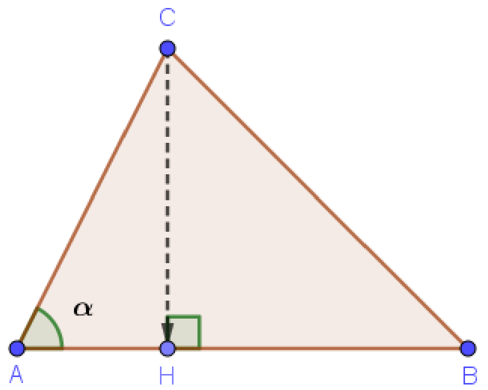
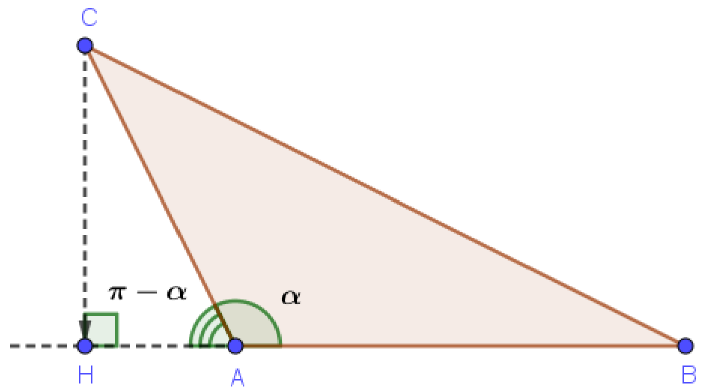
Défaut d'orthogonalité

ABC est un triangle quelconque du plan.

- H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB),
- Le « défaut d'orthogonalité » d'un triangle ABC défini par $\Delta = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$.





Lorsque l'angle $\alpha = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ *est aigu*

On remarque dans ce cas que le point H est situé sur le segment [AB]. Nous avons donc la relation $AB = AH + HB$.

En utilisant deux fois le théorème de Pythagore dans la configuration et en utilisant la relation proposée ci-dessus, montrer que :

$$\Delta = AB \times AH$$

En utilisant la définition du cosinus de l'angle α dans le triangle ACH rectangle en H, démontrer que :

$$\Delta = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$$

Lorsque l'angle $\alpha = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ *est obtus*

On remarque dans ce cas que le point H est situé hors du segment [AB]. Nous avons donc la relation $AB = HB - AH$.

En utilisant deux fois le théorème de Pythagore dans la configuration et en utilisant la relation proposée ci-dessus, montrer que :

$$\Delta = -AB \times AH$$

En utilisant la définition du cosinus de l'angle $\pi - \alpha$ dans le triangle ACH rectangle en H, démontrer que :

$$\Delta = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$$

Produit scalaire de deux vecteurs

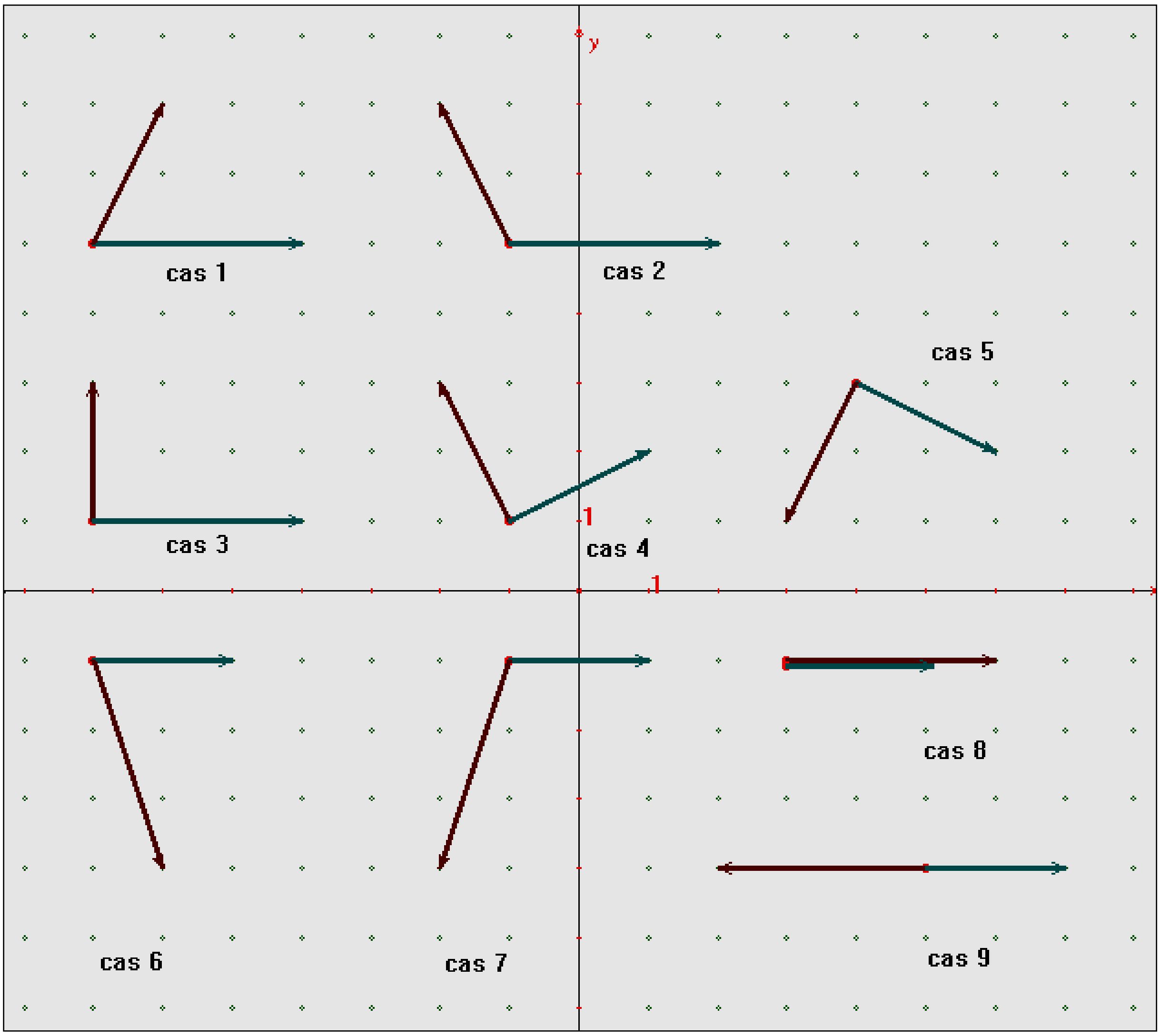
Etant donné deux vecteurs du plan $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on définit le produit scalaire entre les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (que l'on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$) des deux façons suivantes qui sont équivalentes :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \begin{cases} AB \times AH \text{ si l'angle est aigu} \\ -AB \times AH \text{ si l'angle est obtus} \end{cases}}$$

Le produit scalaire mesure le défaut d'orthogonalité entre deux vecteurs du plan. Il est nul si l'angle entre les deux vecteurs est droit, positif si l'angle est aigu, négatif lorsque l'angle est obtus.

Premier exercice d'application directe

Dans chacun des cas, le vecteur $\vec{u}$ est le vecteur bleu, le vecteur $\vec{v}$ est le vecteur marron. Pour chacun des cas proposés ci-dessous calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.



Deuxième exercice d'application directe

Déterminer dans chaque cas la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

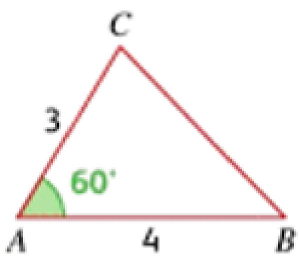


Figure a

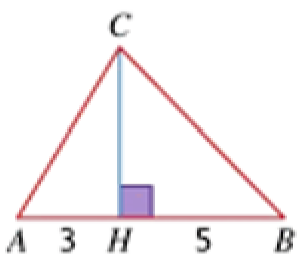


Figure b

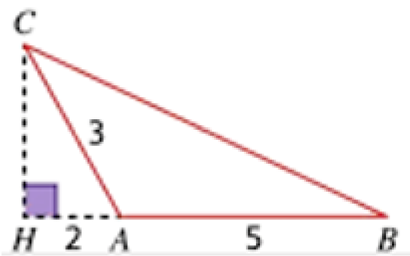
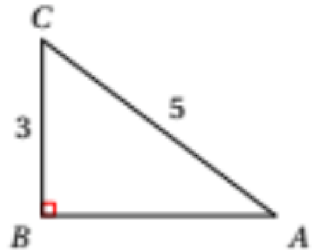
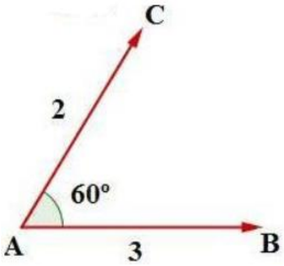


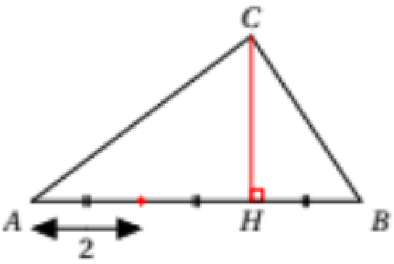
Figure c

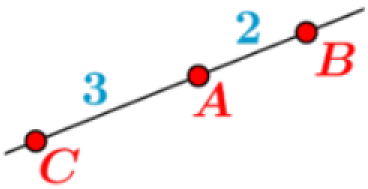
Troisième exercice d'application directe

Dans chaque situation, calculer la valeur numérique des produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

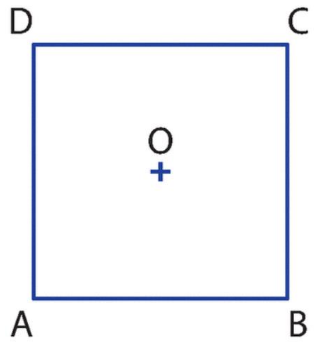








Premier exercice d'application un peu moins directe



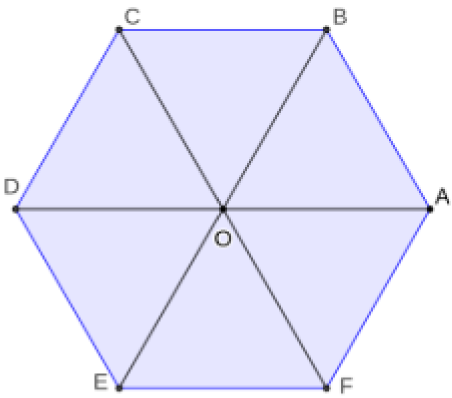
ABCD est un carré de centre O et de côté a. Associer chaque produit scalaire avec sa valeur exprimée en fonction de a. Attention, certaines valeurs peuvent ne pas être atteinte ou bien être atteintes plusieurs fois.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ $\quad$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ $\quad$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$

0 $\quad$ $-a^2$ $\quad$ a^2 $\quad$ $-\dfrac{a^2}{2}$ $\quad$ $\dfrac{a^2}{2}$ $\quad$ 1

Deuxième exercice d'application un peu moins directe



ABCDEF est un hexagone régulier de centre O et de côté a. Associer chaque produit scalaire avec sa valeur exprimée en fonction de a. Attention, certaines valeurs peuvent ne pas être atteinte ou bien être atteintes plusieurs fois.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ $\quad$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ $\quad$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$

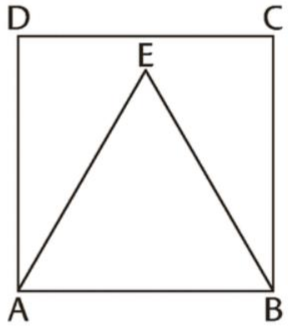
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ED}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OE}$ $\quad$ $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BF}$

0 $\quad$ $-a^2$ $\quad$ a^2 $\quad$ $-\dfrac{a^2}{2}$ $\quad$ $\dfrac{a^2}{2}$ $\quad$ 1

Troisième exercice d'application un peu moins directe

ABCD est un carré de côté a et ABE est le triangle équilatéral construit à l'intérieur du carré ABCD. On propose quatre produits scalaires. Attribuer à chaque produit scalaire sa valeur exprimée en fonction de a.

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=$	☐ a^2	☐ $\frac{1}{2}a^2$	☐ $-\frac{1}{2}a^2$	☐ $a^2\sqrt{3}$
b. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}=$	☐ $-a^2$	☐ 0	☐ $2a$	☐ a^2
c. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE}=$	☐ $\frac{1}{2}a^2$	☐ a^2	☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$	☐ $\frac{3}{4}a^2$
d. $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AE}=$	☐ a^2	☐ $\frac{1}{2}a^2$	☐ $-a^2$	☐ $-\frac{1}{2}a^2$



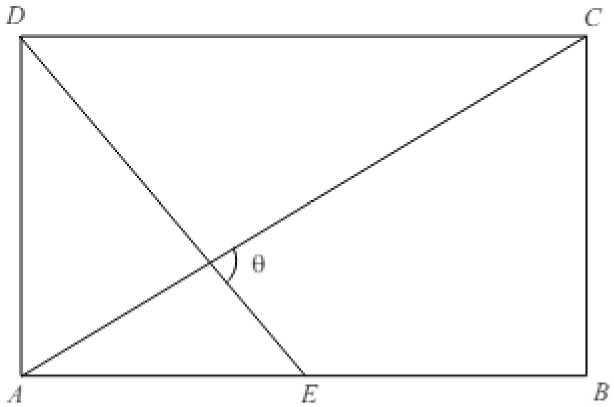
Le produit scalaire au service de la détermination de la mesure d'un angle

Angle dans un rectangle dont on connait les dimensions

ABCD est un rectangle de dimensions AB=6 et AD=4. Le point E est le milieu du segment [AB].

1. Déterminer la longueur DE et la valeur exacte de la longueur AC.

2. En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AC}$ à l'aide de la relation de Chasles et en calculant de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC}$ déterminer, arrondie au degré près, la mesure de l'angle θ.

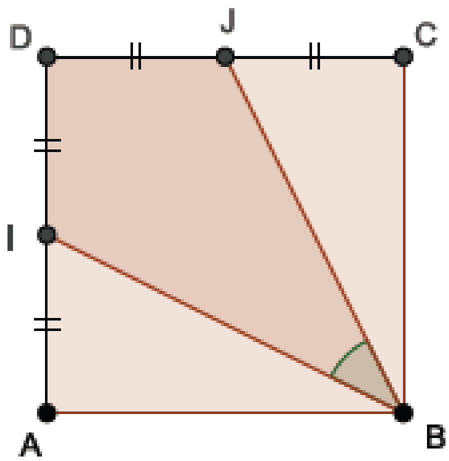


Angle défini dans un carré dont on ne connait pas la longueur

Le quadrilatère ABCD proposé ci-dessous est un carré de côté a. Les points I et J sont les milieux respectifs des côtés [AD] et [CD]. On note α l'angle géométrique $\widehat{IBJ}$.

1. Déterminer la longueurs BI en fonction de a. Déterminer la longueurs BJ en fonction de a.

2. En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ à l'aide de la relation de Chasles et en calculant de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BJ}$ déterminer la mesure au degré près de l'angle α.

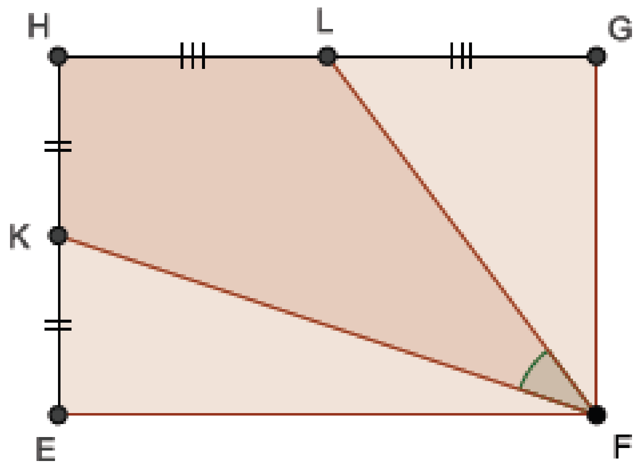


Angle défini dans un rectangle dont on connait le rapport des dimensions

Le quadrilatère EFGH est un rectangle de « format commercial » (largeur a et longueur $a\sqrt{2}$). Les points K et L sont les milieux des côtés [EH] et [GH]. On note β l'angle géométrique $\widehat{KFL}$.

1. Déterminer la longueur FK en fonction de a. Déterminer la longueur FL en fonction de a.

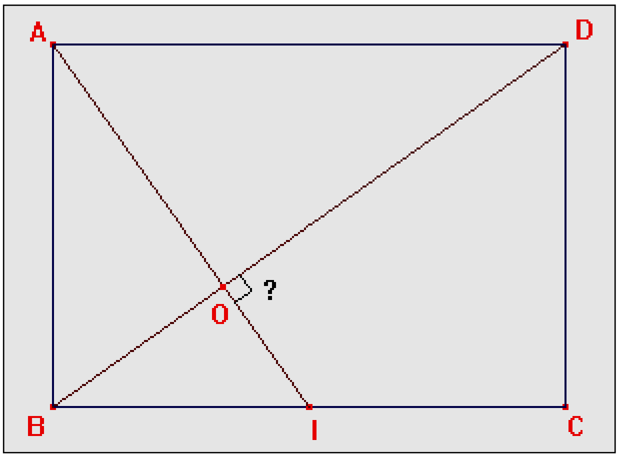
2. En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{FK}$ et $\overrightarrow{FL}$ à l'aide de la relation de Chasles et en calculant de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{FL}$ déterminer la mesure au degré près de l'angle β.



Le produit scalaire pour démontrer la perpendicularité de deux droites

Dans un rectangle de format commercial

On s'intéresse à l'affirmation suivante : « Dans un rectangle de format commercial, la diagonale (droite (BD) qui joint deux sommets opposés) et ce que nous appellerons la pseudo diagonale (droite (AI) qui joint le troisième sommet au milieu du côté opposé) sont perpendiculaires ».



1. Rappeler ce qu'on appelle « format commercial » pour un rectangle.

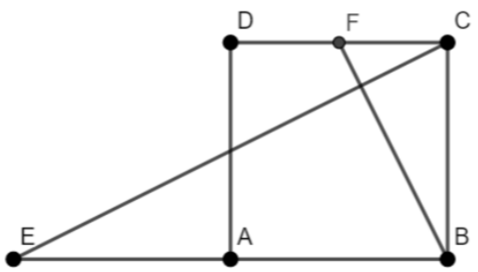
2. Vérifier par le pliage d'une feuille A4 que l'affirmation semble être vraie.

3. Démontrer par le calcul d'un produit scalaire bien choisi que l'affirmation est vraie.

Dans une situation faisant intervenir un carré, le milieu d'un côté et le symétrique d'un point

On considère le carré ABCD de côté a où a est un réel positif quelconque. Le point F est le milieu du segment [CD] et le point E est le symétrique de B par rapport au point A.

Après avoir décomposé les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ par la relation de Chasles, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BF}$ et en déduire la position relative des deux droites (EC) et (BF).



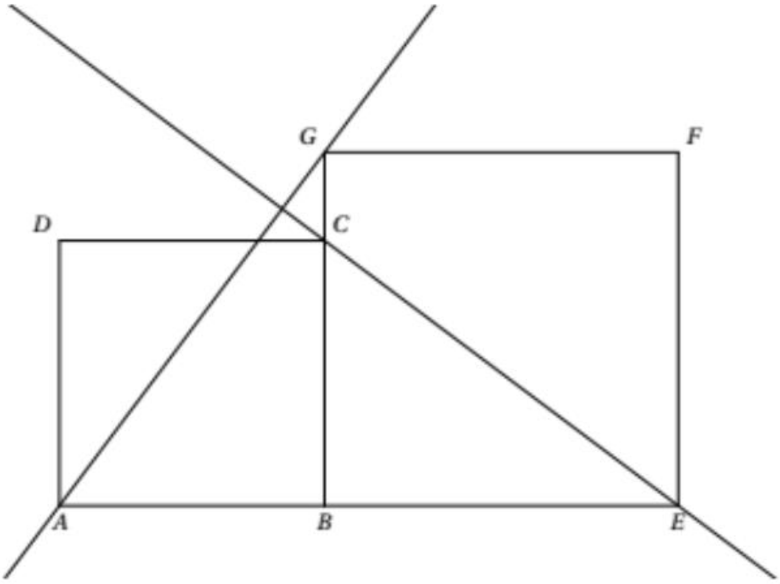
Dans une situation faisant intervenir deux carrés de tailles différentes

On considère la figure ci-contre dans laquelle ABCD est un carré de côté a et BEFG est un carré de côté b. Les points A, B et E sont alignés. Les points B, C et G sont alignés également.

1. Après avoir décomposé les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EC}$ à l'aide de la relation de Chasles, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC}$.

2. Que peut-on en déduire pour la position relative de (AG) et (EC) ?

3. Cette situation dépend-elle de la taille des deux carrés considérés ?

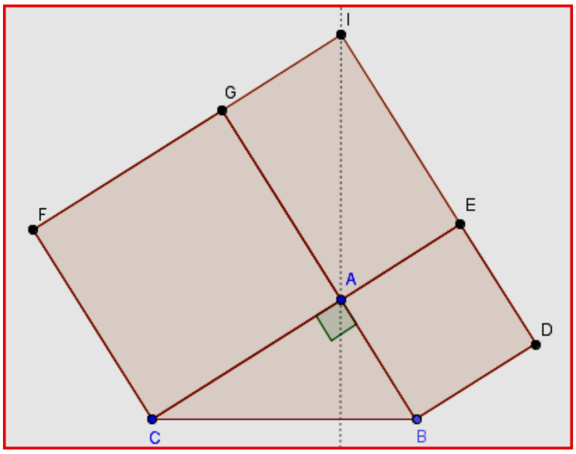


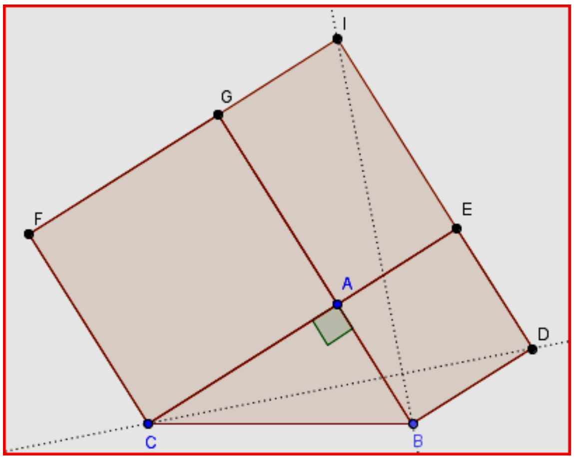
Dans une situation faisant intervenir un triangle rectangle, un rectangle et deux carrés

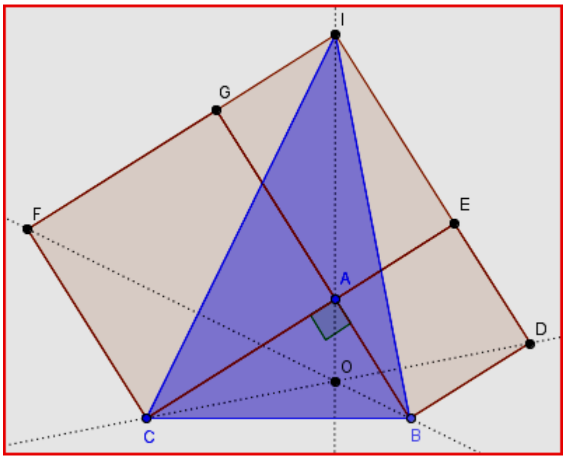
ABC est un triangle rectangle en A. On construit, à l'extérieur de ce triangle, comme l'indique la figure ci-contre les carrés ABDE, AGFC et le rectangle AEIG. On s'intéresse à la position relative des droites (AI), (CD) et (BF).

Démontrer, par le calcul de trois produits scalaires bien choisis, que les droites (AI) (CD) et (BF) sont les trois hauteurs d'un triangle.

On montrera que (AI) est perpendiculaire à (BC) puis que (BI) est perpendiculaire à (CD) et enfin que (CI) est perpendiculaire à (BF).

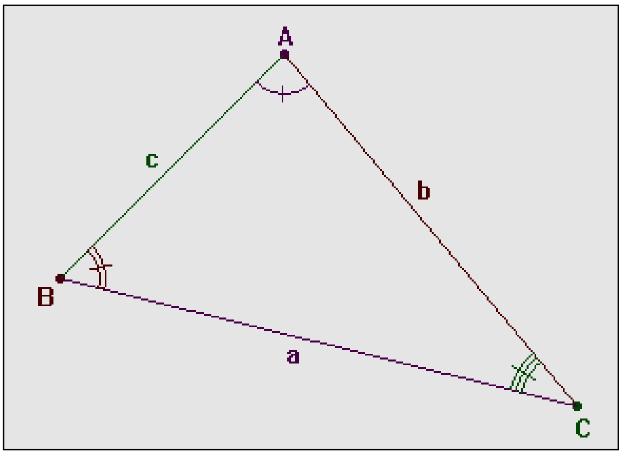






Formules d'Al-Kashi

On travaille dans un triangle quelconque ABC. On note a, b et c les longueurs respectives des côtés [CB], [CA] et [AB]. Démontrer l'égalité suivante connue sous le nom de « formule d'Al-Kashi » :

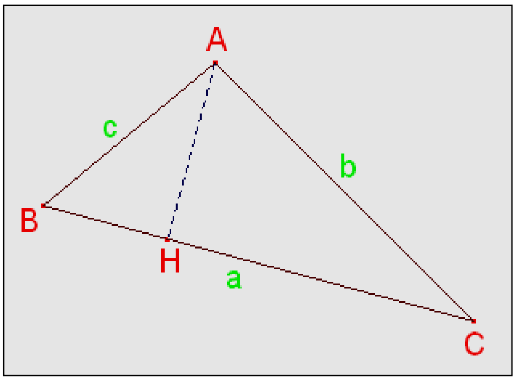


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(BAC\right)$$

Indications utiles : partir de l'égalité vectorielle $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ puis développer le carré scalaire $\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2$.

Formule de l'aire et loi des sinus

On travaille dans un triangle quelconque ABC. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur (BC). On note a, b et c les longueurs respectives des côtés [CB], [CA] et [AB]. Démontrer l'égalité suivante connue sous le nom de « formule de l'aire » :

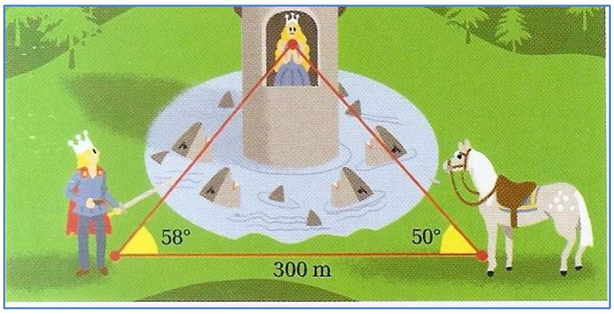


$$S = \frac{1}{2}ac\sin\left(ABC\right)$$

Indications utiles : partir de la formule donnant l'aire du triangle, puis exprimer la longueur AH en fonction de $\sin B$. Sauriez-vous en déduire une relation entre $\frac{a}{\sin(A)}$, $\frac{b}{\sin(B)}$ et $\frac{c}{\sin(C)}$?

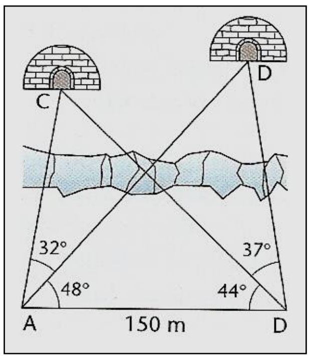
Exercice d'application directe

Dans la situation proposée ci-contre la position du prince (point A), de la princesse (point B) et du cheval (point C) forment un triangle. Quelle distance sépare le prince de la princesse ? Quelle distance sépare le cheval de la princesse ?



Exercice d'application un peu moins directe

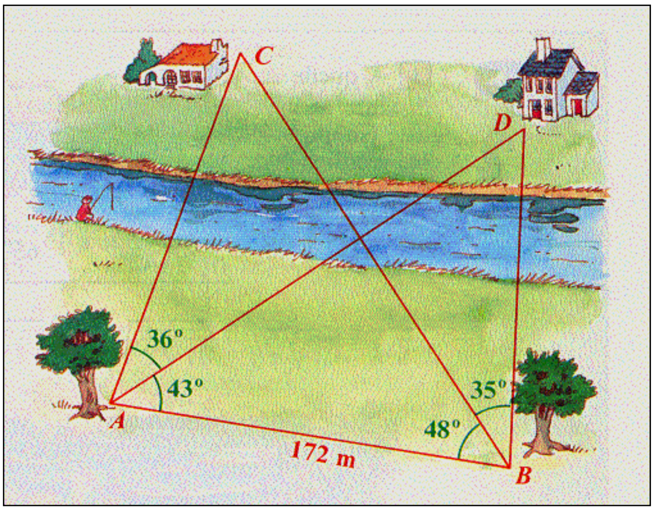
Un explorateur cherche à déterminer la distance entre deux igloos C et D. Une crevasse l'empêchant d'y accéder directement, il effectue des mesures d'angles entre deux positions A et B distantes de 150 mètres comme l'indique le dessin ci-contre. Quelques indications utiles… A l'aide de la formule des sinus, calculer la longueur AC au mètre près. A l'aide de la formule des sinus, calculer la longueur AD au mètre près. A l'aide de la formule d'Al Kashi, en déduire la distance CD au mètre près.



Loi des sinus et relation d'Al Kashi

La situation décrite ci-contre est significative : il est plus facile pour un géomètre de mesurer des angles que des longueurs (points inaccessibles, obstacles, …). Il s'agit de déterminer la longueur CD.

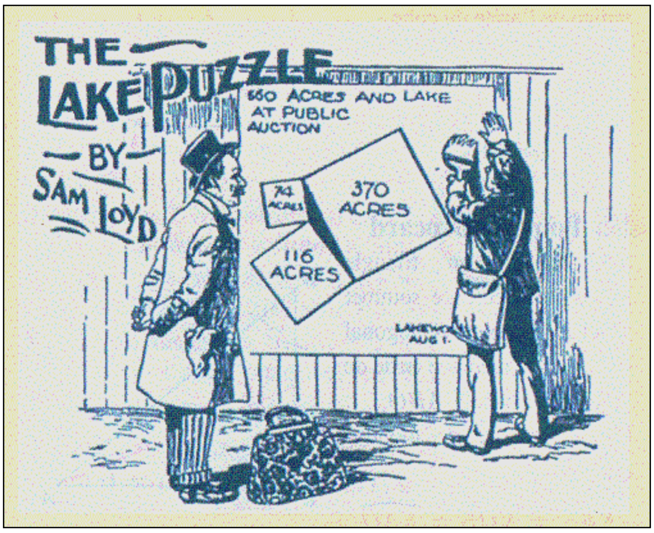
La loi des sinus appliquée à deux reprises ainsi que la relation d'Al-Kashi seront les outils nécessaires au calcul de cette distance. Le résultat sera proposé au centimètre près.



Relation d'Al-Kashi et formule de l'aire

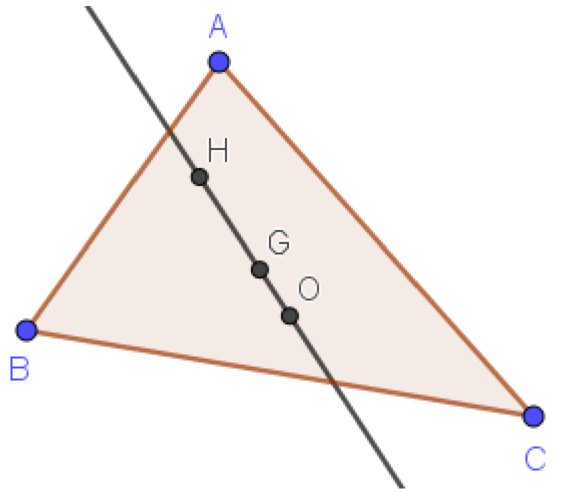
Le problème décrit ci-contre consiste à déterminer la surface de ce lac triangulaire entouré par des lots de terre carrés de 370, 74 et 116 hectares. Il s'agit donc de calculer l'aire S d'un triangle ABC sachant que $a^2 = 370$, $b^2 = 74$ et $c^2 = 116$.

Vous calculerez $\cos(A)$ par application d'une formule d'Al-Kashi, vous en déduirez $\sin(A)$ à l'aide de la relation liant le cosinus et le sinus, et enfin calculerez S par la formule de l'aire.



La droite d'Euler

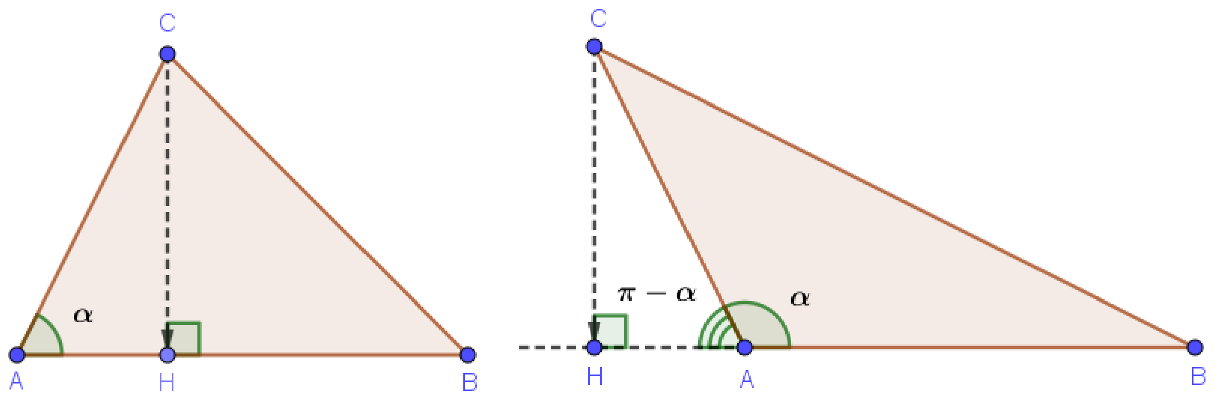
On considère un triangle ABC. On note G le point d'intersection de ses médianes appelé centre de gravité, O le point d'intersection de ses médiatrices appelé centre du cercle circonscrit et H le point d'intersection de ses hauteurs appelé orthocentre. On appelle M le point défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Démontrer dans un premier temps que le point M est confondu avec le point H. En déduire dans un deuxième temps que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Que peut-on en déduire concernant la position de O, G et H ?



Indications : remarquer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$, justifier que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right)$, en déduire que M appartient à la hauteur issue de A, puis, reprendre et adapter le raisonnement…

Expression du produit scalaire de deux vecteurs à l'aide des coordonnées

Ce que nous savons déjà



On rappelle que si ABC est un triangle quelconque du plan, le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, noté Δ et appelé « défaut d'orthogonalité » du triangle ABC est « initialement » la quantité définie par $\Delta = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$ (définition proposée en page 1).

On rappelle également qu'en faisant intervenir le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), il en découle deux façons équivalentes de calculer le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:
$\Delta = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \begin{cases} AB \times AH \text{ si l'angle est aigu} \\ -AB \times AH \text{ si l'angle est obtus} \end{cases}$ (relations démontrées en page 1).

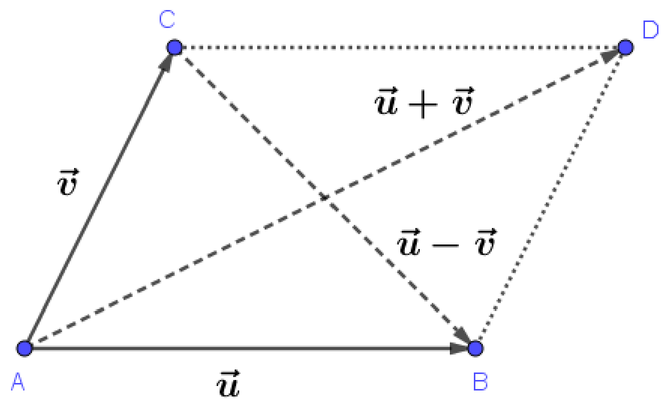
Une autre façon d'écrire les (mêmes) choses

Dans la configuration proposée ci-dessous, ABDC est un parallélogramme.

On note $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. La somme des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ donne le vecteur $\overrightarrow{AD}$. La différence des vecteurs $\vec{u} - \vec{v}$ donne le vecteur $\overrightarrow{CB}$.

On peut donc réécrire la relation précédente de la façon suivante :

$$\Delta = \frac{\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u} - \vec{v}\right\|^2}{2}$$

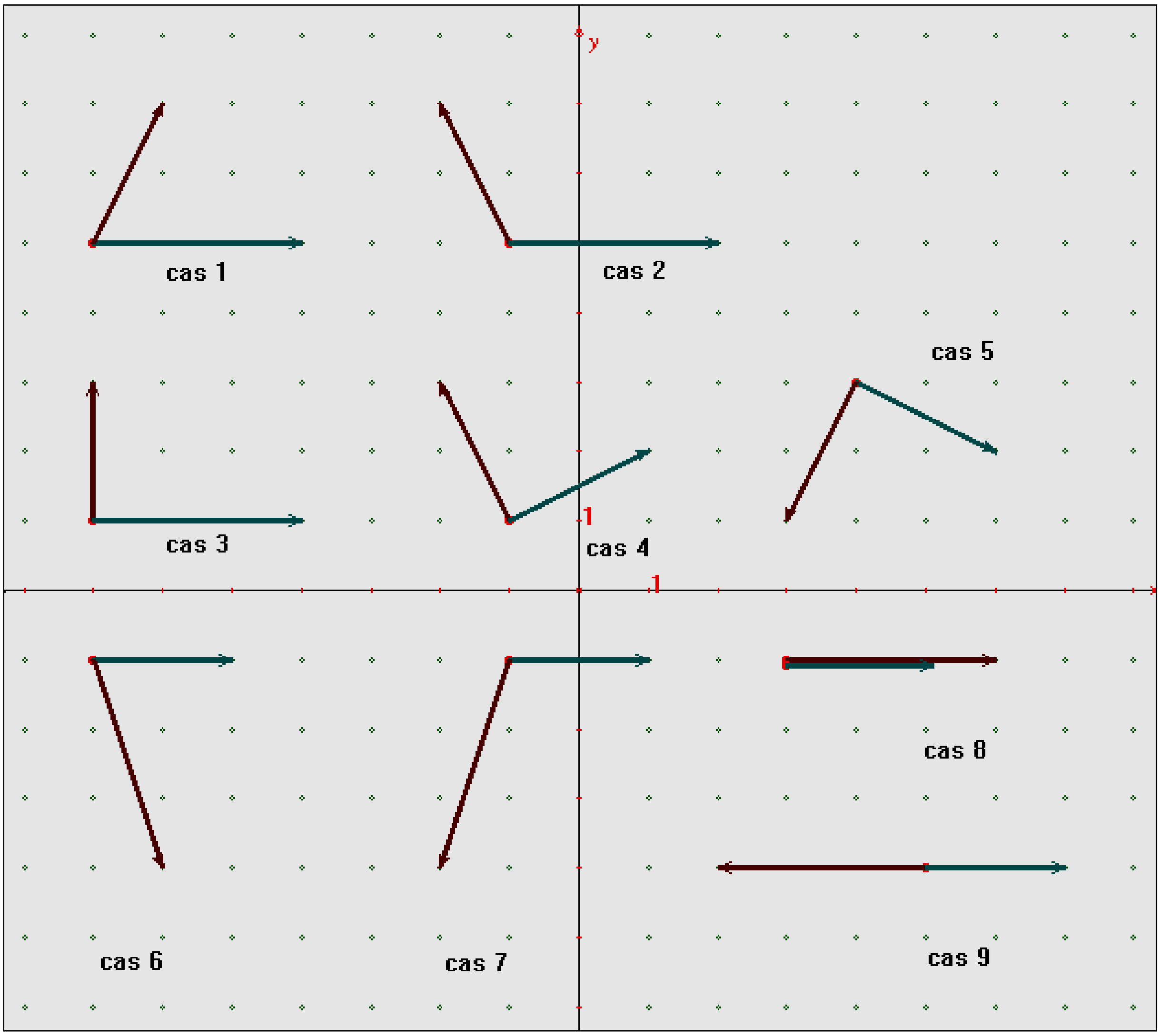


1. Expliquer pourquoi $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{CB}$.

2. On se place dans un repère orthonormé et on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les coordonnées des vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ dans ce repère. Démontrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = x \times x' + y \times y'$.

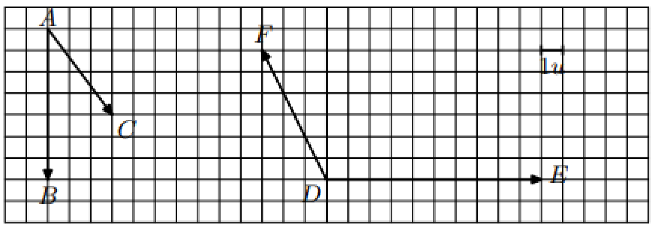
Exercice d'application directe

Pour chacun des 9 cas proposés reprendre le calcul du produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ (déjà effectué en page 2) en utilisant les coordonnées des vecteurs dans le repère et la relation $\vec{u}\cdot\vec{v} = x \times x' + y \times y'$.

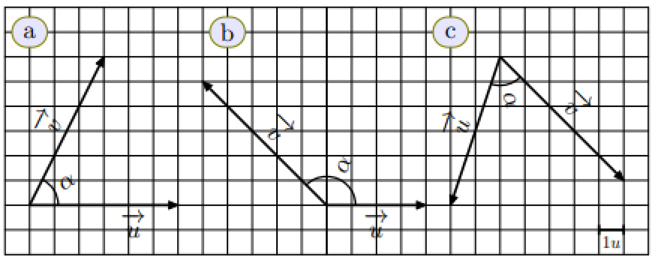


Application un peu moins directe

Dans les deux situations proposées ci-contre, déterminer les coordonnées des deux vecteurs dans le repère, puis, calculer le produit scalaire des deux vecteurs à l'aide des coordonnées.

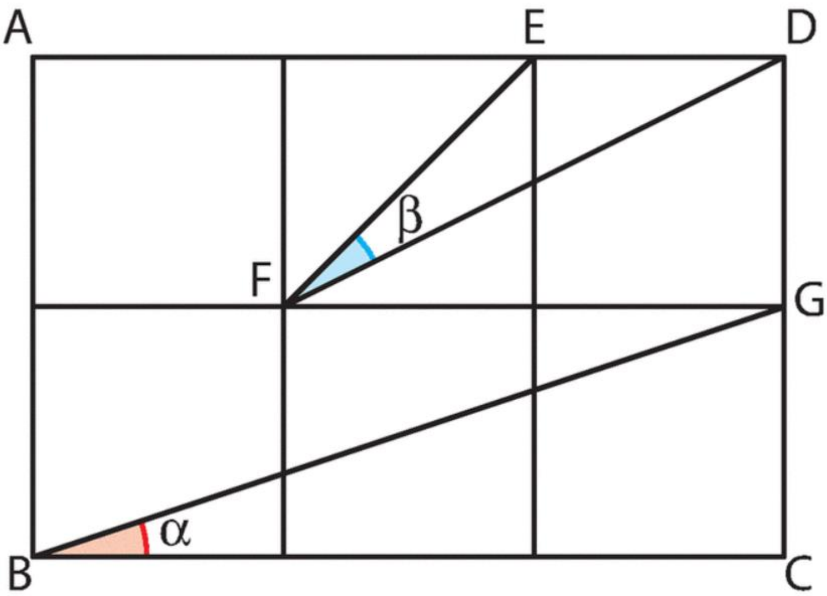


Dans les trois situations proposées ci-contre, déterminer les coordonnées des deux vecteurs, la valeur du produit scalaire, puis, une valeur arrondie au degré près de l'angle α constitué par les deux vecteurs considérés.



Savoir travailler dans un repère avec des coordonnées

Situation 1

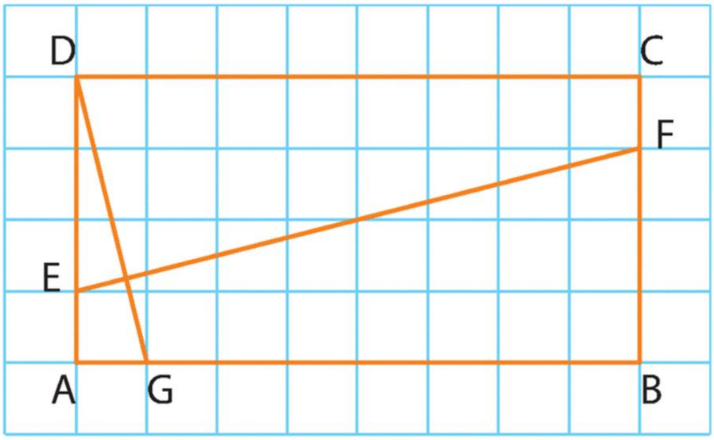


On dispose six carrés identiques de coté 1 comme l'indique la figure ci-contre.

En utilisant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{FE}$ dans le repère :

1. Calculer $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG}$,
2. Calculer $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FE}$,
3. Comparer α et β.

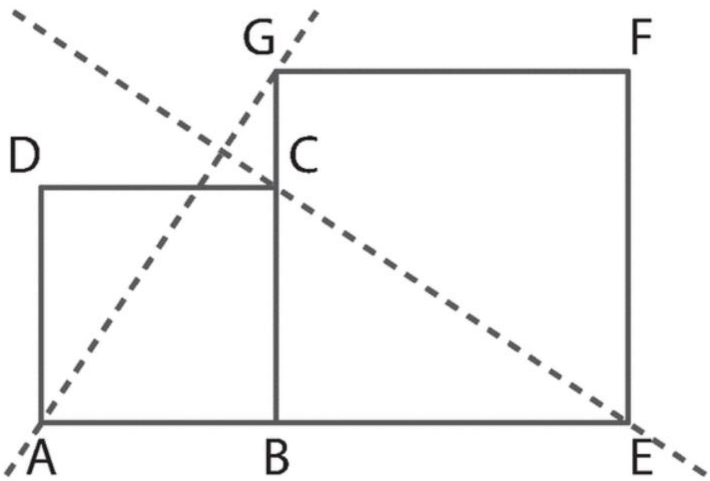
Situation 2



Dans un repère orthonormé on place les points A, B, C et D comme l'indique la figure suivante.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DG}$.
2. Calculer $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DG}$.
3. Que peut-on en déduire ?

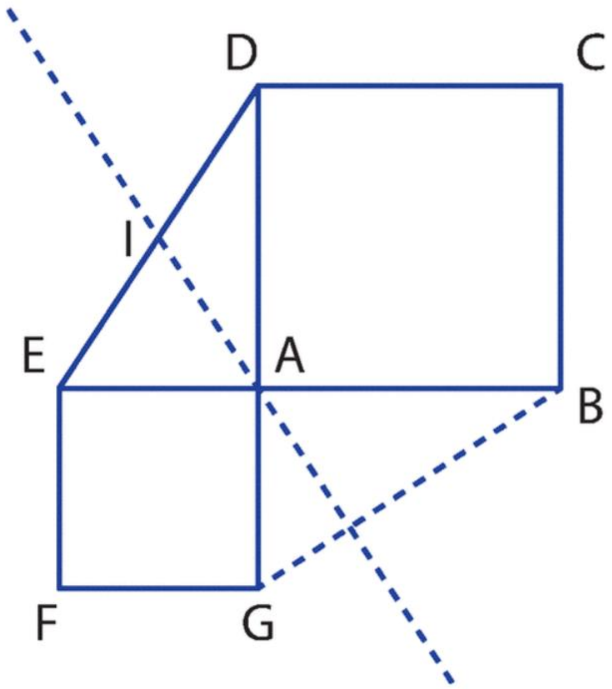
Situation 3



On considère deux carrés ABCD et BEFG disposés comme l'indique la figure ci-contre et tels que $AB = 1$ et $BE = a$ pour une valeur positive de a quelconque. On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{CE}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CE}$. Le résultat obtenu dépend-il de la valeur de a ?
3. Que peut-on en déduire pour la position relative des droites (AG) et (CE)

Situation 4

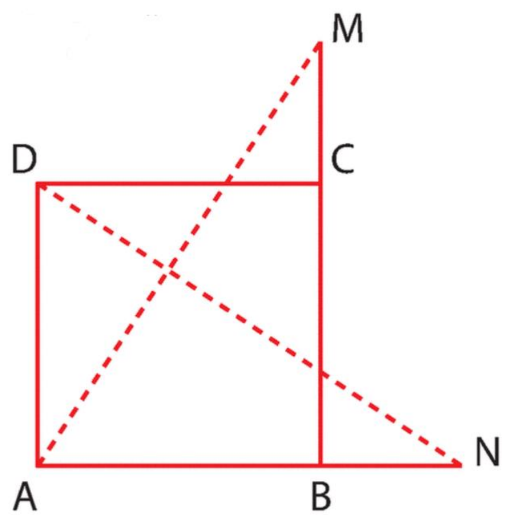


On considère deux carrés ABCD et AEFG disposés comme l'indique la figure ci-contre et tels que $AB=1$ et $AE=a$ pour une valeur positive de a quelconque. On se place dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$.

Le point I est le milieu du segment [ED].

1. Déterminer les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BG}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BG}$. Le résultat obtenu dépend-il de la valeur de a ?
3. Que peut-on en déduire pour la position relative de (AI) et (BG) ?

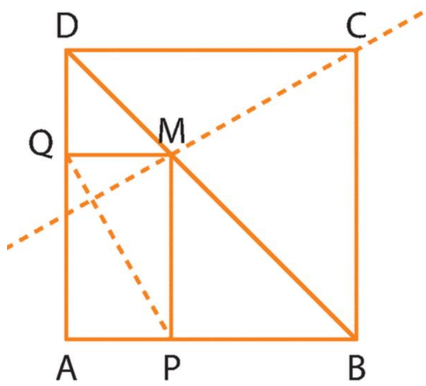
Situation 5



ABCD est un carré de coté 1. Les points N et M sont placés respectivement sur la droite (AB) et sur la droite (BC) à l'extérieur du carré comme l'indique la figure ci-contre, de telle sorte que $BN=CM=a$ pour une valeur positive de a quelconque. On se place dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$

1. Déterminer les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{DN}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DN}$. Le résultat obtenu dépend-il de la valeur de a ?
3. Que peut-on en déduire pour la position relative de (AM) et (DN) ?

Situation 6

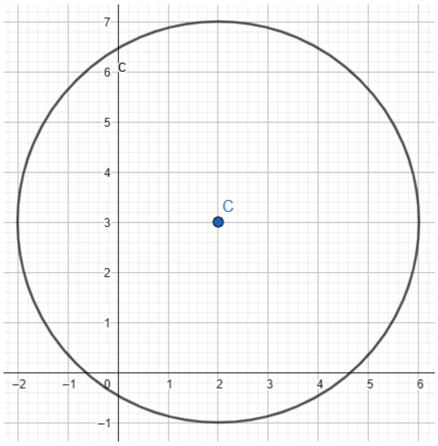


ABCD est un carré de coté 1. Le point M est un point quelconque de la diagonale [BD]. Les points P et Q sont les projetés orthogonaux du point M respectivement sur les cotés [AB] et [AD] comme l'indique la figure ci-contre.

A l'aide des coordonnées de $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{MC}$ dans un repère bien choisi, démontrer que (PQ) et (MC) sont perpendiculaires.

Savoir déterminer l'équation cartésienne d'un cercle

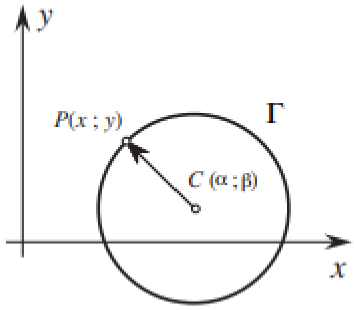
Dans un cas particulier



On considère le cercle de centre $C(2;3)$ et de rayon $R=4$ et on considère un point $M(x;y)$ qui appartient au cercle.

1. Ecrire en fonction de x et y la relation $CM^2 = R^2$ caractérisant l'appartenance du point M au cercle.
2. Proposer une version partiellement factorisée puis une version complètement développée de ce que l'on appellera l'équation du cercle dans le repère.

Dans le cas général



Expliquer pourquoi l'équation du cercle de centre $C(\alpha;\beta)$ et de rayon R peut s'exprimer des deux manières suivantes :

- $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$,
- $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Exercices d'application directe

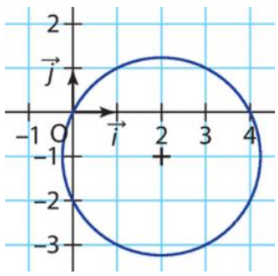
1. Déterminer l'équation du cercle de centre $C(4;-1)$ et de rayon $R=3$ aussi bien sous forme partiellement factorisée que sous forme développée.

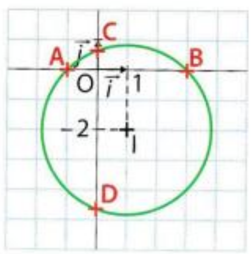
2. Montrer que l'ensemble de points proposés est un cercle dont on précisera le centre et le rayon : $x^2+y^2-2x-y+1=0$, $x^2-3x+y^2+4y=0$, $x^2+y^2-2x+4y=0$.

3. Les équations développées suivantes sont-elles les équations d'un cercle ? Si oui préciser les coordonnées du centre et la valeur du rayon :
   a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$ **b)** $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$
   c) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$ **d)** $x^2 + y^2 + x = 0$

4. Déterminer l'équation du cercle défini par les conditions suivantes :
   a) le centre est $C(2 ; -3)$ et le rayon vaut 7
   b) le cercle passe par l'origine et son centre est $C(6 ; -8)$
   c) $[AB]$ est un diamètre du cercle où $A(3 ; 2)$ $B(-1 ; 6)$

5. Déterminer pour les deux cercles proposés ci-contre leur équation développée. Dans chaque cas déterminer algébriquement (c'est- à-dire par calcul) les coordonnées des points d'intersection avec les deux axes du repère.





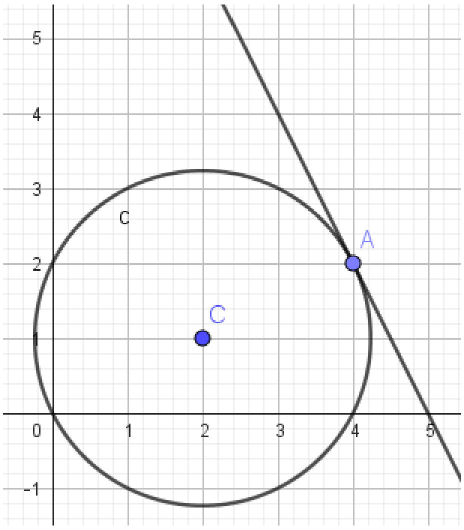
Pour récapituler sur les équations cartésiennes d'un cercle

- Le cercle de **centre** $C(x_C;y_C)$ et de **rayon** R est l'ensemble des points M du plan tels que $\boxed{IM = R}$. Une **équation de ce cercle** est alors $\boxed{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=R^2}$.

- Tout cercle du plan admet une équation développée du type $\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$ où a, b et c sont trois réels que l'on peut déterminer à l'aide de l'équation précédente.

Pour (re)mettre en place les équations cartésiennes d'une droite

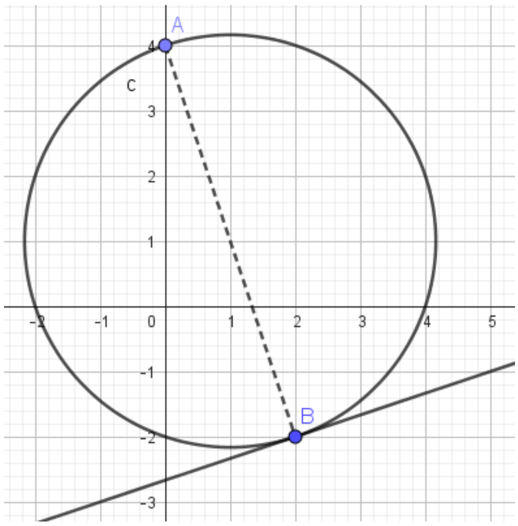
Exercice d'application directe



On considère le cercle de centre $C(2;1)$ passant par l'origine du repère.

1. Déterminer par un raisonnement détaillé une équation cartésienne de ce cercle.
2. Le point $A(4;2)$ appartient-il au cercle ? Justifier la réponse par un calcul.
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente au cercle au point A.

Autre exercice d'application directe



On considère le cercle de diamètre $[AB]$ où les points sont définis par $A(0;4)$ et $B(2;-2)$.

6. Déterminer par un raisonnement détaillé une équation cartésienne de ce cercle.
7. Déterminer une équation cartésienne de la tangente au cercle au point B.

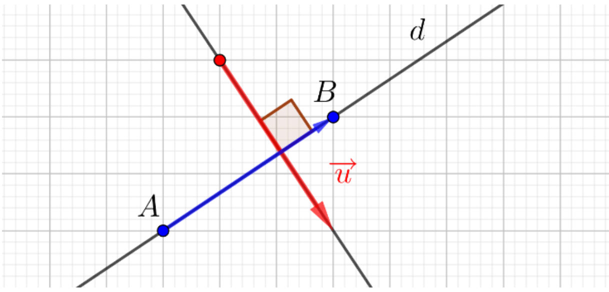
Pour récapituler sur les équations cartésiennes des droites obtenues à partir d'un vecteur normal

- Si $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}$ est un **vecteur normal** de la droite Δ, alors une équation cartésienne de la droite Δ est de la forme $\boxed{ax+by+c=0}$.

- Réciproquement, si une équation cartésienne d'une droite Δ est de la forme $\boxed{ax+by+c=0}$ alors le vecteur $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}$ est un **vecteur normal**.

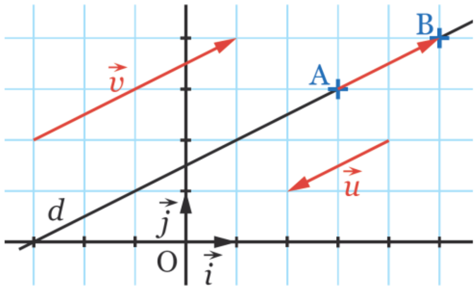
Vecteur directeur, vecteur normal

Situation 1



Proposer un vecteur directeur de la droite (d) proposée ci-contre. Proposer un vecteur normal à la droite (d). Que peut-on dire des coordonnées de ces deux vecteurs ?

Situation 2



Proposer plusieurs vecteurs directeurs de la droite (d) proposée ci-contre. Proposer plusieurs vecteurs normaux à la droite (d). Déterminer à l'aide d'un vecteurs normaux une équation cartésienne de la droite (d). Que se passe-t-il si on utilise un autre vecteur normal ?

Situation 3

On considère quatre droites données par leurs équations cartésiennes et quatre vecteurs. Associer à chaque droite de la colonne de gauche un vecteur directeur et un vecteur directeur donné dans la colonne de droite.

Équation de droite	Vecteurs
1. $2x-3y+1=0$	**a)** $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$
2. $-2x+y-3=0$	**b)** $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$
3. $3x+2y=0$	**c)** $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$
4. $x+2y+4=0$	**d)** $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Situation 4

Déterminer un vecteur normal et un vecteur directeur des droites dont on propose ci-dessous les équations sous forme cartésienne ou bien sous forme réduite.

a) $2x+y-3=0$ **b)** $-3x+5y=0$ **c)** $5x-3y+2=0$ **d)** $-2x-4y+1=0$

a) $y=2x-3$ **b)** $y=4x$ **c)** $y=-3x+1$ **d)** $y=-7x-2$

Même consigne avec les quatre droites suivantes :

a) la droite d'équation cartésienne $4x+5y-1=0$
b) la droite d'équation cartésienne $-2x+7y=0$
c) la droite d'équation réduite $y=-3x+4$
d) la droite d'équation réduite $y=-5x+3$

Situation 5

Après avoir déterminé un vecteur directeur puis un vecteur normal, déterminer une équation cartésienne des 4 droites ci-contre.

a) la droite (AB) avec A(4 ; – 2) et B(– 1 ; – 3)
b) la droite (EF) avec E(0 ; – 2) et F(–3 ; – 1)
c) la droite (MN) avec M(2 ; 1) et N(– 3 ; 1)
d) la droite (DG) avec D(– 4 ; 0) et G(1 ; 0)

Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Situation 1

Trouver les coordonnées du point H intersection de la droite d_1 d'équation cartésienne $x-2y+5=0$ et de la droite d_2 perpendiculaire à d_1 passant par le point $A(4;1)$. Que peut-on dire du point H ?

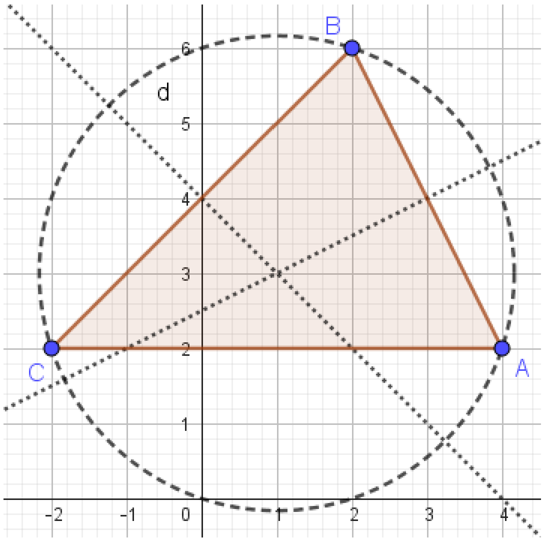
Situation 2

Trouver les coordonnées du point K intersection de la droite d_1 d'équation cartésienne $x-2y+3=0$ et de la droite d_2 perpendiculaire à d_1 passant par le point $A(5;-1)$. Que peut-on dire du point K ? Déterminer la distance AK.

Situation 3

On considère le triangle ABC constitué des trois points $A(4;2)$, $B(2;6)$ et $C(-2;2)$.

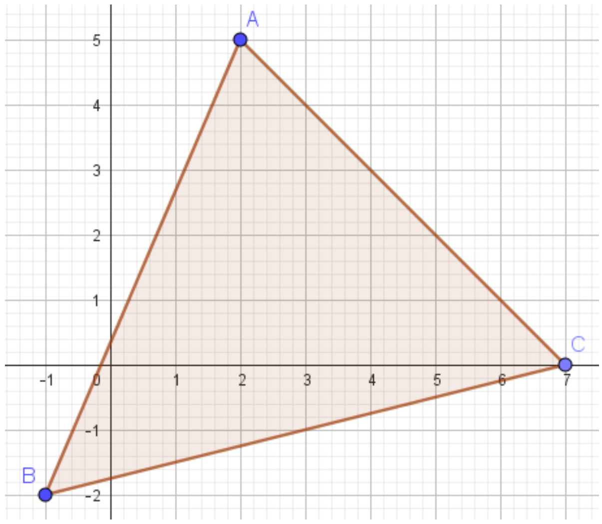
1. Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice du segment [BA].
2. Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice du segment [BC].
3. En déduire l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC (on déterminera son centre et son rayon).



Situation 4

On considère le triangle ABC constitué des trois points $A(2;5)$, $B(-1;-2)$ et $C(7;0)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue du sommet A. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue du sommet B.
2. Sauriez-vous en déduire les coordonnées de l'orthocentre de ce triangle (point d'intersection des hauteurs) ?



3. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment [BC]. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment [AC]. Sauriez-vous en déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC ? On dit que le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité sont alignés : est-ce vrai ?