La formule de dérivée d'un produit

On propose ci-dessous les différentes étapes de la démonstration de la formule de dérivée d'un produit de deux fonctions. Certaines étapes ont été malencontreusement effacées. Recopier et compléter les expressions de l'étape 2, de l'étape 3 et de l'étape 4 reportées ci-dessous afin de retrouver l'intégralité de la démonstration.

Départ
On considère une fonction s'écrivant comme le produit de deux fonctions.

$$f(x)=u(x)\times v(x)$$

Etape 1
On connait la formule du taux de variation d'une fonction.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Etape 2
On applique la définition du taux de variation à la fonction de départ.

$$\frac{?\times ?-?\times ?}{h}$$

Etape 3
On introduit deux quantités qui, par développement, s'annulent.

$$\frac{[?-?]\times ?+?\times[?-?]}{h}$$

Etape 4
On réorganise l'expression et on envisage le passage la limite lorsque $h\to 0$.

$$\underbrace{\frac{?-?}{h}}_{u'(a)}\times ?+?\times\underbrace{\frac{?-?}{h}}_{v'(a)}$$

Arrivée
On retrouve l'expression de la dérivée du quotient de deux fonctions.

$$u'(a)\times v(a)+u(a)\times v'(a)$$

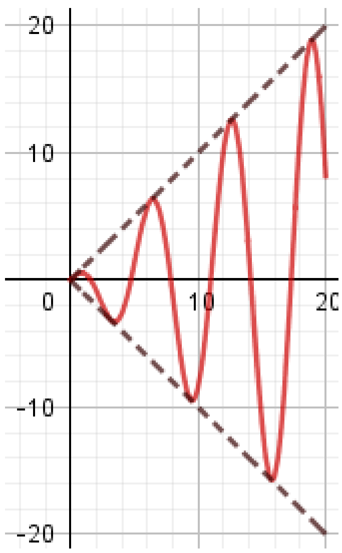
Application directe

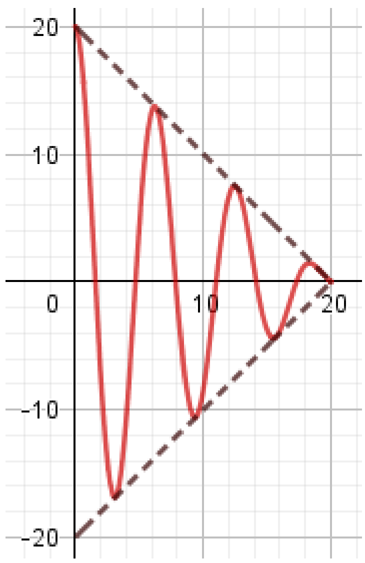
On considère ci-contre les représentations graphiques de deux fonctions proposées sur l'intervalle [0 ; 20].

$$f(x)=x\times\cos(x)$$

$$g(x)=(20-x)\times\cos(x)$$

Sauriez-vous déterminer les dérivées respectives de ces deux fonctions ? Expliquer.





La formule de dérivée d'une fonction composée avec une fonction affine

On propose ci-dessous les différentes étapes de la démonstration de la formule de dérivée d'une fonction composée avec une fonction affine. Toutes les étapes sont indiquées et valident le résultat important suivant : Si $f(x)=u(mx+p)$ alors $f'(x)=m\times u'(mx+p)$.

Départ
On considère une fonction composée avec une fonction affine.

$$f(x)=u(mx+p)$$

Etape 1
On connait la formule du taux de variation d'une fonction.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Etape 2
On applique la définition du taux de variation à la fonction de départ.

$$\frac{u(m(a+h)+p)-u(ma+p)}{h}$$

Etape 3
On introduit au numérateur et au dénominateur deux quantités identiques qui s'annulent.

$$\frac{u(ma+p+mh)-u(ma+p)}{mh}\times\frac{mh}{h}$$

Etape 4
On réorganise l'expression et on envisage le passage la limite lorsque $mh \to 0$.

$$\underbrace{\frac{u(ma+p+mh)-u(ma+p)}{mh}}_{u'(ma+p)}\times\frac{mh}{h}$$

Arrivée
On retrouve l'expression de la dérivée d'une fonction composée avec une fonction affine.

$$m\times u'(ma+p)$$

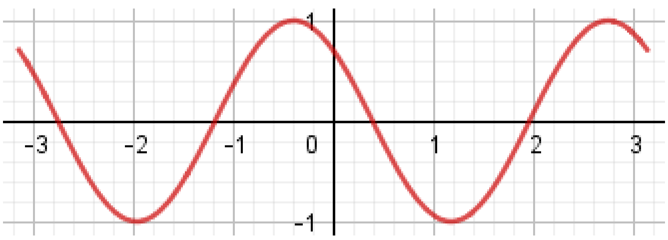
Application directe

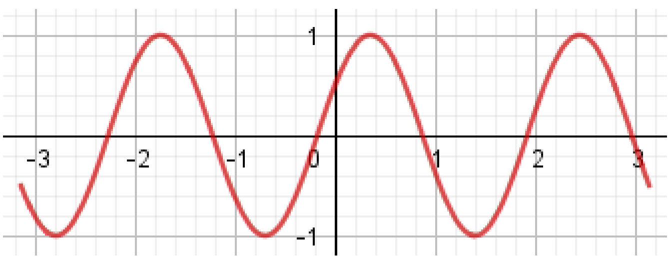
On considère ci-contre les représentations graphiques de deux fonctions trigonométriques sur $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$g(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$$

Sauriez-vous déterminer les dérivées respectives de ces deux fonctions ?



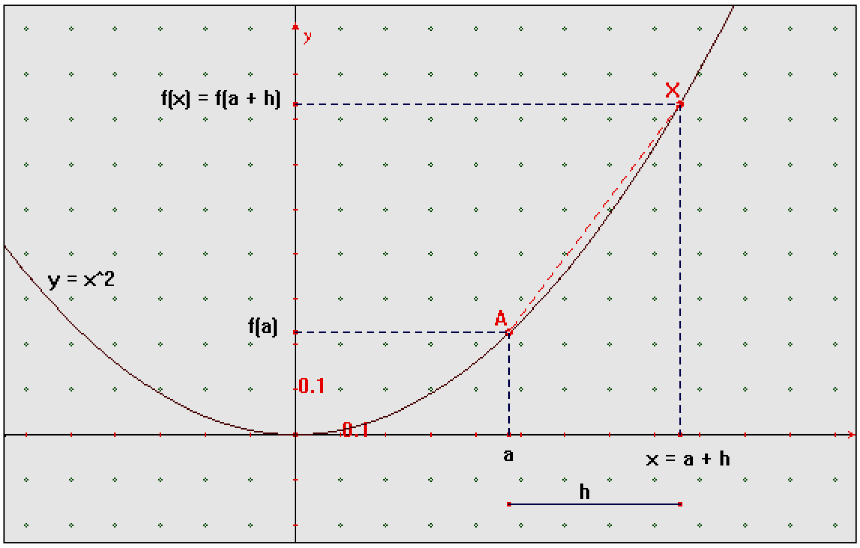


Rappels

Le taux d'accroissement d'une fonction f entre a et $a+h$ est égal à :

$$\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Une fonction est **dérivable** en a si le taux d'accroissement de cette fonction admet une **unique** limite **finie** quand $h \to 0$.



La relation d'Euler

Si h est « **petit** » alors : $\boxed{f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)}$ $\langle Euler \rangle$. Cette égalité est la relation d'Euler.

Recherche d'une nouvelle fonction

Le but de cette activité est de représenter graphiquement la fonction f qui vérifie les deux conditions suivantes : $f(0)=1$ et $f'(x)=f(x)$ pour tout x réel.

La relation d'Euler pour un h petit et positif

1. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0$ et $h=0{,}1$. Déterminer $f(0{,}1)$.
2. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0{,}1$ et $h=0{,}1$. Déterminer $f(0{,}2)$.
3. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0{,}2$ et $h=0{,}1$. Déterminer $f(0{,}3)$ à 10^{-2} près.
4. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0{,}3$ et $h=0{,}1$. Déterminer $f(0{,}4)$ à 10^{-2} près.
5. Continuer le travail. Etablir le tableau des valeurs de cette fonction sur l'intervalle $[0;2]$

La relation d'Euler pour un h petit et négatif

1. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0$ et $h=-0{,}1$. Déterminer $f(-0{,}1)$.
2. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=-0{,}1$ et $h=-0{,}1$. Déterminer $f(-0{,}2)$.
3. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=-0{,}2$ et $h=-0{,}1$. Déterminer $f(-0{,}3)$ à 10^{-2} près.
4. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=-0{,}3$ et $h=-0{,}1$. Déterminer $f(-0{,}4)$ à 10^{-2} près.
5. Continuer le travail. Etablir le tableau des valeurs de cette fonction sur l'intervalle $[-2;0]$.

Utilisation d'un tableur et d'un grapheur

Geogebra présente les deux fonctionnalités « tableur » et « grapheur ». Utilisez ce logiciel pour tracer la représentation graphique de la fonction exponentielle à l'aide de la méthode d'Euler.

Propriété et définition

Il existe une fonction f et une seule définie et dérivable sur $]-\infty;+\infty[$ vérifiant les deux conditions suivantes : $f(0)=1$ et $f'(x)=f(x)$ pour tout x réel. Cette fonction est appelée fonction exponentielle et est notée $f(x)=\exp(x)$.

Démonstration de l'unicité

Supposons qu'il existe deux fonctions f et g qui vérifient : $f'(x)=f(x)$ et $f(0)=1$ et $g'(x)=g(x)$ et $g(0)=1$. Considérons la fonction h définie par $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

1. Démontrer que la fonction h est une fonction constante. Déterminez cette constante.
2. En déduire qu'il n'existe qu'une seule fonction définie comme la fonction exponentielle.

Propriété algébrique fondamentale

Pour tous réels x et y on a la relation $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$. Cette propriété indique que l'exponentielle transforme une somme en produit d'exponentielles.

Démonstration de cette propriété

Soit y un nombre réel fixé. Considérons la fonction k définie par $k(x)=\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$.

1. Démontrer que la fonction k est une fonction constante. Déterminez cette constante.
2. En déduire que pour tous réels x et y on a la relation $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$.

Propriétés algébriques induites

Pour tous réels x et y on a la relation $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$ et la relation $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Démonstration des deux propriétés

A l'aide de la relation fondamentale déjà démontrée, prouver la validité des deux autres relations.

Lien avec les suites géométriques

Soit a un nombre réel et (u_n) la suite de terme général $u_n=\exp(na)$ où n est un entier naturel. La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=1$ et de raison $\exp(a)$. Pour tout entier naturel n et tout réel a on a $\exp(na)=\left[\exp(a)\right]^n$.

Démonstration

Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et en déduire la nature de la suite (u_n). Préciser le premier terme et la raison. Conclure.

Définition et notation

Le nombre $\exp(1)$ est noté e. Une valeur approchée de ce nombre au millième est $e \simeq 2,718$.
D'après la propriété précédente avec $a = 1$, pour tout entier naturel n, $\exp(n) = [\exp(1)]^n = e^n$.
Par extension de la propriété précédente à l'ensemble des réels on notera désormais $\exp(x) = e^x$.

Signe et tableau de variation

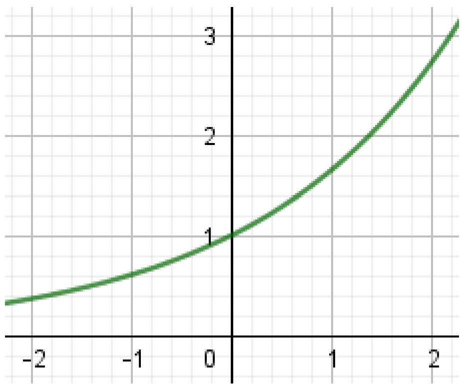
La fonction exponentielle est strictement positive et strictement croissante.

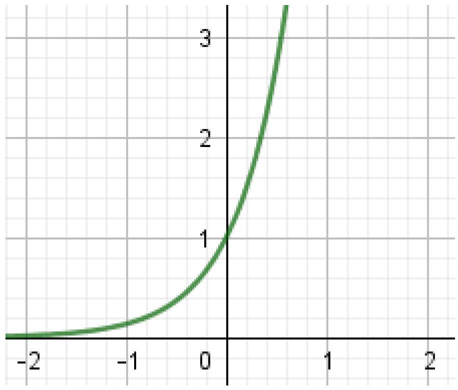
Démonstrations

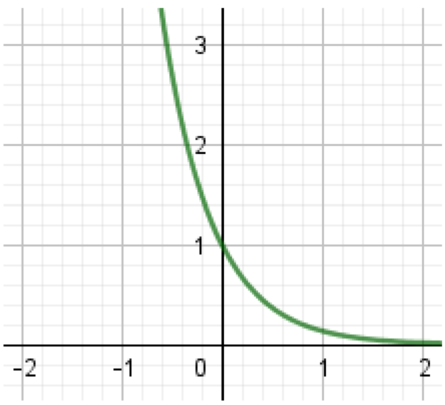
Considérons un réel x quelconque. En écrivant $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$, montrer que $\exp(x) = \left[\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$.
En déduire le signe de la fonction exponentielle ainsi que son sens de variation. Expliquer.

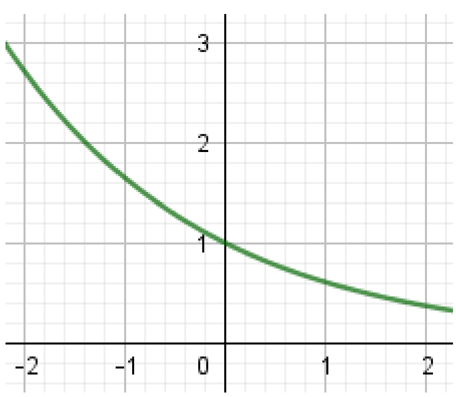
Les fonctions exponentielles

On considère les fonctions $f_{-2}(x) = e^{-2x}$, $f_{-0,5}(x) = e^{-0,5x}$, $f_{0,5}(x) = e^{0,5x}$ et $f_2(x) = e^{2x}$.
Associer à chacune des quatre fonctions sa représentation graphique. Expliquer votre choix*.







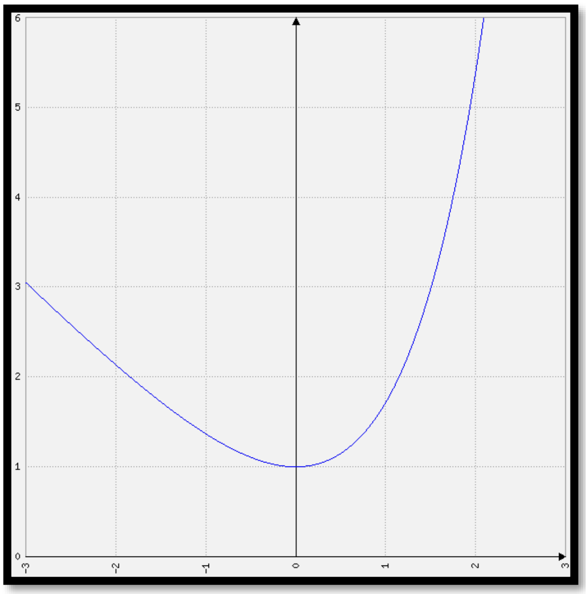


Dérivée et convexité

La dérivée de la fonction exponentielle e est **elle-même**. Ainsi si $f(x)=e^x$ alors $f'(x)=e^x$.
La dérivée seconde étant $f''(x)=e^x>0$, la fonction exponentielle de base e est donc **convexe**.

Exercices d'application directe

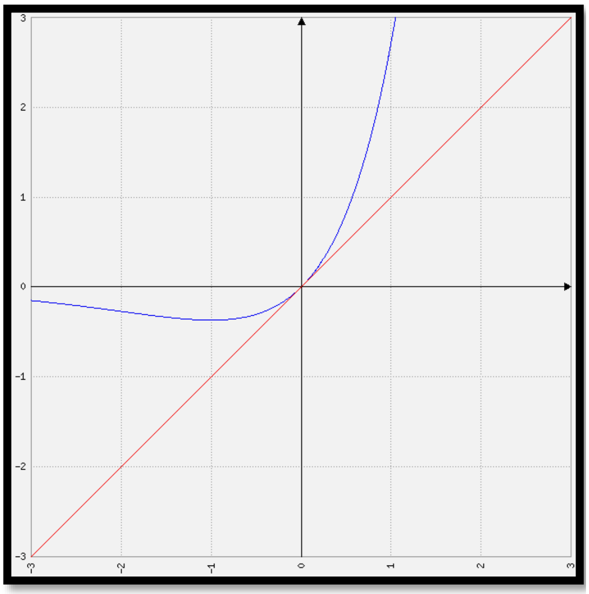
Exercice 1



On considère la fonction f définie par $f(x)=e^x-x$ sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction.
4. Pouvez-vous en déduire la position relative de la courbe de la fonction exponentielle par rapport à $y=x$?

Exercice 2



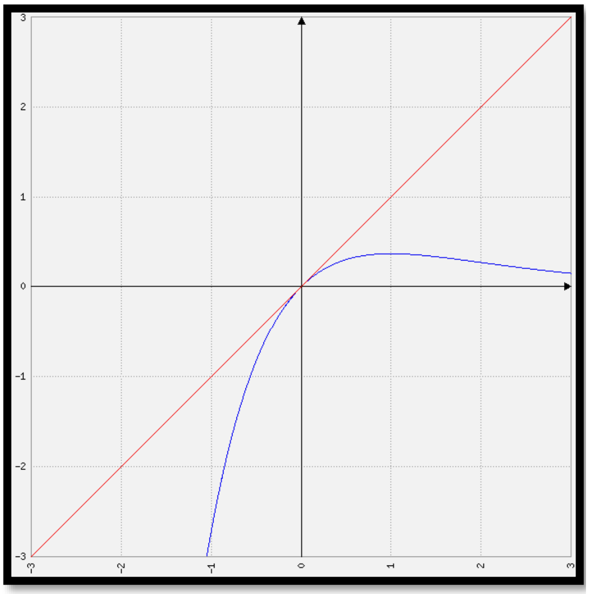
On considère la fonction g définie par $g(x)=x\times e^x$ sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. Dresser le tableau de signe de $g'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction.
4. Pouvez-vous déterminer la position relative de la courbe de la fonction g par rapport à la droite $y=x$?

Exercice 3

1. On considère la fonction h définie par $h(x)=(2x+1)e^x$.
   Calculer $h'(x)$ et en déduire les variations de la fonction h.
2. On considère la fonction k définie par $k(x)=(2x-1)e^x$.
   Calculer $k'(x)$ et en déduire les variations de la fonction k.
   Sauriez-vous préciser la convexité de la courbe représentative de k ?

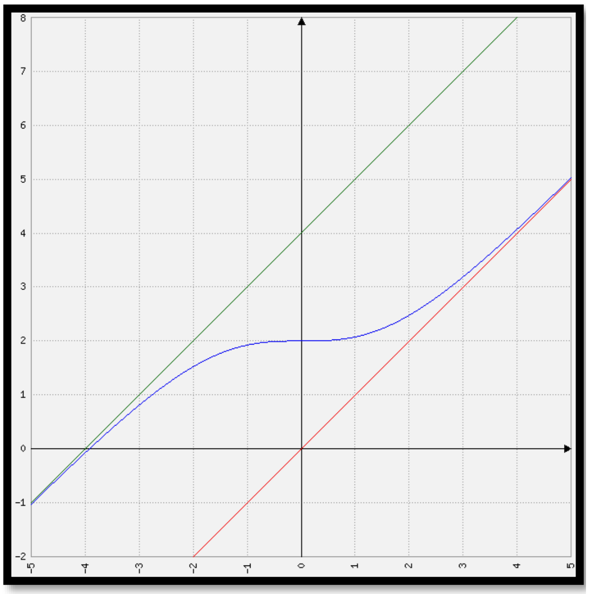
Exercice 4



On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction.
4. Pouvez-vous déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à la droite d'équation $y=x$?

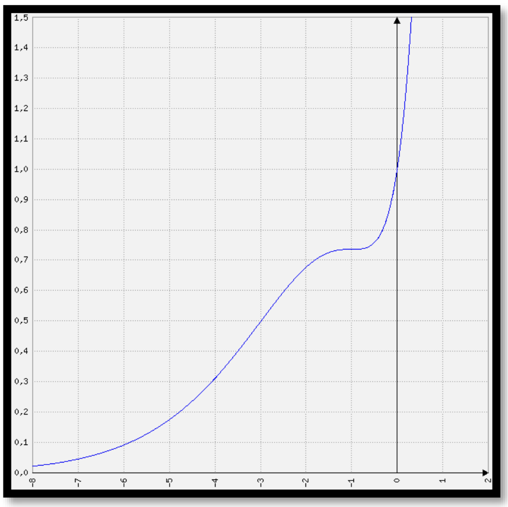
Exercice 5



On considère la fonction g définie par $g(x)=x+\dfrac{4}{1+e^x}$ sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.

1. Démontrer que $g'(x)=\dfrac{\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x+1\right)^2}$.
2. Dresser le tableau de signe de $g'(x)$ et en déduire les variations de la fonction.
3. Pouvez-vous déterminer la position relative de la courbe g par rapport aux droites d'équation $y=x$ et $y=x+4$?

Exercice 6



On considère la fonction h définie par $h(x)=\left(x^2+1\right)e^x$ sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.

Define $f(x)=\left(x^2+1\right)\cdot e^x$	*Terminé*
$\dfrac{d}{dx}(f(x))$	$\left(x^2+2\cdot x+1\right)\cdot e^x$
$\dfrac{d^2}{dx^2}(f(x))$	$\left(x^2+4\cdot x+3\right)\cdot e^x$

Déterminer les points d'inflexion de la fonction h.

Définition

Soit u une fonction définie sur un intervalle I. La fonction f définie sur I par $\boxed{f(x)=e^{u(x)}}$ s'appelle l'exponentielle de u ou **l'exponentielle composée** avec la fonction u.

Calcul de la dérivée

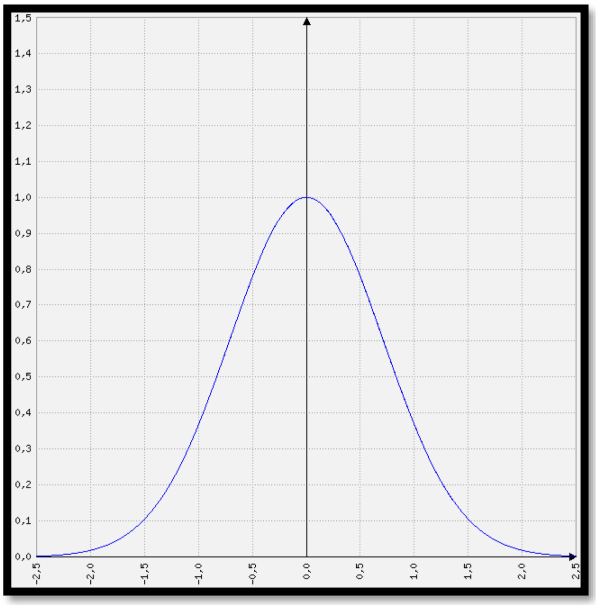
La fonction f définie sur I par $f(x)=e^{u(x)}$ est dérivable et sa dérivée est : $\boxed{f(x)=u'(x)\times e^{u(x)}}$.

Cas particuliers et conséquences

- La dérivée de la fonction g définie par $g(x)=e^{-x}$ est $g'(x)=-e^{-x}$,
- La dérivée de la fonction h définie par $h(x)=e^{ax+b}$ est $h'(x)=a\times e^{ax+b}$,
- La dérivée de la fonction k définie par $k(x)=C\times e^{ax+b}$ est $k'(x)=C\times a\times e^{ax+b}$.

Exercice d'application directe

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=e^{-x^2}$. On propose ci-contre sa courbe.



1. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
2. En déduire les variations de f sur IR.
3. A l'aide du graphique conjecturer le nombre de points d'inflexion de f.
4. Calculer $f''(x)$.
5. Etudier le signe de la dérivée seconde et en déduire la convexité de f sur IR

Etude d'une production

Une société extrait du gravier pour la construction d'autoroutes. Elle envisage l'ouverture d'un nouveau site d'extraction. On admet qu'au bout de x centaines de jours d'exploitation, la production journalière en milliers de tonnes est donné par $f(x)=(2x^2+3x)e^{-x}$ pour $0\leq x\leq 6$.

1. Montrer que $f'(x)=(-2x^2+x+3)e^{-x}$. Dresser le tableau de variation de f sur $[0;6]$.
2. Déterminer au bout de combien de jours après l'ouverture du site, la production journalière sera maximale. Quelle est cette production maximale en milliers de tonnes ?
3. Au bout de combien de jours la production journalière sera-t-elle revenue à 1000 tonnes ?