Définition **Avec le cosinus**

• On appelle **produit scalaire** de ces deux vecteurs non nuls, le réel défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, le produit scalaire s'écrit :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$

• De plus si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Propriété **Symétrie**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

Propriété **Cas de la colinéarité**

Lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** alors :

• $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$ s'ils sont de **même sens**.

• $\vec{u}\cdot\vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$ s'ils sont de **sens contraires.**

Propriété **Avec la projection orthogonale**

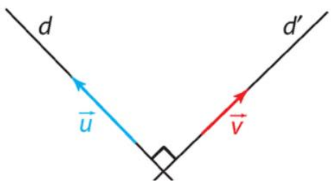
Soit A, B et C trois points et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) alors :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.

Définition **Orthogonalité**

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si leur **produit scalaire est nul :** $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$



Propriété **Produit scalaire avec les normes**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2)$.

Propriété **Produit scalaire avec les coordonnées**

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

Propriétés **Bilinéarité, carré scalaire, norme d'une somme**

Soit *u*, *v* et *w*, trois vecteurs, et *k* un réel.

① $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

② $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$

③ $\vec{u}\cdot\vec{u} = (\vec{u})^2 = ||\vec{u}||^2$

④ $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$

Propriété **Formule d'Al-Kashi**

Dans un triangle ABC quelconque, on a, par exemple, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

Propriété Transformation d'une expression

Étant donné deux points A et B et leur milieu I, on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

Propriété Cercle et triangle rectangle

Un triangle ABC est rectangle en C si et seulement si le point C appartient au cercle de diamètre [AB], avec C différent de A et B.

Propriété Cercle

Étant donné deux points A et B, l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre le segment [AB].

Propriété Équation cartésienne d'un cercle

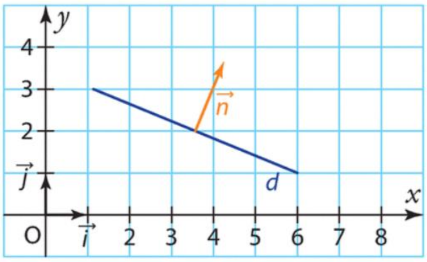
Une équation du cercle de centre le point A(a ; b) et de rayon r est de la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Démonstration

Le cercle de centre A(a ; b) et de rayon r est l'ensemble des points M(x ; y) tels que AM = r,
soit $AM = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = r \Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Définition Vecteur normal

Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal à une droite d s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de cette droite.



Propriété Vecteur normal et équation

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite d dont une équation cartésienne est $ax + by + c = 0$.

Propriété Équation cartésienne d'une droite

La droite qui admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ comme vecteur normal et qui passe par le point A(x_A ; y_A) a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

Démonstration

Un point M appartient à la droite si et seulement si les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ sont orthogonaux,
c'est-à-dire si leur produit scalaire est nul ($\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$), soit $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$,
qui peut s'écrire $ax + by + (-ax_A - by_A) = 0$, ce qui correspond à la forme indiquée.