Multiples et diviseurs

- Définition : un **entier naturel** est un nombre **entier positif ou nul**.

- Définition : dire que l'entier naturel a est **un multiple de** l'entier naturel b signifie qu'il existe un entier k tel que $a = b \times k$.

- Remarque : cela signifie que le nombre a se situe « quelque part » **dans la table de multiplication** de b. L'entier k précise **à quel endroit** de la table il se trouve.

- Vocabulaire : lorsque l'entier naturel a est un multiple de l'entier naturel b on peut dire que b est **un diviseur de** a ou bien que a **est divisible par** b.

- Exemples : 15 **est un multiple de** 5 puisque $15 = 5 \times 3$. On dit aussi que 5 est **un diviseur de** 15 ou que 15 est **divisible par** 5.

Critères de divisibilité

- Divisibilité par 2 : un nombre est **divisible par 2** s'il est pair, c'est-à-dire s'il se termine par 0, par 2, par 4, par 6 ou par 8.

- Divisibilité par 5 : un nombre est **divisible par 5** s'il se termine par 0 ou par 5.

- Divisibilité par 3 : un nombre est **divisible par 3** si la somme de ses chiffres est elle-même un multiple de 3.

- Exemple : 564 est divisible par 3 car 5+6+4=15 qui est un multiple de 3.

- Divisibilité par 9 : un nombre est **divisible par 9** si la somme de ses chiffres est elle-même un multiple de 9.

- Exemple : 765 est divisible par 9 car 7+6+5=18 qui est un multiple de 9.

Nombres premiers

- Définition : un **nombre premier** est un entier naturel **qui admet exactement deux diviseurs** : **un** et **lui-même**.

- Exemples : voici ci-contre la liste des nombres premiers inférieurs à 100. Ils sont présentés dans une grille dans laquelle ils peuvent facilement être retrouvés en appliquant la méthode du crible d'Eratosthène. Cette méthode a été décrite et détaillée dans les activités.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Remarques : le nombre 1 n'est pas un nombre premier car il **admet un seul diviseur**. Le nombre 0 n'est pas un nombre premier car il admet une **infinité de diviseurs**. Le premier nombre premier est donc le nombre 2.

Décomposition en facteurs premiers

- Propriété : on **peut toujours décomposer** un nombre non premier **en produit de plusieurs facteurs premiers**. On parle alors de sa décomposition en facteurs premiers.

- Exemple : 588 est un nombre non premier. Il est divisible par 2 donc on peut écrire $588=2\times 294$. Mais 294 est aussi divisible par 2 donc on peut écrire $588=2\times 2\times 147$. Mais 147 est divisible par 3 donc on peut écrire $588=2\times 2\times 3\times 49$. Mais 49 est divisible par 7 donc on peut écrire $588=2\times 2\times 3\times 7\times 7$.

- Remarque : lorsque certains facteurs premiers se répètent dans la décomposition, on utilise **la notation puissance** comme l'indique l'exemple suivant : $588=2^2\times 3\times 7^2$.

Fractions irréductibles

- Définition : une fraction est dite **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur **n'ont pas de diviseur commun autre que le nombre 1**.

- Vocabulaire : on dit que le numérateur et le dénominateur sont **premiers entre eux**.

- Remarque : pour simplifier une fraction et la mettre sous forme irréductible on peut utiliser la décomposition en facteurs premiers du numérateur et celle du dénominateur.

- Exemple : $\frac{84}{120}=\frac{2\times 2\times 3\times 7}{2\times 2\times 2\times 3\times 5}=\frac{7}{10}$. On simplifie deux à deux les facteurs communs.

Calculs fractionnaires

- Addition de fractions : Pour **additionner** deux nombres en écriture fractionnaire de **même dénominateur**, on **additionne les numérateurs** et on **garde le dénominateur commun**. Ceci est valable aussi pour la **soustraction**.

- Remarque : Si les deux nombres en écriture fractionnaire n'ont pas le même dénominateur, on doit d'abord les **réduire au même dénominateur**.

- Multiplication de fractions : Pour **multiplier** deux nombres en écriture fractionnaire, on multiplie les **numérateurs entre eux** et les **dénominateurs entre eux**.

- Division de fractions : Pour **diviser** deux nombres en écriture fractionnaire, on multiplie le premier par **l'inverse** du second.

- Priorités de calcul : Dans une ligne de calcul, la multiplication et la division **ont priorité** sur l'addition et la soustraction.

Formules d'addition, de multiplication, de division

$$\boxed{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}}$$
Addition

$$\boxed{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}}$$
Multiplication

$$\boxed{\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}}$$
Division

La notation puissance

- Définition et notation : si n désigne un nombre entier positif, la **puissance n** du nombre relatif a est **le produit de n facteurs égaux** à a. On notera ce produit a^n et on lira cette notation « a puissance n ». Le nombre n est appelé **l'exposant**.

- Formule : $\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n fois}}}$.

- Extension de la définition et de la formule : si a est différent de 0, $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n fois}}}}$.

- Convention : pour tout nombre relatif non nul, $\boxed{a^0 = 1}$.

- Cas particuliers : pour tout nombre relatif $\boxed{a^1 = a}$ et si a est différent de 0 $\boxed{a^{-1} = \dfrac{1}{a}}$.

Calculs avec les puissances de 10

- Formule : pour tout n strictement positif, $\boxed{10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{\text{n fois}}}$ et $\boxed{10^{-n} = \dfrac{1}{\underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{\text{n fois}}}}$

- Règle du produit : **multiplier** deux puissances de 10 revient à **ajouter les exposants**.

- Règle du quotient : **diviser** deux puissances de 10 revient à **soustraire les exposants**.

- Règle de la puissance : **élever** une puissance de 10 **à une autre puissance** revient à **multiplier les exposants** entre eux.

- Formules : pour tout nombre entiers positifs n et p on peut écrire,

$$\boxed{10^n \times 10^p = 10^{n+p}} \qquad \boxed{\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}} \qquad \boxed{\left(10^n\right)^p = 10^{n \times p}}$$

Ecriture scientifique

- Définition : tout nombre décimal non nul peut être écrit en **notation scientifique**, c'est-à-dire sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal **ayant un seul chiffre non nul avant la virgule** et n est un nombre **entier relatif**. a est appelé **mantisse** du nombre.

- Règle : pour **comparer deux nombres**, on peut **comparer leurs ordres de grandeurs** à l'aide de leurs **notations scientifiques**. En cas d'**égalité des exposants**, on **compare les mantisses**.