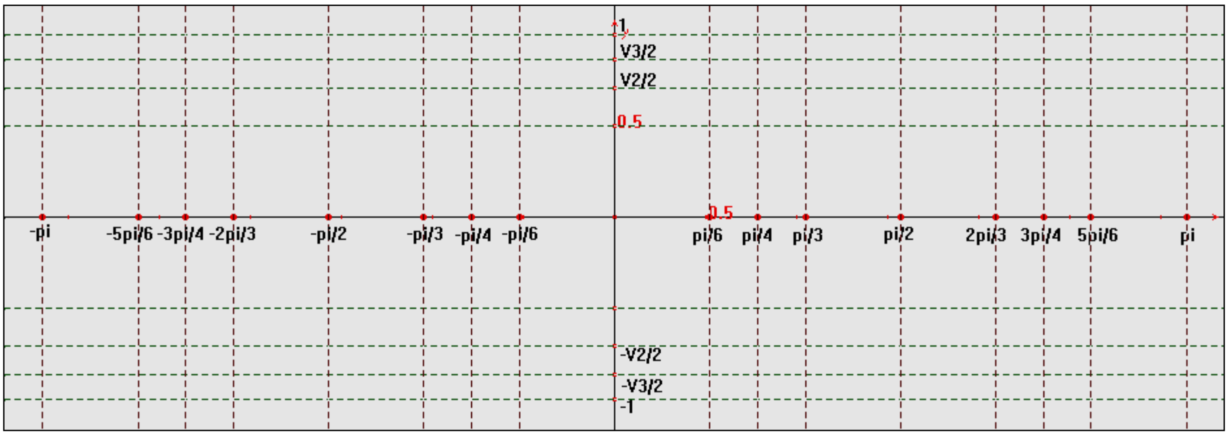
Exercice 1

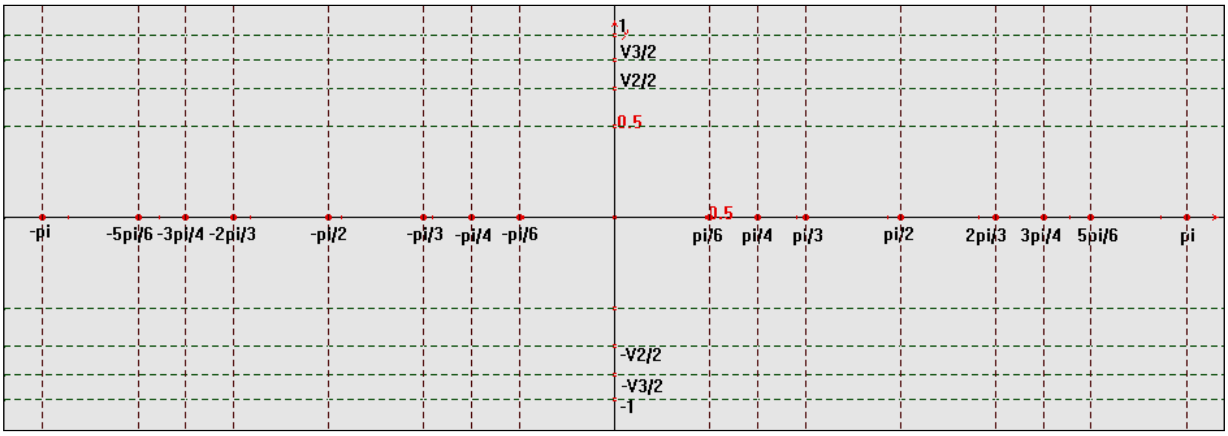
La fonction cosinus



1. Tracer la courbe représentative du cosinus.

2. Etablir le tableau de variations et le tableau de signes du cosinus sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

La fonction sinus



3. Tracer la courbe représentative du cosinus.

4. Etablir le tableau de variations et le tableau de signes du sinus sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

Lien entre les deux fonctions trigonométriques

5. Mettre en relation le tableau de signe de la fonction cosinus avec le tableau de variation de la fonction sinus. Conjecturer une relation entre la dérivée de la fonction sinus et la fonction cosinus. Cette relation sera admise.

6. Mettre en relation le tableau de signe de la fonction sinus avec le tableau de variation de la fonction cosinus. Conjecturer une relation entre la dérivée de la fonction cosinus et la fonction sinus. Cette relation sera admise.

Exercice 2

On souhaite établir les quatre inégalités suivantes lorsque $x \in [0;\pi]$:

$$\sin(x) \leq x \qquad 1-\frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \qquad x-\frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \qquad \cos(x) \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

Première inégalité

On considère la fonction $f(x)=\sin(x)-x$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

1. Calculer $f'(x)$, étudier le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction.
2. Etablir l'inégalité $\sin(x) \leq x$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

Deuxième inégalité

On considère la fonction $g(x)=1-\frac{x^2}{2}-\cos(x)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

3. Calculer $g'(x)$, étudier le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction.
4. Etablir l'inégalité $1-\frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

Troisième inégalité

On considère la fonction $h(x)=x-\frac{x^3}{6}-\sin(x)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

5. Calculer $h'(x)$, étudier le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction.
6. Etablir l'inégalité $x-\frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

Quatrième inégalité

On considère la fonction $k(x)=\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

7. Calculer $k'(x)$, étudier le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction.
8. Etablir l'inégalité $\cos(x) \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

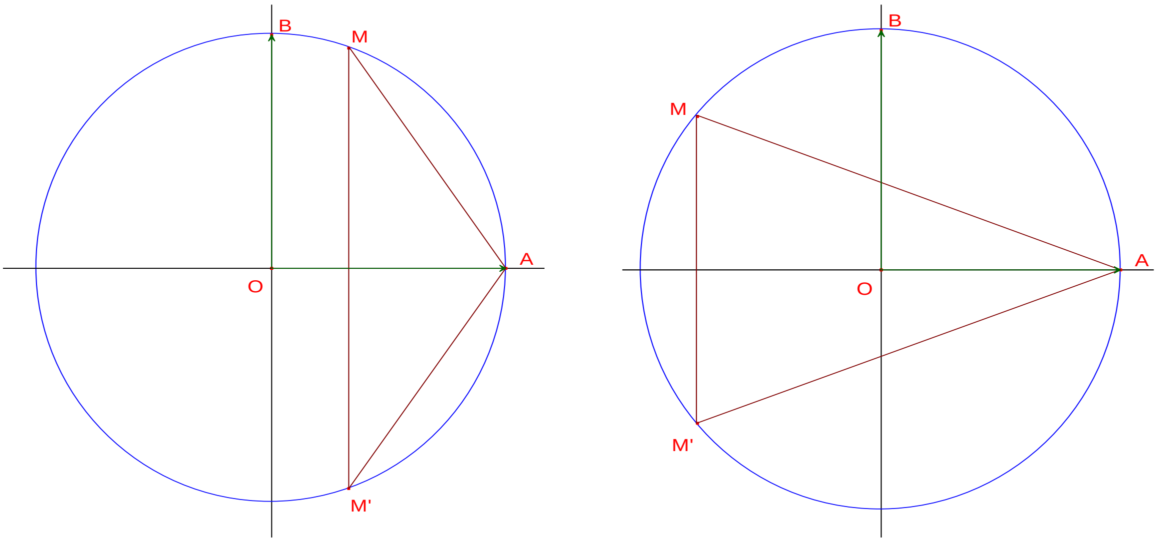
Encadrement

9. En déduire un encadrement de $\sin(x)$ par deux polynômes sur l'intervalle $[0;\pi]$.
10. En déduire un encadrement de $\cos(x)$ par deux polynômes sur l'intervalle $[0;\pi]$.

Exercice 3

Soit C le cercle trigonométrique et A un point du cercle. On se propose d'étudier les aires des triangles isocèles de sommet A inscrits dans le cercle C.

On choisit le repère orthonormal direct $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$. Un triangle AMM' inscrit dans le cercle C se présentera alors comme la figure ci-dessous (on choisi pour M l'ordonnée positive).



Désignons par α la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)$.

1. Quelles sont les valeurs possibles prises par la variable α ?

2. Montrer que l'aire du triangle AMM' s'exprime en fonction de α par l'expression suivante : $A(\alpha)=(1-\cos\alpha)\sin\alpha$.

3. Montrer que $A'(\alpha)=-2(\cos\alpha-1)\left(\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\right)$.

4. Etudier la fonction A sur l'intervalle $[0;\pi]$.
   On étudiera le signe de la dérivée et on en déduira les variations de la fonction.

5. Pour quelle valeur de α l'aire du triangle AMM' est-elle maximale ?
   Que peut-on dire de ce triangle ? Quelle est son aire ?

Exercice 4

L'objectif de cet exercice est de démontrer que pour tout $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$\frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}\leq x\leq\frac{2\sin(x)+\tan(x)}{3}.$$

Partie A

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}-x$.

1. Calculer la dérivée de la fonction f et étudier le signe de $f'(x)$ sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. En déduire le sens de variation de la fonction f ainsi que le signe de $f(x)$ sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Partie B

On considère la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{2\sin(x)+\tan(x)}{3}-x$.

3. Calculer la dérivée de la fonction f et montrer que $g'(x)=\dfrac{(\cos(x)-1)^2(2\cos(x)+1)}{3(\cos(x))^2}$.
4. Etudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
5. En déduire le sens de variation de la fonction g ainsi que le signe de $g(x)$ sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Partie C

En utilisant les valeurs exactes des lignes trigonométriques de $\pi/6$ ainsi que le travail effectué dans les parties A et B, déterminer un encadrement de $\pi/6$, puis un encadrement de π.

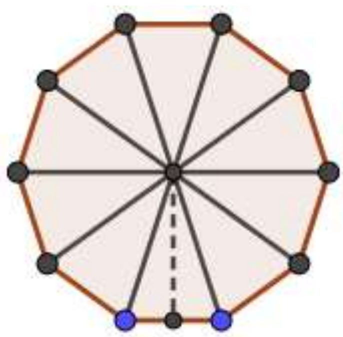
Exercice 5

Comparer les nombres $22/7$ et π. Montrer que $179/57$ est une meilleure approximation de π. Déterminer, à l'aide de l'algorithme ci-contre que vous compléterez, toutes les fractions n/d qui constituent une meilleure approximation de π que $22/7$.

```python
from math import pi
e=...
for ... in ...:
    for ... in ...:
        if ...<...:
            print(...,...)
```

On construit un polygone régulier de à « n » côtés inscrit dans un cercle de rayon 1 (cercle trigonométrique). Démontrer que l'aire du polygone ainsi construit est donné par la relation ci-dessous :

$$a_n = n\times\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$



Conjecturer le comportement asymptotique de la suite a_n.