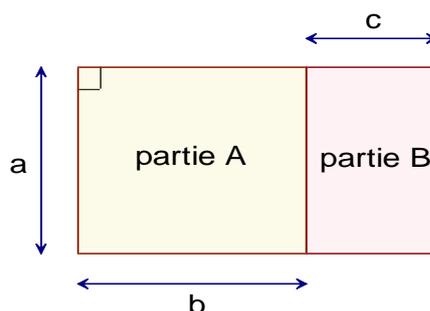


Simple distributivitéPartie 1 – Première formule

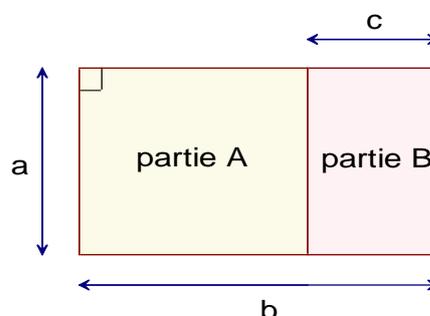
On considère la configuration ci-contre représentant un rectangle constitué de deux parties elles-mêmes rectangulaires.



1. Déterminer l'expression littérale de l'aire de la partie A.
2. Déterminer l'expression littérale de l'aire de la partie B.
3. Déterminer de deux manières l'expression littérale de l'aire totale du rectangle.
4. En déduire une égalité entre deux expressions littérales.

Partie 2 – Deuxième formule

On considère la configuration ci-contre représentant un rectangle constitué de deux parties elles-mêmes rectangulaires.



1. Déterminer l'expression littérale de l'aire totale du rectangle.
2. Déterminer l'expression littérale de l'aire de la partie B.
3. Déterminer de deux manières l'expression littérale de l'aire de la partie A.
4. En déduire une égalité entre deux expressions littérales.

Partie 3 – Développer une expression

Développer une expression littérale c'est « enlever les enveloppes » c'est-à-dire supprimer les parenthèses. A l'aide des deux formules précédentes, développer les expressions :

$$A = 2 \times (x + 3) \quad B = -3 \times (7 + a) \quad C = 5 \times (2b - 1) \quad D = -12 \times (3 - y)$$

$$E = 2 \times (3x + 4) \quad F = 5(x + 6) + 7(x + 8) \quad G = 9(x + 8) - 7(x + 6)$$

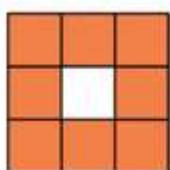
Partie 4 – Analyser un programme de calcul

On propose le programme de calcul suivant : « Penser à un nombre entier, ajouter au double du suivant le double du précédent, puis retrancher le triple du nombre pensé au départ ».

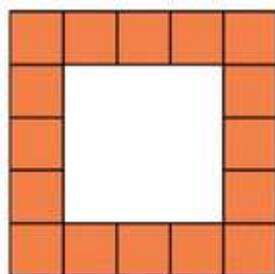
1. Faire plusieurs essais. Que remarque-t-on ?
2. Ecrire le programme de calcul en partant d'un nombre x quelconque, puis simplifier l'expression littérale ainsi obtenue. Que remarque-t-on ?

Compter des carreaux

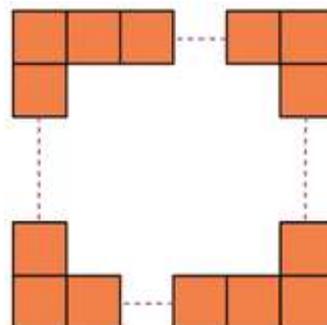
Avec des petits carrés identiques, disposés comme l'indiquent les figures ci-dessous, on constitue un carré plus grand. On appelle n le nombre de petits carrés présents sur un côté du grand carré et on note N le nombre de petits carrés nécessaire pour constituer le grand carré correspondant.



Lorsque $n = 3$

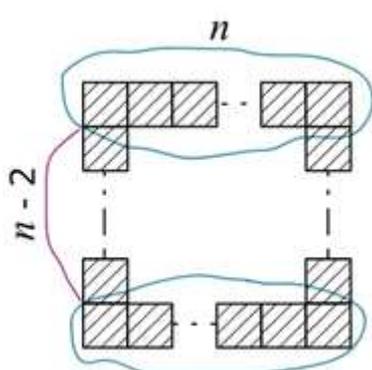


Lorsque $n = 5$

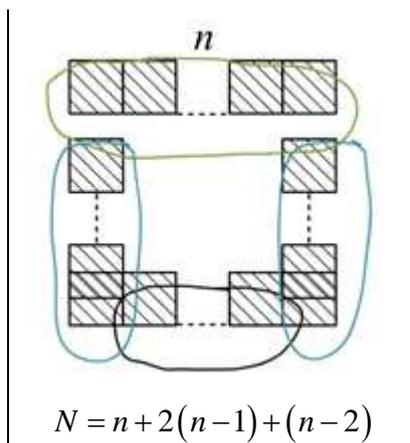


Lorsque n est quelconque

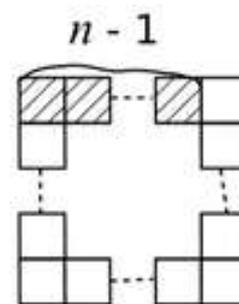
Trois élèves se posent la question suivante : « comment pourrions-nous exprimer N en fonction de n ? ». Après avoir réfléchi chacun de leur côté, ils fournissent les trois formules suivantes :



$$N = 2n + 2(n - 2)$$



$$N = n + 2(n - 1) + (n - 2)$$



$$N = 4(n - 1)$$

- Après avoir développé et réduit, faire une remarque sur ces trois expressions littérales.
- Utiliser le résultat précédent pour déterminer le nombre N de petits carrés nécessaires pour dessiner un grand carré de côté $n = 100$. Justifier la réponse par un calcul.

Signe moins devant une parenthèse

Ci-contre on propose des expressions littérales avec parenthèses dans la colonne de gauche et des expressions sans parenthèses dans la colonne de droite. Associer à chaque expression de la colonne de gauche, une expression de la colonne de droite.

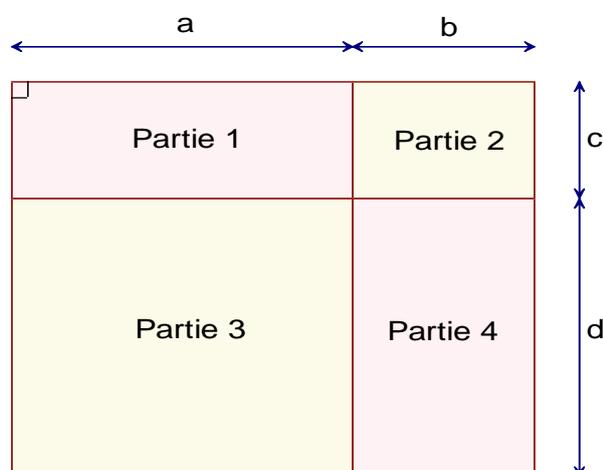
$(4x + 3) - (x + 5)$	•
$7x - (3 + 4x)$	•
$(3 + 4x) - 7x$	•
$6x - 3 - (3x - 6)$	•
$-(4x + 5) - (-x)$	•
$5x + 3 - (-3 + 5x)$	•

•	$3x + 3$
•	$-3x - 5$
•	6
•	$3x - 2$
•	$-3x + 3$
•	$3x - 3$

Double distributivitéPartie 1 – Troisième formule

On considère la configuration ci-contre représentant un rectangle constitué de quatre parties elles-mêmes rectangulaires.

1. Déterminer l'expression littérale de l'aire de chacune des quatre parties de ce rectangle.
2. Déterminer de deux manières l'expression littérale de l'aire totale du rectangle.
3. En déduire une égalité entre deux expressions littérales.

Partie 2 – Développer une expression

A l'aide de la formule précédente, développer réduire et ordonner les expressions littérales :

$$A = (a + 2) \times (b + 3) \quad B = (5 + x) \times (7 + y) \quad C = (x + 10) \times (20 + y) \quad D = (0,5 + a) \times (b + 2)$$

$$E = (x + 3) \times (x + 5) \quad F = (a + 1) \times (2 + a) \quad G = (6 + y) \times (y + 5) \quad H = (0,1 + b) \times (10 + b)$$

$$I = (2x + 1)(3x + 2) \quad J = (4x - 3)(5x + 4) \quad K = (6x + 5)(7x - 6) \quad L = (8x - 7)(9x - 8)$$

Partie 3 – Analyser deux programmes de calcul

On propose le programme de calcul suivant : « Penser à un nombre entier, multiplier l'entier suivant par l'entier précédent, puis retrancher le carré du nombre pensé au départ ».

1. Faire plusieurs essais. Que remarque-t-on ?
2. Ecrire le programme de calcul en partant d'un nombre x quelconque, puis simplifier l'expression littérale ainsi obtenue. Que remarque-t-on ?

On propose le programme de calcul suivant : « Penser à un nombre entier, multiplier ce nombre par l'entier suivant, multiplier ce nombre par l'entier précédent, soustraire les deux résultats, puis retrancher le double du nombre pensé au départ ».

3. Faire plusieurs essais. Que remarque-t-on ?
4. Ecrire le programme de calcul en partant d'un nombre x quelconque, puis simplifier l'expression littérale ainsi obtenue. Que remarque-t-on ?

Poser des multiplications « à l'anglaise »

Ci-contre on a posé « à l'anglaise » la multiplication 76×28 .

$$\begin{array}{r} 70+6 \\ \times \frac{20+8}{0048} \\ \hline 76 \\ 0560 \\ 0120 \\ 1400 \\ \hline = 2128 \end{array}$$

Sauriez-vous poser « à l'anglaise » la multiplication 56×93 ?

$$\begin{array}{r} 0560 \\ \times \frac{28}{0608} \\ \hline 1520 \\ \hline 2128 \end{array}$$

A l'aide de la formule de double distributivité, expliquer le principe de ce type de multiplication posée.

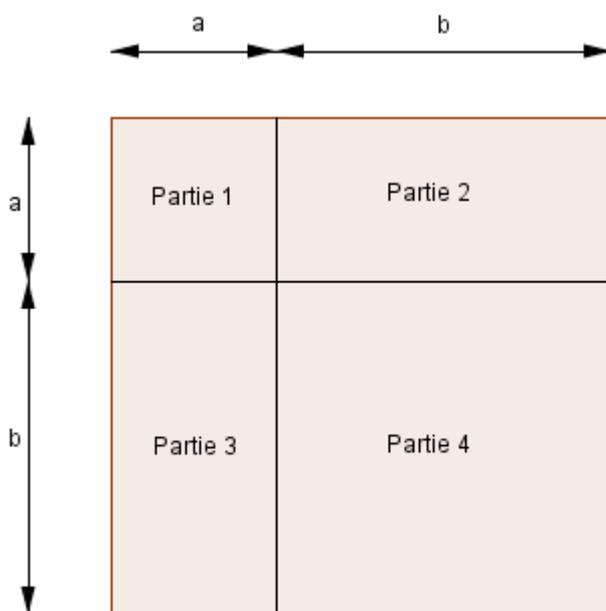
A l'aide de la formule de simple distributivité sauriez-vous expliquer le principe de la multiplication « traditionnelle » ?

A l'anglaise Traditionnelle

Les identités remarquables

Partie 1 – Première identité remarquable

On considère la configuration ci-contre représentant un carré constitué de deux carrés pour les parties 1 et 4, de deux rectangles pour les parties 2 et 3.



- Déterminer l'expression littérale de l'aire de chacune des quatre parties de ce carré.
- Déterminer de deux manières l'expression littérale de l'aire totale du carré.
- En déduire une égalité entre deux expressions littérales.

4. Qu'auriez-vous obtenu en développant et en réduisant l'expression $(a+b) \times (a+b)$?

Partie 2 – Deuxième identité remarquable

5. Qu'obtenez-vous en développant et en réduisant l'expression $(a-b) \times (a-b)$?
En déduire une deuxième égalité entre deux expressions littérales.

Partie 3 – Troisième identité remarquable

6. Qu'obtenez-vous en développant et en réduisant l'expression $(a+b) \times (a-b)$?
En déduire une troisième égalité entre deux expressions littérales.

Du calcul mental

Sans calculatrice, effectuer les calculs suivants : $A = 31^2$, $B = 29^2$, $C = 31 \times 29$, $D = 51^2$, $E = 49^2$, $F = 51 \times 49$, $G = 18^2$, $H = 22^2$ et $I = 22 \times 18$. Expliquer précisément la démarche.

Application directe des identités remarquables

Par application d'une identité remarquable, développer et réduire les expressions :

$$A = (x+1)^2$$

$$B = (2x+3)^2$$

$$C = (4x+5)^2$$

$$D = (x-1)^2$$

$$E = (3x-2)^2$$

$$F = (5x-4)^2$$

$$G = (x-1)(x+1)$$

$$H = (x-5)(x+5)$$

$$I = (4x-3)(4x+3)$$

Du calcul littéral puis mentalPartie 1

1. Développer et réduire l'expression $J = (x+1)^2 - (x-1)^2$.

Sans calculatrice effectuer les calculs : $K = 21^2 - 19^2$, $L = 51^2 - 49^2$, $M = 101^2 - 99^2$.

Partie 2

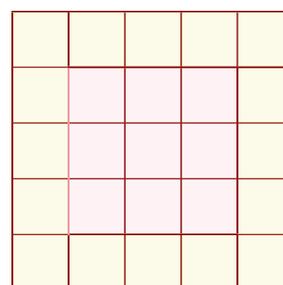
2. Développer et réduire l'expression $N = (x-3)^2 - (x-2)(x-1)$.

Sans calculatrice, effectuer le calcul suivant : $O = 99997^2 - 99999 \times 99998$.

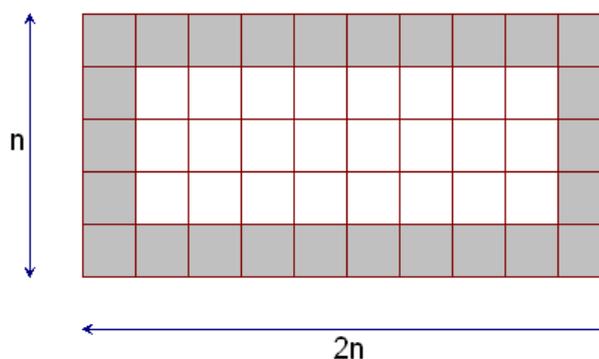
Un carré dans un carré

On veut carreler une pièce carrée. On dispose de carreaux carrés de deux couleurs : orange pour le pourtour et rouge pour la partie centrale. On appelle n le nombre de carreaux disposés sur un côté du carré et N le nombre de carreaux oranges.

Combien y a-t-il de carreaux rouges ? Combien y a-t-il de carreaux en tout ? Combien y a-t-il de carreaux oranges ? Retrouve-t-on le résultat obtenu à la page 2 des activités ?

**Un rectangle dans un rectangle**

On veut carreler une pièce rectangle dont la longueur est le double de la largeur. On dispose de carreaux carrés de deux couleurs : gris pour le pourtour de la pièce et blancs pour la partie centrale. On appelle n le nombre de carreaux disposés sur la largeur du rectangle, N le nombre de carreaux gris sur le pourtour de la pièce.



Combien y a-t-il de carreaux blancs ? de carreaux en tout ? de carreaux gris sur le pourtour ?

Un carré dans un carré

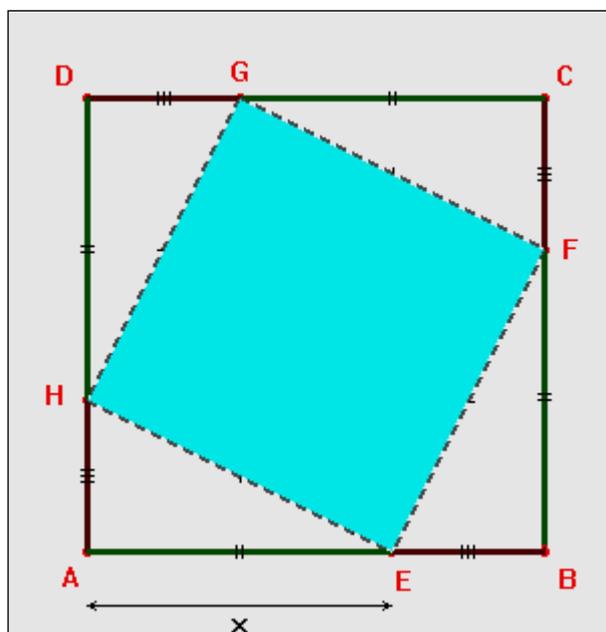
ABCD est un carré de côté 6.

Les points E, F, G et H disposés sur les segments [AB], [BC], [CD] et [DA] se situent à une distance x des points A, B, C et D.

On admettra que le quadrilatère EFGH ainsi construit est lui aussi un carré.

Exprimer de manière développée et réduite l'aire du carré EFGH en fonction de x .

Faire apparaître toutes les étapes du calcul littéral effectué pour obtenir le résultat.

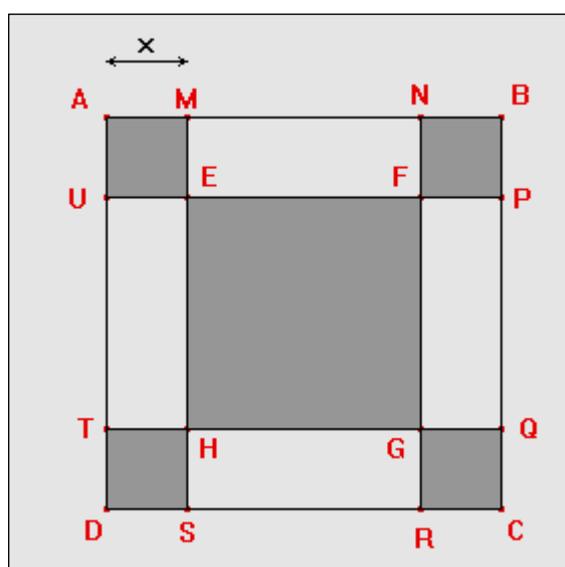


Cinq carrés dans un carré

ABCD est un carré de côté 8.

Les points M, N, P, Q, R, S, T et U sont disposés sur les segments [AB], [BC], [CD] et [DA] se situent à une distance x des points A, B, C et D comme l'indique la figure ci-contre. Les points E, F, G et H sont les points d'intersection des segments [MS], [UP], [NR] et [QT]. Ils constituent un carré.

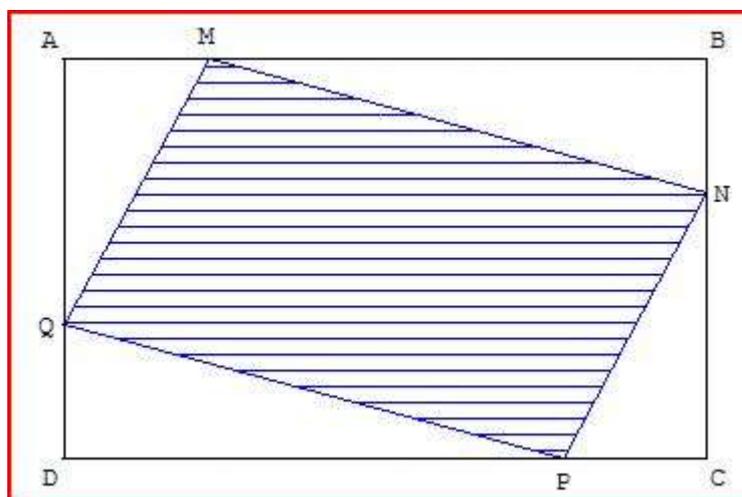
Exprimer de manière développée et réduite l'aire de la partie colorée en fonction de x . Faire apparaître toutes les étapes du calcul littéral.



Un parallélogramme dans un rectangle

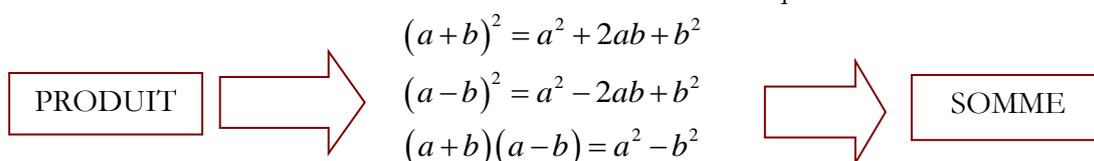
ABCD est un rectangle de longueur 9 et de largeur 6. Les points M, N, P et Q disposés sur les segments [AB], [BC], [CD] et [DA] se situent à une distance x des points A, B, C et D.

Exprimer de manière développée et réduite l'aire de MNPQ en fonction de x . Faire apparaître toutes les étapes du calcul littéral.



Les techniques de développement

La distributivité ou bien les identités remarquables

**Développer une expression algébrique**

Développer, réduire et ordonner les expressions algébriques suivantes :

$A = 2 \times (3x + 4)$

$B = 5x(x + 6) + 7x(x + 8)$

$C = 9(x + 8) - 7(x + 6)$

$D = 5x(x + 4) - (3x^2 - 2x + 1)$

Utilisation de la simple distributivité

$E = (2x + 1)(3x + 2)$

$F = (5x - 4)(6x - 5)$

$G = (8x + 7)(7x - 6)$

$H = (9x - 10)(9x + 11)$

Utilisation de la double distributivité

$I = (2x + 1)^2 + (2x - 1)^2$

$J = (3x + 2)^2 - (3x - 2)^2$

$K = (4x + 3)(4x - 3) - (5x + 4)^2$

$L = (6x - 5)^2 - (7x + 6)(7x - 6)$

Utilisation des identités remarquables**Différentes écritures d'une même expression algébrique**

Vérifier que les trois écritures proposées sur chaque ligne correspondent à la même expression :

$A = (x - 3)^2 - 4$

$B = x^2 - 6x + 5$

$C = (x - 1)(x - 5)$

$D = (x - 2)(x + 8)$

$E = (x + 3)^2 - 25$

$F = x^2 + 6x - 16$

$G = -x^2 + 2x + 8$

$H = (x + 2)(4 - x)$

$I = 9 - (x - 1)^2$

$J = x^2 + 4x - 21$

$K = (x + 2)^2 - 25$

$L = (x - 3)(x + 7)$

$M = (6 - x)^2 + x^2$

$N = 2(x - 3)^2 + 18$

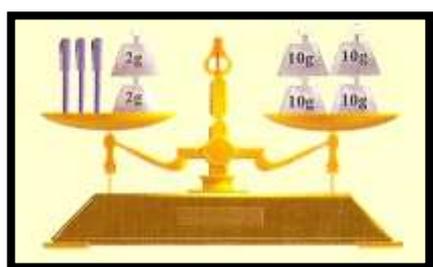
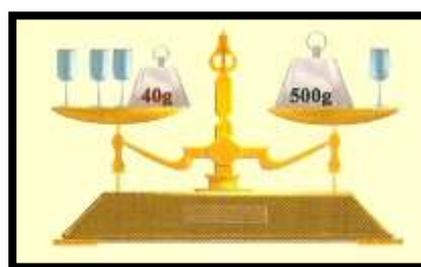
$P = 2x^2 - 12x + 36$

Résolution d'équations – Résolution de problèmesPartie A

Dans chacune des deux situations suivantes, déterminer la masse d'un DVD. Préciser toutes les étapes de votre raisonnement : choix de l'inconnue, mise en équation du problème, résolution de l'équation et réponse à la question posée.

*Situation 1**Situation 2*

Dans chacune des deux situations suivantes, déterminer la masse d'un stylo. Préciser toutes les étapes de votre raisonnement : choix de l'inconnue, mise en équation du problème, résolution de l'équation et réponse à la question posée.

*Situation 3**Situation 4*Partie B

Sauriez-vous déterminer trois entiers consécutifs dont la somme est égale à 2016 ? Préciser toutes les étapes de votre raisonnement : choix de l'inconnue, mise en équation du problème, résolution de l'équation et réponse à la question posée.

Partie C

Un père de trois enfants laisse en héritage 1600 couronnes. Le testament précise que l'aîné recevra 200 couronnes de plus que le deuxième, et le deuxième recevra 100 couronnes de plus que le dernier. De quelle somme hérite chaque enfant ? Préciser toutes les étapes de votre raisonnement : choix de l'inconnue, mise en équation du problème, résolution de l'équation et réponse à la question posée.

Partie D

Une personne déclare : « Prenez trois fois mon âge dans trois ans et enlevez trois fois mon âge il y a trois ans et vous obtenez mon âge actuel ». Quel est l'âge de cette personne ? Préciser toutes les étapes de votre raisonnement : choix de l'inconnue, mise en équation du problème, résolution de l'équation et réponse à la question posée.

Problème d'héritage

Léonhard Euler (1707 – 1783), mathématicien suisse de génie s'est vu proposer, par un notaire le problème suivant. Il s'agit d'un problème d'héritage. La monnaie utilisée est la livre.

Euler, soucieux que le notaire sorte de son ignorance, et ne vienne pas le déranger à chaque problème d'héritage rencontré, lui adressa les consignes suivantes :

1. Monsieur, choisissez une lettre, cette lettre représentera le montant de la fortune laissée par le père.
2. Exprimez la part du premier fils à l'aide de cette lettre (vous savez que prendre la moitié de quelque chose revient à le diviser par deux).
3. Exprimez la part du deuxième fils à l'aide de cette lettre (il est clair que prendre le tiers de quelque chose revient à le diviser par trois). Exprimez la part du troisième puis la part du quatrième à l'aide de cette lettre ? Si vous ajoutez la part de chaque fils, qu'obtenez-vous ?
4. Vous venez d'établir l'équation du problème. Afin de trouver la valeur de la lettre, rassemblez dans le membre de gauche les expressions contenant la lettre et rassemblez dans le membre de droite les nombres orphelins, j'entends par là ceux non accompagnés de la lettre.
5. Vous devrez réduire plusieurs fractions au même dénominateur car l'addition ou la soustraction de fractions nécessite un dénominateur commun. Quel est-il ? Diviser une fraction par une autre revient à la multiplier par son inverse. La lettre est-elle découverte ?
6. N'oubliez pas votre problème : quelle est la fortune laissée par le père ? Quelle est la somme reçue par chacun des quatre enfants ?

Un père mourut en laissant quatre fils, ceux-ci se partagèrent ses biens de la manière suivante :

- **Le premier prit la moitié de la fortune moins 3000 livres,**
- **Le deuxième prit le tiers de la fortune moins 1000 livres,**
- **Le troisième prit exactement le quart de la fortune,**
- **Le quatrième prit 600 livres plus un cinquième de la fortune.**

Quelle était la fortune laissée par le père ? Dans cet héritage, quelle somme reçut chaque enfant ?

Problème d'équilibre

Une brique est équilibrée par les trois quarts d'une même brique et les trois quarts d'un kilogramme. Combien pèse cette brique ? Préciser toutes les étapes de votre raisonnement...

Problème d'horaire

« Bien le bonjour, Monsieur l'agent, dit Mr Mac Guire. Pouvez-vous me dire l'heure ? Mais bien sûr, répondit l'agent qui avait une réputation de mathématicien. Ajoutez au quart du temps depuis minuit, la moitié du temps jusqu'à minuit et vous aurez l'heure exacte. » Quelle heure était-il ? Préciser toutes les étapes de votre raisonnement...

Un peu d'équité

On s'intéresse au problème suivant : « Chloé a 621 euros et Paul a 258 euros. Quelle somme Chloé doit-elle donner à Paul pour qu'ils aient tous les deux la même somme d'argent ? ».

**Problème d'âges**

On s'intéresse à la situation décrite par la phrase suivante :

« Dans dix ans, l'âge de Peter sera égal au triple de l'âge qu'il avait il y a six ans. ».

Le but est de retrouver l'âge de Peter au moment où la phrase a été prononcée.

**Alice, Bertrand et Chloé**

Alice et Bertrand saisissent le même nombre de départ sur leurs calculatrices puis effectuent les programmes de calculs suivants. Alice multiplie le nombre de départ par 8 puis ajoute 7 au résultat obtenu. Bertrand multiplie le nombre de départ par 6 puis ajoute 13 au résultat obtenu. Ils s'aperçoivent alors que leurs calculatrices affichent le même résultat.

Quel est le nombre de départ saisi par Alice et Bertrand ?

Chloé a envie de jouer avec Alice et Bertrand mais avec le programme de calculs suivant : Chloé multiplie le nombre de départ par 3 puis ajoute 30 au résultat obtenu. Alice et Chloé cherchent quel nombre de départ saisir sur leurs calculatrices respectives pour trouver le même résultat.

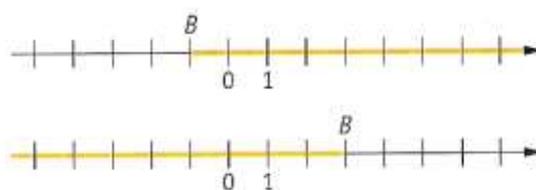
Peux-tu aider Alice et Chloé ?

Bertrand et Chloé cherchent quel nombre de départ saisir sur leurs calculatrices respectives pour trouver le même résultat.

Peux-tu aider Bertrand et Chloé ?

Notion d'intervalle

On a tracé ci-contre deux droites graduées représentant l'ensemble des nombres.



Sur chacune d'elles on a surligné une partie de la droite représentant un « **intervalle** ». A l'aide des signes \leq ou \geq et de la lettre x , écrire pour chaque intervalle représenté ci-contre une inégalité qui le caractérise.

Ordre et addition – Ordre et soustraction

La problématique est la suivante : « Que se passe-t-il si l'on ajoute ou si l'on retranche **le même** nombre aux deux membres d'une inégalité ? » A l'aide du tableau ci-contre, apporter une réponse.

Nombre 1	Nombre 2	Comparaison
$a = 20$	$b = 50$	$a \leq b$
$a + 1 = 21$	$b + 1 = 51$	$a + 1 \leq b + 1$
$a - 1 = 19$	$b - 1 = 49$	$a - 1 \leq b - 1$

Ordre et multiplication – Ordre et division

La problématique est désormais la suivante : « Que se passe-t-il si l'on multiplie ou si l'on divise les deux membres d'une inégalité par **le même** nombre ? ». A l'aide de deux tableaux ci-dessous, apporter une réponse à la problématique.

Nombre 1	Nombre 2	Comparaison
$a = 20$	$b = 50$	$a \leq b$
$2 \times a = 40$	$2 \times b = 100$	$2 \times a \leq 2 \times b$
$-3 \times a = -60$	$-3 \times b = -150$	$-3 \times a \geq -3 \times b$

Nombre 1	Nombre 2	Comparaison
$a = 20$	$b = 50$	$a \leq b$
$a \div 4 = 5$	$b \div 4 = 12,5$	$a \div 4 \leq b \div 4$
$a \div (-5) = -4$	$b \div (-5) = -10$	$a \div (-5) \geq b \div (-5)$

Travail technique sur la résolution d'une inéquation

$$\begin{array}{cccc}
 2x - 7 \geq -1 & 3x + 1 \geq 7 & 7x + 10 \leq 2x + 5 & 3x + 5 \leq -x - 3 \\
 -x - 1 \geq 3x + 15 & 3x + 5 \geq 4x + 8 & 4x + 3 \leq -2x + 43 & -2x + 3 \geq -x + 2
 \end{array}$$

1. Résoudre les inéquations proposées ci-dessus. Indiquer toutes les étapes.
2. Représenter graphiquement l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

Extraits du brevet pour terminer la préparation**37 Extrait du Brevet**

Le ciné-club d'un village propose deux tarifs :
 Tarif A : une carte d'adhésion pour l'année coûtant 21 euros, puis 1,5 euros par séance ;
 Tarif B : 5 euros par séance sans carte d'adhésion.

- Calculer, pour chaque tarif, le prix payé pour 8 séances.
- On appelle x le nombre de séances.
Exprimer en fonction de x le prix payé avec le tarif A, puis avec le tarif B.
- Quel est le nombre de séances pour lequel le tarif A est égal au tarif B ?

55 D'après Brevet

Un cinéma propose deux tarifs.

Tarif 1 : 7,50 € la place.

Tarif 2 : 5,25 € la place sur présentation d'une carte d'abonnement de 27 € valable un an.

- On désigne par x le nombre de places achetées au cours d'une année.
On note P_1 le prix payé avec le tarif 1 et P_2 le prix payé avec le tarif 2.
Exprimer P_1 et P_2 en fonction de x .
- À partir de combien de places a-t-on intérêt à s'abonner ?

56 D'après Brevet

Pour transporter des enseignes, une société souhaite comparer les tarifs de deux entreprises : l'entreprise « Vitlivré » propose une somme de 3,20 € par kilomètre parcouru, tandis que l'entreprise « Rapido » propose un forfait de 180 € puis une somme de 2 € par kilomètre parcouru.

- Quelle entreprise faut-il choisir pour un transport de 100 kilomètres ?
- À partir de quel kilométrage l'entreprise « Rapido » est-elle la plus intéressante ?

Exercices supplémentaires

Deux entreprises de location de matériel médical louent une même machine aux tarifs suivants :

- Tarif A = 300 € par jour de location.
- Tarif B = un forfait de 1000 € puis 200 € par jour de location.

On appelle x le nombre de jours de location. Déterminer par résolution d'une inéquation la durée pour laquelle le tarif A est plus intéressant que le tarif B.

Le lièvre et la tortue disputent une course sur une piste qui mesure 100 mètres.

- La tortue parcourt 0,5 mètre en une seconde et part avec 40 mètres d'avance sur le lièvre.
- Le lièvre parcourt 2,5 mètres en une seconde.

On appelle x le nombre de secondes écoulées.

Par résolution algébrique d'une inéquation déterminer au bout de combien de temps le lièvre aura dépassé la tortue.

Par résolution algébrique d'une inéquation déterminer au bout de combien de temps le lièvre aura dépassé la ligne d'arrivée.

Par résolution algébrique d'une inéquation déterminer au bout de combien de temps la tortue aura dépassé la ligne d'arrivée. Le résultat sera converti en minutes.

Exercice 1

- Le prix d'un sac de terreau est de 11,50€ lorsqu'on l'achète en magasin,
- Ce même sac de terreau coûte 9,00€ lorsqu'on le commande sur Internet. Par contre il faut payer les frais de livraison qui sont de 15€ quelle que soit la quantité commandée.

A partir de combien de sacs de terreau achetés le prix affiché sur Internet sera-t-il plus intéressant que celui proposé en magasin ? Justifier en indiquant toutes les étapes de votre raisonnement.

Exercice 2

On exécute l'algorithme proposé ci-contre.

1. Quelle sera la réponse du lutin on choisit le nombre 12 ? Quelle sera la réponse du lutin si on choisit le nombre -5 ? Justifier les réponses
2. A quelle condition portant sur le nombre choisi sera-t-on certain que le lutin dira « Bravo » ? Justifier clairement la réponse.

Exercice 3

Etant donné la réponse donnée par le chat à la suite de cet algorithme, sauriez-vous déterminer le (ou les) nombre(s) au(x)quel(s) l'utilisateur a pu penser au départ ? Justifier clairement la réponse.

Exercice 4

Résoudre en indiquant toutes les étapes de vos calculs les trois inéquations suivantes.

$$5(x - 2) \leq 4x - 2 \quad -6(2x + 2) \geq 3x - 27 \quad 5 - 2(x + 3) \geq 2(x + 1) - 4(x - 2)$$

