Situation 1

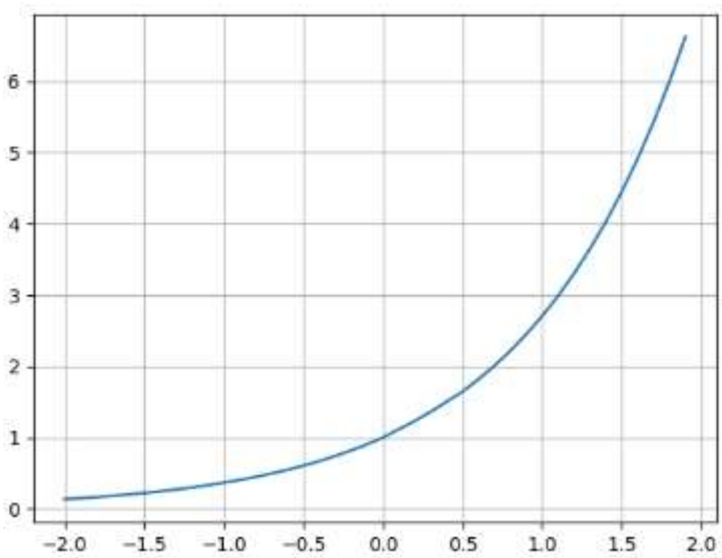
Le but est ici de construire point par point la fonction f qui vérifie les deux conditions suivantes : $f(0)=1$ et $f'(x)=f(x)$ pour tout x réel. Cette fonction est appelée fonction exponentielle. On se base pour cela sur l'approximation d'Euler qui indique que pour une valeur de a fixée et pour une valeur de h « petite » on a la relation $f(a+h)\approx f(a)+h\times f'(a)$ qui se réécrit dans le cas de la fonction exponentielle $f(a+h)\approx f(a)\times(1+h)$.

On se propose, à l'aide de cette relation, d'approcher l'image d'un réel a positif quelconque par la fonction exponentielle avec un pas de progression h donné. Compléter pour cela le script de la fonction « exp(a,h) ».

```
def exp(a,h):
  x=...
  y=...
  while ...:
    x=...
    y=...
  return ...
```

Ecrire le script d'une nouvelle fonction « expn(b,h) »qui renvoie une valeur approchée de l'image d'un réel b négatif quelconque par la fonction exponentielle avec un pas de progression h donné. Reprendre et modifier pour cela le script de la fonction « exp(a,h) ».

Ecrire un algorithme utilisant les deux fonctions précédentes et permettant d'obtenir, comme proposé ci-contre, une ébauche de la courbe représentative de la fonction exponentielle.



Situation 2

Au milieu du XVII siècle, Jacques Bernouilli, mathématicien suisse, travaille sur une suite qui converge vers le nombre « e ». Cette suite est définie pour tout $n\geq 1$ par $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Compléter le script de la fonction « u(n) » qui prend pout argument l'indice « n » et qui renvoie la valeur du terme de la suite.

Tester ensuite la fonction « precision(p) » proposée ci-contre avec la valeur « p=2 » et interpréter de manière précise et détaillée le résultat obtenu.

```
def u(n):
  u=...
  return ...

from math import e

def precision(p):
  n=1
  while abs(u(n)-e)>10**(-p):
    n=n+1
  return (n,u(n))
```

Utiliser l'algorithme pour déterminer à partir de quelle valeur de « n » on obtient avec cette suite une valeur approchée du nombre « e » au centième près, au millième près, au millionième près.

Situation 3

Le mathématicien Brook Taylor a établi une formule qui a permis au mathématicien Euler de calculer au XVIII siècle de calculer une valeur approchée du nombre « e ». La formule est :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

On se propose de programmer un algorithme permettant d'approcher d'aussi près que l'on veut le nombre « e » à partir de ce développement limité. On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ et on indique que la fonction factorielle se trouve dans la bibliothèque math sous le nom « factorial ».

Compléter le script de la fonction « u(n) » qui prend pout argument l'indice « n » et qui renvoie l'approximation du nombre « e » correspondant à un développement limité d'ordre « n ».

Tester ensuite la fonction « precision(p) » proposée ci-contre avec la valeur « p=2 » et interpréter de manière précise et détaillée le résultat obtenu. Tester avec les valeurs « p=3 » puis « p=6 » et envisager un commentaire en terme de vitesse de convergence.

```
from math import factorial

def u(n):
  u=...
  for k in range(...,...):
    u=...
  return u

from math import e

def precision(p):
  n=1
  while abs(u(n)-e)>10**(-p):
    n=n+1
  return (n,u(n))
```

Situation 4

On considère la courbe C représentative de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ dans un repère orthonormé du plan.

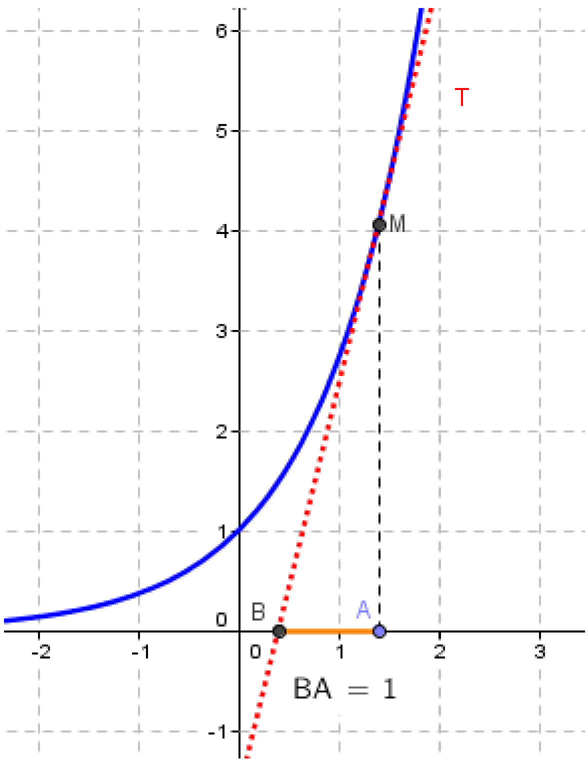
On considère a un réel quelconque.

Le point M est le point de la courbe C d'abscisse a. La droite T est la tangente à la courbe C passant par M. Cette droite coupe l'axe des abscisses en B.

A l'aide du logiciel Geogebra, construire la courbe C, le point A, le point M, la tangente T et le point B.

Emettre une conjecture sur la longueur du segment [BA] appelé sous-tangente.

Démontrer cette conjecture.



Réciproquement, démontrer que si une fonction dérivable, strictement positive et croissante admet une sous-tangente constante et égale à 1 alors cette fonction est la fonction exponentielle.

Apport théorique (rappel)

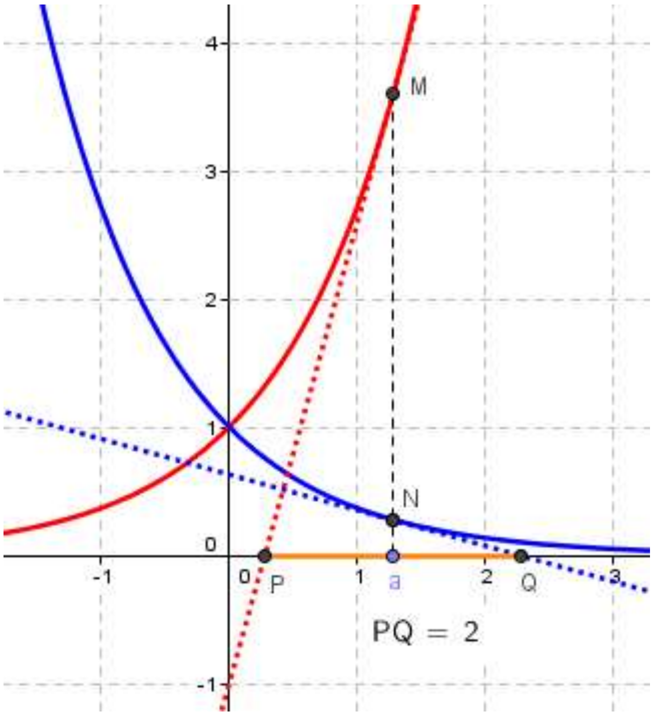
Si f est une fonction dérivable définie par $f(x)=g(mx+p)$ alors $f'(x)=m\times g'(mx+p)$.

Situation 5

On considère les courbes C1 et C2 représentatives des fonctions $f_1(x)=e^x$ et $f_2(x)=e^{-x}$ dans un repère orthonormé du plan.

On considère a un réel quelconque.

Les points M et N sont les points de C1 et de C2 d'abscisse a. Les droites T1 et T2 sont les tangentes à C1 et C2 en M et N. Ces deux droites coupent l'axe des abscisses respectivement en P et Q.



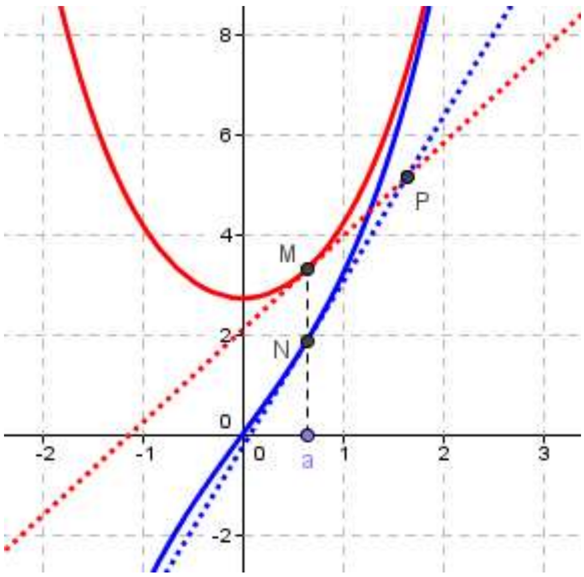
- A l'aide du logiciel Geogebra construire les courbes, les tangentes et les points P et Q.
- Emettre une conjecture sur la position relative des droites T1 et T2. Emettre une conjecture sur la longueur du segment [PQ]. Démontrer les deux conjectures énoncées.

Situation 6

On considère les fonctions f et g définies par $f(x)=\dfrac{e^{1+x}+e^{1-x}}{2}$ et $g(x)=\dfrac{e^{1+x}-e^{1-x}}{2}$.

On note C_f et C_g les courbes représentatives des deux fonctions f et g. On considère un réel a quelconque. On note M le point de C_f d'abscisse a. On note N le point de C_g d'abscisse a. Les tangentes aux courbes C_f et C_g aux points M et N se coupent en P.

Le but est d'étudier le lieu des points P.



- A l'aide du logiciel Geogebra, construire les courbes C_f et C_g, les points M, N et P.
- Emettre une conjecture sur le lieu des points P. Démontrer la conjecturé énoncée.