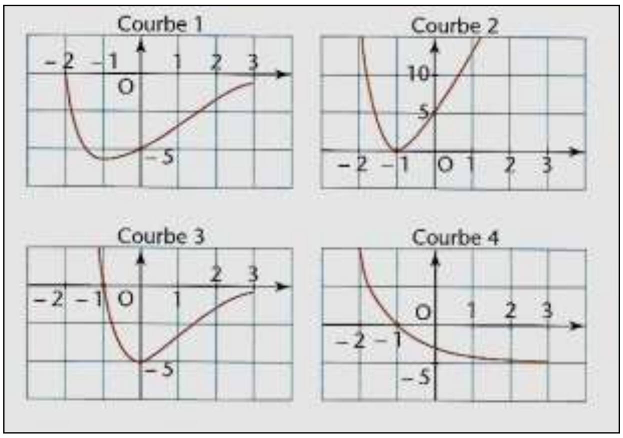






Retrouver la dérivée d'une fonction





La courbe (C) tracée ci-dessus à gauche est la courbe représentative d'une fonction f sur l'intervalle $[2;3]$. Parmi les quatre courbes représentées ci-dessus à droite, quelle est celle qui représente la dérivée f' ? Justifier en comparant des tableaux de variations et de signes…

<u>Recette et coûts de production</u>

Une entreprise fabrique des jouets qu'elle vend par lots. La fabrication peut varier entre 0 et 18 lots. On appelle x le nombre de lots fabriqués et vendus par l'entreprise.

- **Le coût de fabrication** en euros d'un nombre x de lots, est donné par la fonction f définie par $\boxed{f(x)=4x^3-96x^2+576x+100}$, dont on a tracé ci-dessous la courbe représentative C.

- Chaque lot fabriqué est vendu 125 euros. **La recette** est donc donnée par la fonction g définie par $\boxed{g(x)=125x}$.

Etude des coûts de fabrication

1. Calculer $f'(x)$.

2. Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout x de $[0;18]$ et en déduire les variations de f.

<u>Etude de la recette</u>

3. Tracer la droite D d'équation $y=125x$ dans le même repère que la courbe C.

4. Sachant que l'entreprise ne vend que des nombres entiers de lots de jouets, déterminer graphiquement l'intervalle sur lequel l'entreprise réalise un bénéfice. Justifier la réponse.

<u>Etude du bénéfice</u>

On considère la fonction h définie par :

$$\boxed{h(x)=g(x)-f(x)}.$$

5. Déterminer $h(x)$.

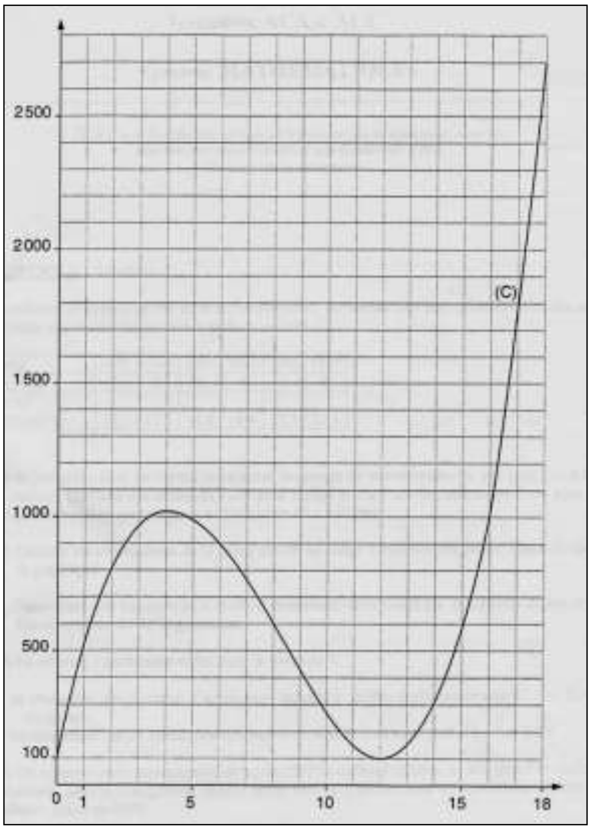
6. Calculer $h'(x)$.

7. Etudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0;18]$.

8. Caractériser les extremums locaux de la fonction h.

9. Que représente la fonction h étudiée dans cette partie ?

10. Que nous apprend l'étude de cette fonction ?



Recette et frais de fonctionnement

Une entreprise fabrique x ***dizaines*** de machines chaque jour. La fabrication quotidienne peut varier entre 0 et 120 machines. Le nombre x est donc compris entre 0 et 12 (inclus).

- La recette, en euros, qu'elle réalise chaque jour, est donnée par $f(x)=180x^2-15x^3$.
- Le montant des frais de fonctionnement quotidiens est donnée par $g(x)=180x+1200$.

Etude de la recette

1. Calculer $f'(x)$. Etudier dans un tableau le signe de $f'(x)$ sur 'intervalle $[0;12]$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;12]$.

Etude des frais de fonctionnement

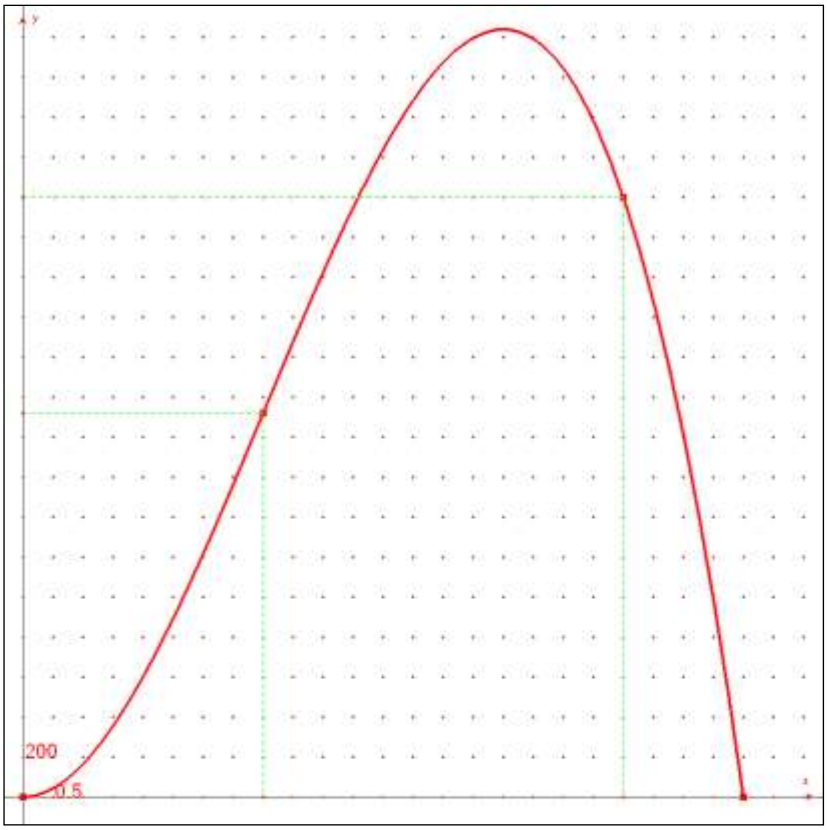
2. Soit (D) la droite représentant la fonction g. Tracer (D) sur le même graphique que la courbe (C). Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'entreprise réalise un bénéfice. Justifier graphiquement votre réponse.

Etude du bénéfice

On appelle h la fonction définie par :

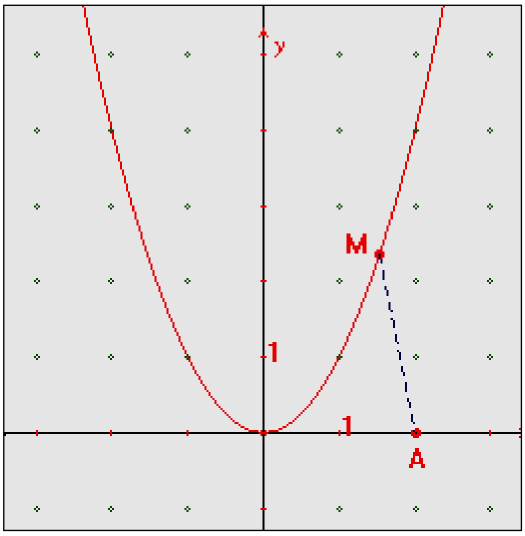
$h(x)=f(x)-g(x)$.

3. Déterminer l'expression algébrique de la fonction h.
4. Calculer $h'(x)$.
5. Résoudre algébriquement l'équation $h'(x)=0$. Les solutions seront arrondies au dixième près.



6. Etudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0;12]$. Caractériser les extremums locaux de la fonction h sur $[0;12]$.
7. Combien de machines l'entreprise doit-elle produire et vendre afin de réaliser un bénéfice maximal ? Matérialiser graphiquement le bénéfice maximal dans le repère.

Minimiser une distance



Dans un repère orthonormal, on note P la parabole d'équation $y=x^2$ et A le point de coordonnées $(2;0)$. M est un point quelconque de la parabole P d'abscisse x.

Première conjecture

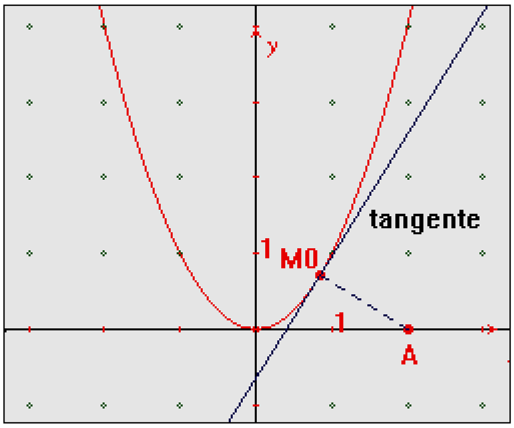
A l'aide d'une figure dynamique conjecturer quelle est la valeur de x pour laquelle la distance AM est minimale.

Démonstration de la première conjecture

1. On considère g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=4x^3+2x-4$. Calculer $g'(x)$. Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction g s'annule une seule fois sur l'intervalle $[0;1]$. On appelle α l'unique solution de l'équation $g(x)=0$. Déterminer un encadrement à 10^{-1} près de α. Dresser le tableau de signe de la fonction g sur IR. Montrer que $AM^2=x^4+x^2-4x+4$.

2. On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=x^4+x^2-4x+4$.Calculer la dérivée. En déduire les variations de la fonction f sur IR. Pour quelle valeur de x la distance AM est-elle minimale ?

Déterminer la position relative de deux droites



On note désormais M_0 le point de coordonnées $(\alpha;\alpha^2)$ pour lequel la distance entre le point A et la parabole P est minimale.

Deuxième conjecture

A l'aide d'une figure dynamique, conjecturer quelle est la position relative de la droite (AM_0) et de la tangente à la parabole au point M_0.

Démonstration de la deuxième conjecture

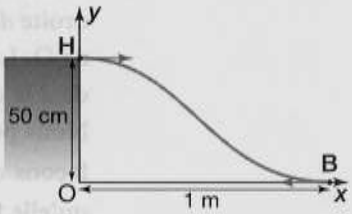
3. Déterminer, en fonction de α, le coefficient directeur de la tangente à la parabole au point M_0. Déterminer, en fonction de α, le coefficient directeur de la droite (AM_0).

4. Montrer que $\alpha-2=-2\alpha^3$. Comparer les deux coefficients directeurs et conclure. On pourra s'appuyer sur l'égalité $g(\alpha)=0$ établie dans la première partie du problème.

On veut installer une rampe métallique en pente douce permettant à des chariots de franchir une marche.

La figure ci-contre représente une vue en coupe de la rampe. La hauteur OH de la marche est 50 cm et la distance $OB = 1$ m. La rampe doit satisfaire aux deux conditions suivantes :

- (C1) Elle est tangente au sol en B ;
- (C2) Elle est tangente au sommet de la marche en H.



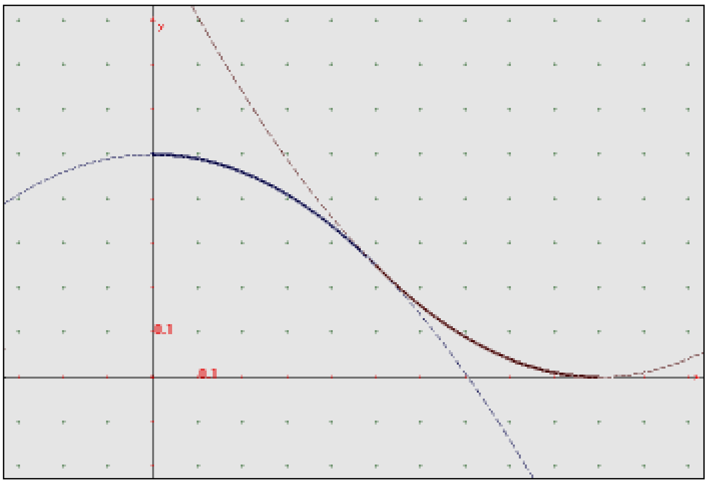
Le but de ce TD est de trouver des fonctions dont les courbes représentatives ont l'allure de la rampe et satisfont aux conditions C1 et C2.

Dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (d'unité graphique 10 cm), les points B et H ont respectivement pour coordonnées $(1\ ;\ 0)$ et $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

Deux trinômes du second degré

On va chercher si elle existe une courbe formée de deux arcs de parabole qui se raccordent en un point. Pour cela on considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + \dfrac{1}{2} \text{ si } x \in [0;1/2] \\ f(x) = x^2 - 2x + 1 \text{ si } x \in [1/2;1] \end{cases}$$

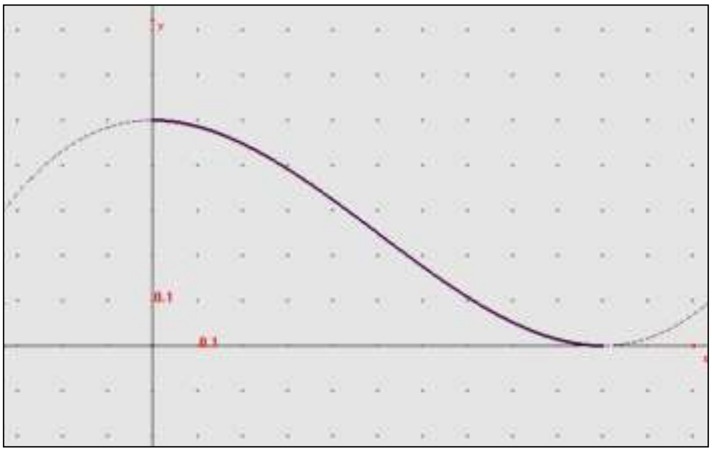


Etudier la fonction f sur l'intervalle $[0;1/2]$. Etudier la fonction f sur l'intervalle $[1/2;1]$. Expliquer à l'aide de quatre égalités pourquoi cette fonction remplit les conditions C1 et C2. Déterminer $f'(1/2)$. En déduire la pente maximale de la rampe.

Une fonction polynôme de degré 3

On cherche à améliorer le profil de la rampe en choisissant cette fois la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 3.

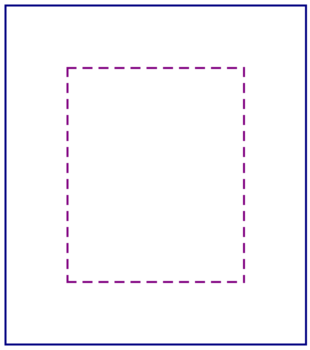
Pour cela on considère la fonction g définie par $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pour tout $x \in [0;1]$ où a, b, c et d sont quatre paramètres réels.



Déterminer les quatre paramètres a, b, c et d pour que la fonction g remplisse les conditions C1 et C2. Déterminer $g'(1/2)$. Pourquoi peut-on dire que l'on a amélioré le profil de la rampe ?

Problème faisant intervenir une fonction rationnelle

Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes : sur chaque page, le texte imprimé doit être contenu dans un rectangle de 300 cm², les marges doivent mesurer 1,5 cm sur les bords horizontaux et 2 cm sur les bords verticaux.



Le but du problème est de déterminer quelles doivent être les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit la plus faible possible.

1. On note x la dimension horizontale et y la dimension verticale du rectangle représentant la page du livre. Exprimer y en fonction de x.

2. On appelle f la fonction exprimant l'aire de la page du livre en fonction de x. Déterminer l'expression algébrique $f(x)$. Préciser l'intervalle d'étude de la fonction f.

3. Procéder à l'étude de la fonction sur cet intervalle. Utiliser pour cela l'implication proposée ci-contre. Ce résultat sera démontré plus avant.

4. Conclure en apportant une réponse à la question posée par le problème.

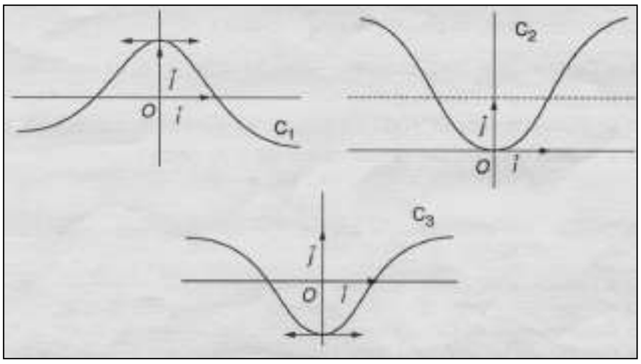
Si une fonction rationnelle f *est définie par* $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ *alors*

$$\boxed{f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}}.$$

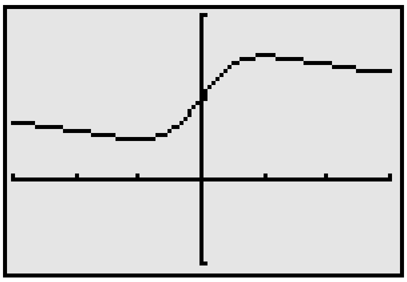
Etude de deux fonctions rationnelles

Soit f le fonction définie sur l'intervalle $[-3;3]$ par : $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

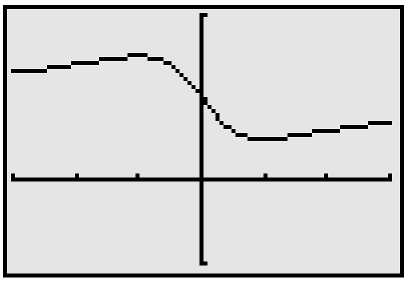
Calculer la dérivée de la fonction. Etudier le signe de la dérivée et dresser le tableau des variations de la fonction. Quelle est, parmi les trois courbes représentées ci-contre, la courbe représentative de g ?



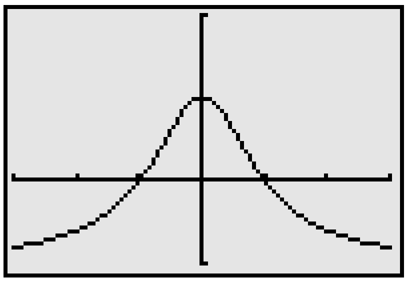
Même exercice que le précédent avec la fonction h définie sur $[-3;3]$ par $h(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

Attention démonstration !

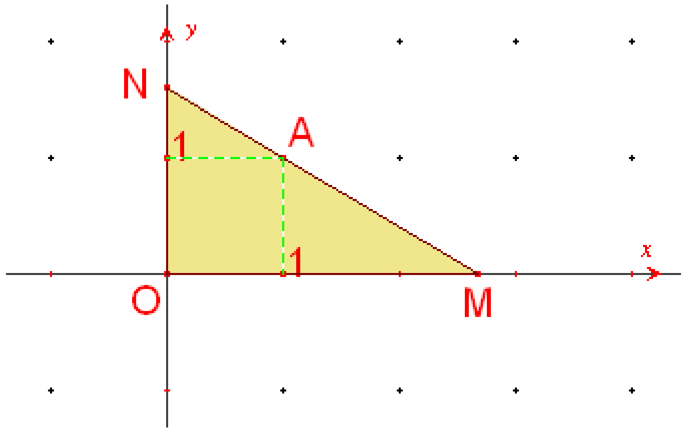
On propose ci-dessous les différentes étapes de la démonstration de la formule de dérivée d'un quotient de deux fonctions On parle de fonction rationnelle. Certaines étapes ont été malencontreusement effacées. Recopier et compléter les expressions de l'étape 2, étape 3, étape 5 et étape 6 reportées ci-dessous afin de retrouver l'intégralité de la démonstration.

Départ On considère une fonction s'écrivant comme le quotient de deux fonctions.	$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$
Etape 1 On connait la formule du taux de variation d'une fonction.	$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Etape 2 On applique la définition du taux de variation à la fonction de départ.	$\dfrac{\dfrac{?}{?}-\dfrac{?}{?}}{h}$
Etape 3 On réduit les deux fractions au même dénominateur afin de pouvoir soustraire.	$\dfrac{\dfrac{?\times ?}{?\times ?}-\dfrac{?\times ?}{?\times ?}}{h}$
Etape 4 On réduit les étages de cette fraction de fraction.	$\dfrac{u(a+h)\times v(a)-u(a)\times v(a+h)}{v(a+h)\times v(a)\times h}$
Etape 5 On introduit deux quantités qui, par développement, s'annulent.	$\dfrac{[?-?]\times ?-?\times[?-?]}{v(a+h)\times v(a)\times h}$
Etape 6 On réorganise l'expression et on envisage le passage la limite lorsque $h\to 0$.	$\dfrac{1}{\underbrace{v(a+h)\times v(a)}_{[v(a)]^2}}\times\left[\underbrace{\dfrac{?-?}{h}}_{u'(a)}\times ?-?\times\underbrace{\dfrac{?-?}{h}}_{v'(a)}\right]$
Arrivée On retrouve l'expression de la dérivée du quotient de deux fonctions.	$\dfrac{u'(a)\times v(a)-u(a)\times v'(a)}{[v(a)]^2}$

$\dfrac{\dfrac{?}{?}-\dfrac{?}{?}}{h}$	$\dfrac{\dfrac{?\times ?}{?\times ?}-\dfrac{?\times ?}{?\times ?}}{h}$	$\dfrac{[?-?]\times ?-?\times[?-?]}{v(a+h)\times v(a)\times h}$	$\dfrac{1}{\underbrace{v(a+h)\times v(a)}_{[v(a)]^2}}\times\left[\underbrace{\dfrac{?-?}{h}}_{u'(a)}\times ?-?\times\underbrace{\dfrac{?-?}{h}}_{v'(a)}\right]$
Etape 2	*Etape 3*	*Etape 5*	*Etape 6*

Minimiser une aire

On considère le point A de coordonnées $(1;1)$. M et N sont les points d'intersection d'une droite passant par A avec les des deux axes du repère. Le but du problème est de déterminer la position de M et de N pour que l'aire du triangle OMN soit minimale. On note x l'abscisse de M et y l'ordonnée de N.



1. Exprimer y en fonction de x.

2. On appelle f la fonction exprimant l'aire du triangle OMN en fonction de x. Déterminer l'expression algébrique $f(x)$. Préciser l'intervalle d'étude de la fonction f.

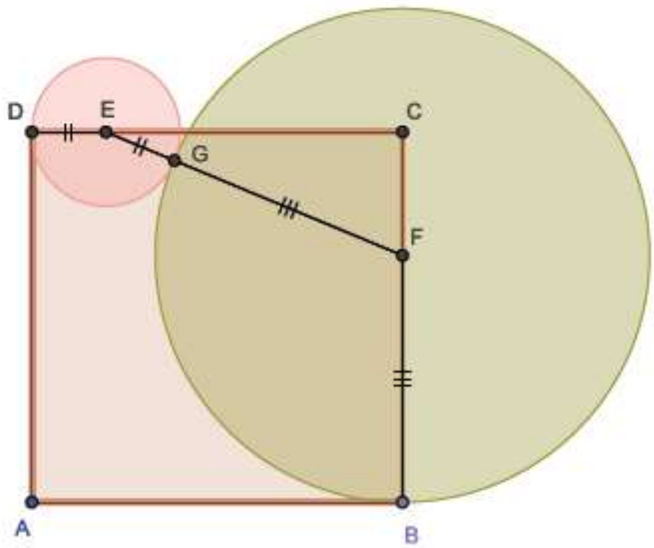
3. Procéder à l'étude de la fonction sur cet intervalle puis conclure.

Minimiser une longueur

ABCD est un carré de côté 1. E est un point du segment [CD] et F est un point du segment [BC]. Les cercles C et C' de centres respectifs E et F passent respectivement par les points D et B. Ces deux cercles sont tangents entre eux au point G.

Le but de ce problème est de déterminer la position du point G pour laquelle la distance EF est minimale.

On pose $DE = x$ et $BF = y$.

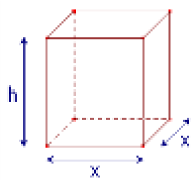


1. Démontrer que $y = \frac{1-x}{1+x}$. En déduire l'expression de la distance EF en fonction de x.

2. Etudier la fonction d définie par $d(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ sur l'intervalle $[0;1]$. En déduire la position de G pour que la distance EF soit minimale. Préciser cette distance minimale.

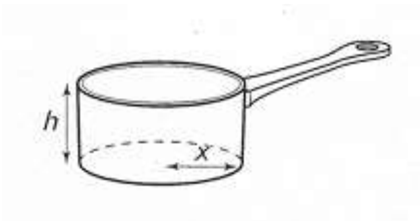
Minimiser une surface

On souhaite fabriquer une cuve à ciel ouvert. Cette cuve a la forme d'un pavé droit à base carrée. Son volume doit être de 4 mètres cube. On utilise de la peinture antirouille pour traiter les parois intérieures. Déterminer les dimensions de la cuve qui permettent d'utiliser le moins de peinture possible.



Dimensions d'une casserole d'un litre

Une entreprise fabrique des casseroles **de contenance un litre**. Elle cherche à utiliser le moins de métal possible (on ne tiendra pas compte du manche dans cette étude). x désigne le rayon du cercle intérieur en centimètres. h désigne la hauteur de la casserole en centimètres.



Mise en équation du problème

Le volume est $V = \underbrace{\pi x^2}_{AIREDISQUE} \times \underbrace{h}_{HAUTEUR}$ et vaut un litre c'est à dire 1000 cm^3. Donc $\pi x^2 \times h = 1000$. D'où $h = \dfrac{1000}{\pi x^2}$. La surface de métal utilisée pour confectionner cette casserole est constituée de **la surface du disque** qui vaut πx^2 et de **la surface latérale** qui est celle d'un **rectangle** de dimensions h et $2\pi x$ le périmètre du disque.

$$\boxed{S = \underbrace{\pi x^2}_{SURFACEDISQUE} + \underbrace{2\pi x \times h}_{SURFACELATERALE} = \pi x^2 + 2\pi x \times \frac{1000}{\pi x^2} = \pi x^2 + \frac{2000\pi x}{\pi x^2} = \pi x^2 + \frac{2000}{x}}$$

Etude d'un polynôme

On considère le polynôme $P(x) = 2\pi x^3 - 2000$ défini sur $\mathbb{R}$. Calculer $P'(x)$ et étudier son signe sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau des variations du polynôme P sur $\mathbb{R}$. Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[6;7]$. Proposer un encadrement à 10^{-2} près de α. Pour les applications numériques on prendra $\pi = 3,14$. Dresser le tableau de signes du polynôme P sur $\mathbb{R}$.

Etude d'une fonction rationnelle

On considère la fonction S définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $S(x) = \pi x^2 + \dfrac{2000}{x}$. Calculer $S'(x)$ et montrer que $S'(x) = \dfrac{P(x)}{x^2}$. Etudier le signe de $S'(x)$ et en déduire les variations de la fonction S sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Retour au problème

Pour quelle valeur de x la quantité de métal utilisé pour confectionner la casserole sera-t-elle minimale ? Préciser quelle surface de métal sera nécessaire pour fabriquer cette casserole ?

Une remarque

Montrer que $\alpha = \dfrac{1000}{\pi \alpha^2}$. Que pouvez-vous en déduire quant aux dimensions de cette casserole ?

Coût total – Coût moyen – Coût marginal – Bénéfice

L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10. Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

Le graphique proposé ci-après donne la représentation graphique de la fonction C.

Etude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = px$.

Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

1. Tracer sur le graphique la droite (D) d'équation $y = 680x$. Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice lorsque le prix p du marché est de 680 euros.

2. On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0;10]$ par $B(x) = 680x - C(x)$. Démontrer que $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$.

3. Calculer $B'(x)$ et étudier les variations de la fonction B sur $[0;10]$.

4. En déduire pour quelle quantité de tissu le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximal. Préciser la valeur de ce bénéfice et matérialiser le par un segment la figure.

Etude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite.

On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0;10]$ par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

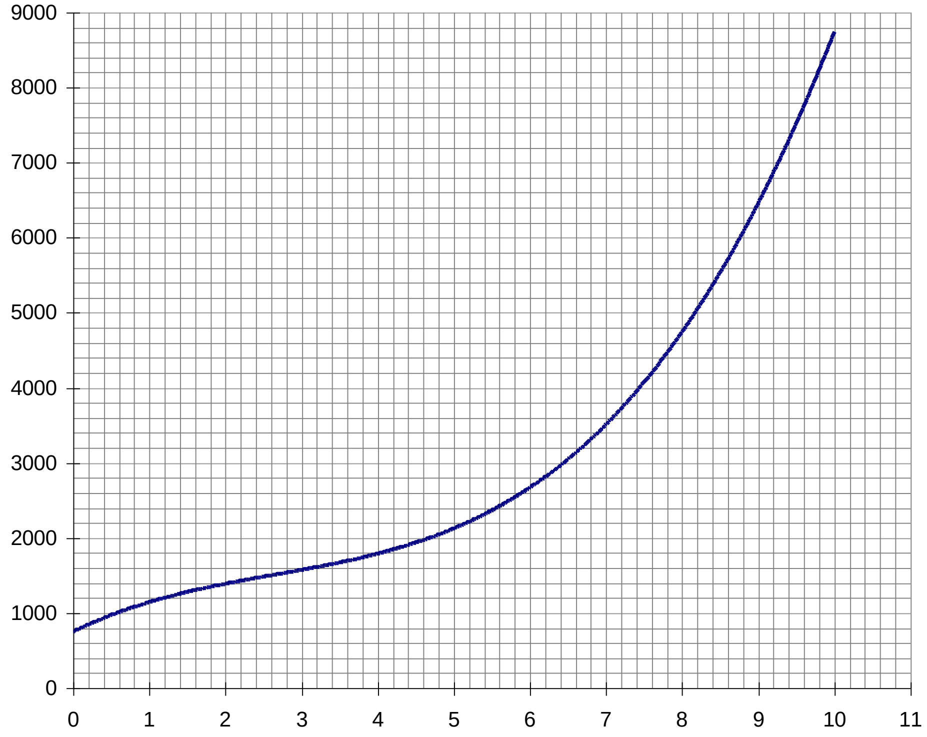
1. Calculer $C_M'(x)$ et montrer que $C_M'(x) = \dfrac{(30x - 150)(x^2 + x + 5)}{x^2}$.

2. En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0;10]$.

3. Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum ?
   Que vaut dans ce cas le coût moyen de production ?

Etude du coût marginal

On assimile le coût marginal de fabrication C_m avec la fonction dérivée du coût total c'est-à-dire $C_m(x) = C'(x)$. Vérifier que lorsque coût moyen est minimum, il est égal au coût marginal.



Courbe représentative des coûts de production

Coût total – Coût moyen – Coût marginal – Bénéfice

Un fabricant de pièces de fonderies réalise une production mensuelle de x centaines de pièces (avec $0 \leq x \leq 10$, c'est-à-dire qu'elle en produit entre 0 et 1000 par mois). Le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, est donné par : $C(x) = x^3 - 12x^2 + 60x$.

Etude approfondie des coûts

1. Déterminer le coût marginal et le coût moyen en fonction de x.

2. Dresser le tableau de variations du coût moyen sur l'intervalle $x \in]0;10]$.

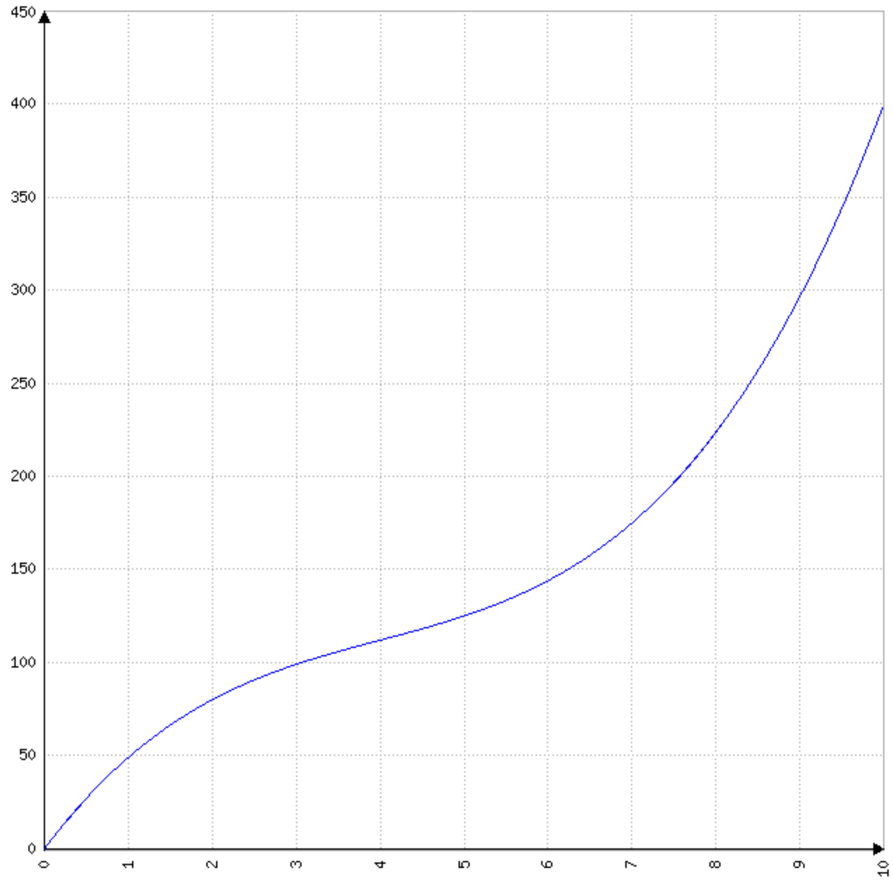
3. Vérifier que lorsque le coût moyen est minimum il est égal au coût marginal.

Etude du bénéfice

Le prix du marché des pièces de fonderies soit égal à 28000 euros pour 100 pièces vendues. La recette est donc donnée par : $R(x) = 28x$. Le bénéfice est donné par $B(x) = R(x) - C(x)$.

1. Tracer sur le graphique la droite D d'équation $y = 28x$. Déterminer graphiquement pour quelles quantités de pièces produites et vendues l'entreprise réalise un bénéfice.

2. Calculer $B(x)$. Etudier les variations de la fonction B sur l'intervalle $[0;10]$. En déduire à l'unité près, la quantité de pièces produites et vendues pour laquelle le bénéfice réalisé est maximal. Matérialisez graphiquement ce bénéfice maximal dans le repère.



Courbe représentative des coûts de production

Coût total – Coût moyen – Coût marginal – Bénéfice

Une entreprise cherche assez naturellement à minimiser ses coûts de production. Tout aussi généralement, ce n'est pas le coût de chaque unité produite qu'elle cherche à rendre minimal, mais le coût moyen de production, c'est-à-dire le coût global de production par unité produite. Si le coût de production pour x unités produites est $C(x)$ alors le coût moyen est $C_M(x)=\dfrac{C(x)}{x}$.

La notion de coût marginal est centrale et fondamentale en analyse économique. Le coût marginal de production est la variation du coût de production pour une unité supplémentaire produite. Si $C(x)$ est le coût de production de x unités alors le coût marginal est $C_m(x)=C(x+1)-C(x)$.

Rechercher à estimer ce coût marginal est assez naturel pour une entreprise puisqu'il revient d'une certaine façon à chercher à estimer l'intérêt, ou non, de produire une unité supplémentaire et donc d'accepter ou non une commande supplémentaire. Mathématiquement, les économistes calculent ce coût marginal grâce à la dérivée du coût total . En effet, on reconnaît dans l'expression du coût marginal $C_m(x)=C(x+1)-C(x)$ le taux de variation $\dfrac{C(x+1)-C(x)}{1}$.

Un objectif pour l'entreprise est de minimiser ses coûts de production, c'est-à-dire de produire un nombre d'unités tel que le coût moyen soit le plus faible possible. On parle d'optimum technique. On le détermine grâce à la propriété* $C_M(x_0)$ est minimal $\Leftrightarrow$ $C_M(x_0)=C'(x_0)$ qui affirme que le coût moyen est minimal à l'intersection des courbes du coût moyen et du coût marginal.