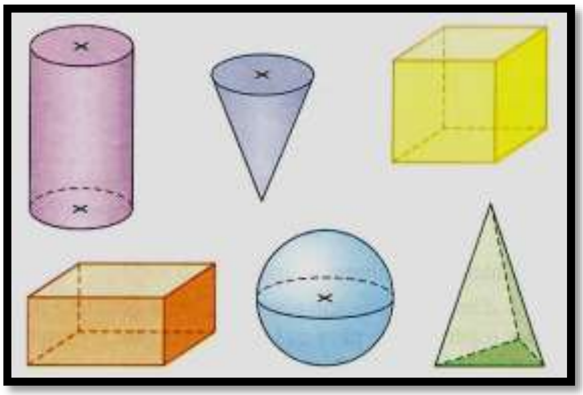
Volume d'un solide

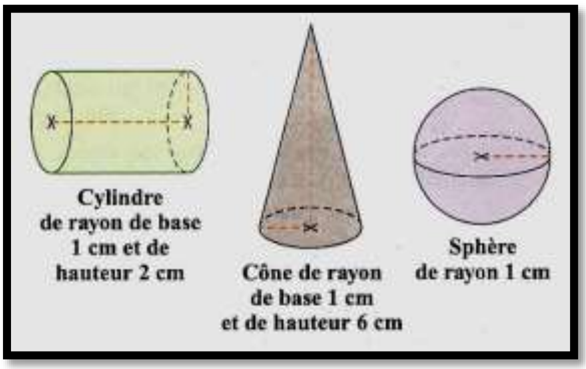
On a représenté ci-contre 6 solides de l'espace.

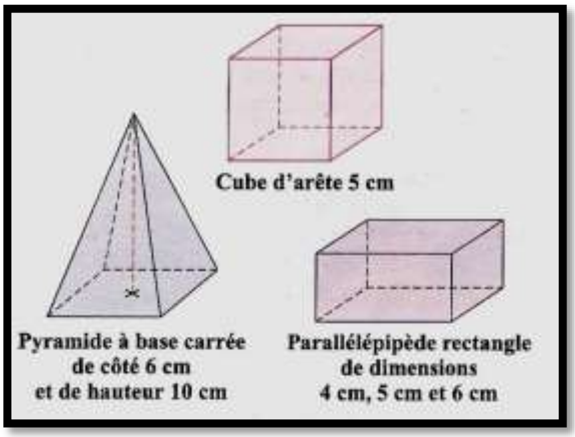
- Rappeler le nom donné à chaque solide.
- Associer à chacun la formule permettant de calculer son volume :

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3 \ ; \quad \mathcal{V} = L \times \ell \times h \ ; \quad \mathcal{V} = \pi r^2 h \ ;$$
$$\mathcal{V} = a^3 \ ; \quad \mathcal{V} = \frac{\mathcal{A} \times h}{3} \ ; \quad \mathcal{V} = \frac{\pi r^2 h}{3} .$$



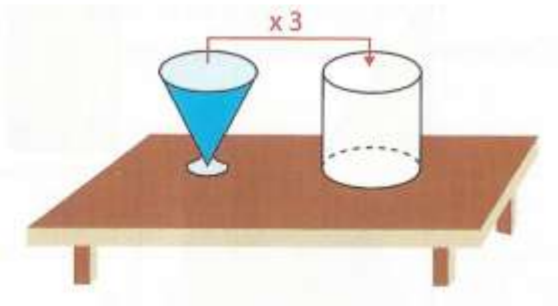
Calcul de volumes



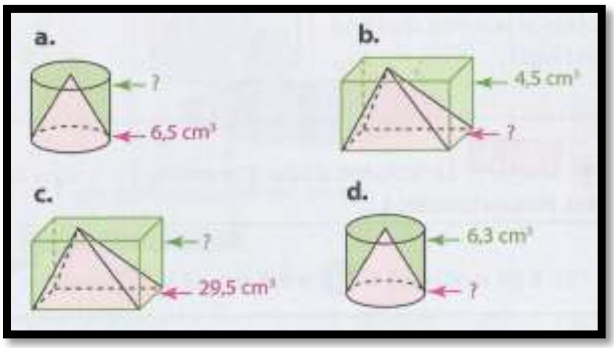


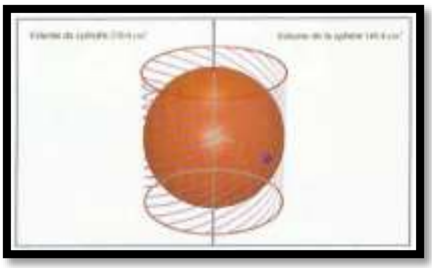
Quelques remarques sur les formules

On observe que le volume d'un cylindre de révolution est trois fois plus grand que le volume d'un cône de révolution de même base et de même hauteur comme l'indique le dessin ci-contre. On précise que cette observation est également valable pour les pyramides et les primes droits de même base et de même hauteur. En vous appuyant sur ces deux observations, déterminer dans chaque situation proposée ci-dessous le volume attendu.



Le cylindre est trois fois plus « grand » que le cône.





Que peut-on dire du volume de la boule par rapport au volume du cylindre qui la contient ?

Section plane d'un solide

Situation 1

Que peut-on dire de la section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face ?

Que peut-on dire de la section d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête ?

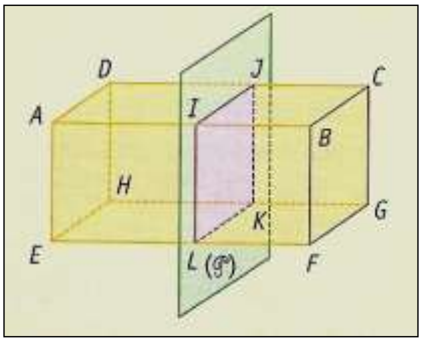


Figure 1

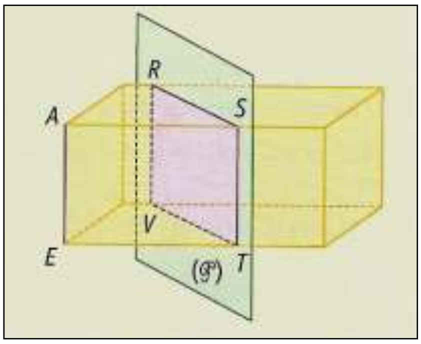


Figure 2

Situation 2

Que peut-on dire de la section d'un cylindre par un plan perpendiculaire à l'axe de révolution ?

Que peut-on dire de la section d'un cylindre par un plan parallèle à l'axe de révolution ?

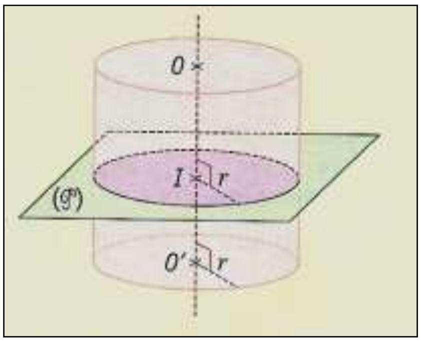


Figure 3

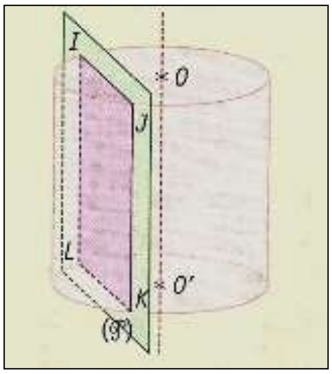


Figure 4

Situation 3

Que peut-on dire de la section d'une pyramide à base carrée par un plan parallèle à la base ?

Que peut-on dire de la section d'un cône par un plan parallèle à la base ?

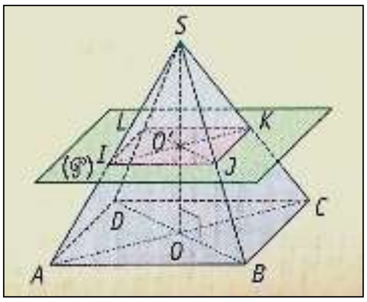


Figure 5

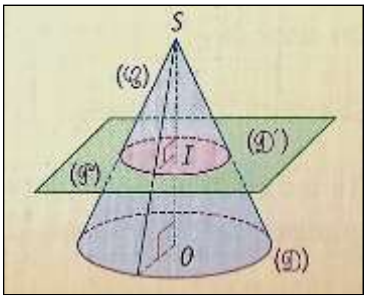


Figure 6

Situation 4

Que peut-on dire de la section d'une sphère de rayon r par un plan ? Afin d'être précis dans votre réponse vous distinguerez trois cas correspondants aux figures 7, 8 et 9. Que peut-on dire de la sphère et du plan (P) dans la figure 9 ?

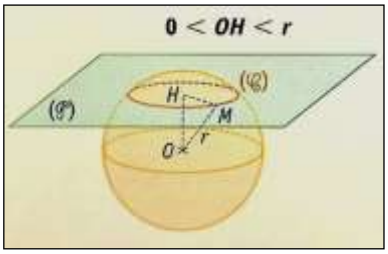


Figure 7

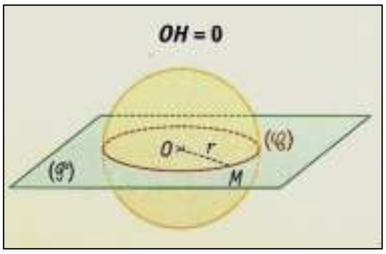


Figure 8

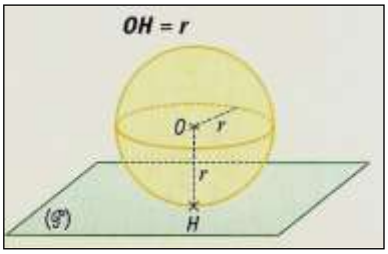
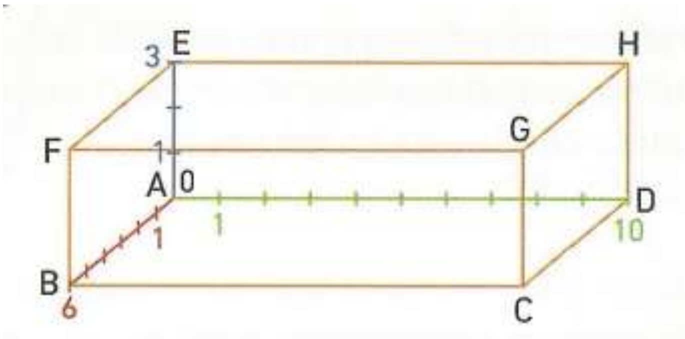


Figure 9

Se repérer dans un pavé droit

L'entreprise CleanRobot vend un robot aspirateur qui nettoie les sols d'une pièce mais aussi les murs grâce à un drone intégré qui s'élève dans les airs. Pour cela le robot a besoin de connaître les dimensions exactes de la pièce et de savoir en permanence où il se trouve par rapport à sa base. On a schématisé une pièce par un pavé droit ABCDEFGH de dimensions 6 m, 10 m et 3 m.



On a virtuellement gradué tous les mètres sa largeur AB de 0 à 6, sa longueur AD de 0 à 10 et sa hauteur AE de 0 à 3. Ainsi on peut dire que le point G a pour **abscisse 6**, pour **ordonnée 10** et pour **altitude 3**.

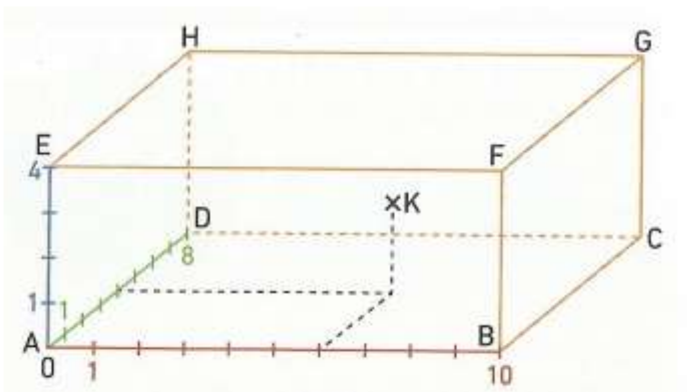
1. Donner pour chaque sommet du pavé droit un triplé de nombres correspondant à son abscisse, son ordonnée et son altitude.

2. Si le robot se trouve au sol, que peut-on dire de son altitude ? Lorsque le robot se trouve au centre de la pièce, quelle est son abscisse, son ordonnée et son altitude ? Lorsque le robot a pour abscisse 5, ordonnée 4 et altitude 1, de quel sommet est-il le plus proche ?

3. Le robot est équipé d'un système qui le renvoie à sa base, située au point A, avant que ses batteries ne soient complètement déchargées. Si son abscisse est 6, son ordonnée est 8 et son altitude est 0, à quelle distance de la base se trouve-t-il ? Expliquer le raisonnement.

C'est l'énoncé qui décide

ABCDEFGH est un pavé droit tel que AB=10 cm, AD=8 cm et AE=4 cm. On repère les points dans ce pavé droit à l'aide de leur abscisse (en rouge, c'est-à-dire le segment [AB]), de leur ordonnée (en vert, c'est-à-dire le segment [AD]) et de leur altitude (en bleu, c'est-à-dire le segment [AE]).



1. Déterminer les coordonnées (abscisse, ordonnée et altitude) de chaque sommet.

2. Sachant que le point K a pour altitude 2, donner l'abscisse et l'ordonnée de ce point.

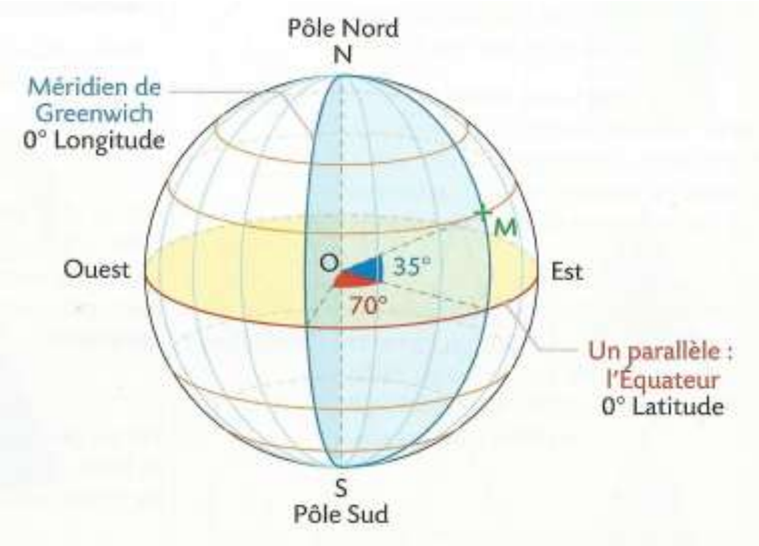
3. Où se trouve le point L d'abscisse 8, d'ordonnée 6 et d'altitude 0 ? Placer le dans le pavé.

Se repérer sur une sphère

Pour se repérer sur la terre, les hommes ont tracé des lignes imaginaires : des **parallèles** et des **méridiens**. Pour repérer un point sur la surface de la terre, il faut croiser deux lignes imaginaires :

- Un **parallèle** qui donne la **latitude**, c'est-à-dire la valeur de l'angle que l'on mesure entre ce parallèle et le **parallèle de référence appelé l'équateur**,

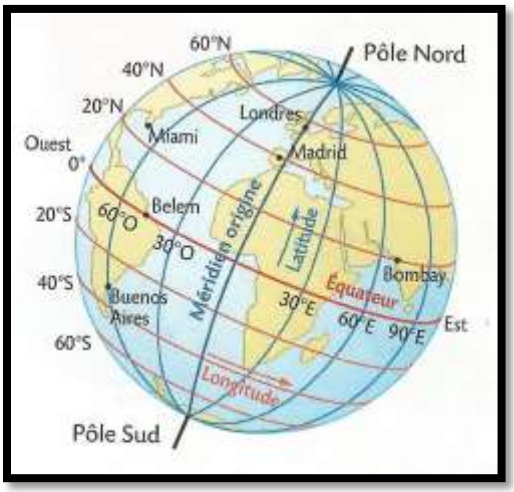
- Un **méridien** qui donne la **longitude**, c'est-à-dire la valeur de l'angle que l'on mesure entre ce méridien et le **méridien d'origine appelé méridien de Greenwich**.



Par exemple, le point M placé à la surface de cette sphère a pour coordonnées géographiques 35° Nord (qui représente sa latitude) et 70° Est (qui représente sa longitude).

Des coordonnées géographiques

On a représenté ci-contre un globe terrestre sur lequel on a fait apparaître des parallèles et des méridiens. Les lectures graphiques effectuées seront approximatives.



1. Déterminer les coordonnées géographiques de la ville de Londres.

2. Déterminer les coordonnées géographiques de la ville de Miami.

3. Déterminer les coordonnées géographiques de la ville de Belem.

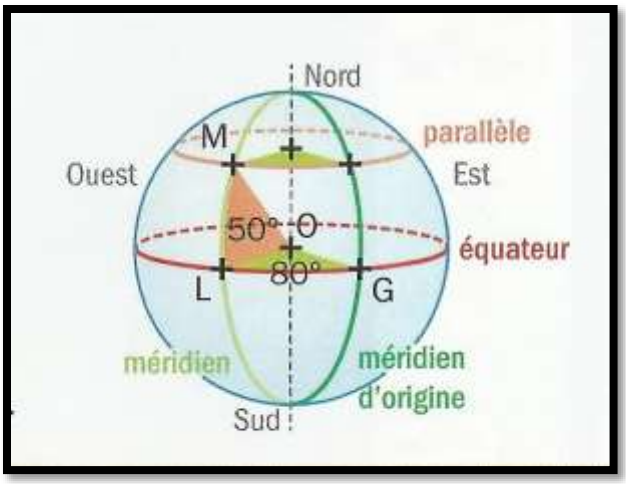
4. Déterminer les coordonnées géographiques le la vielle de Bombay.

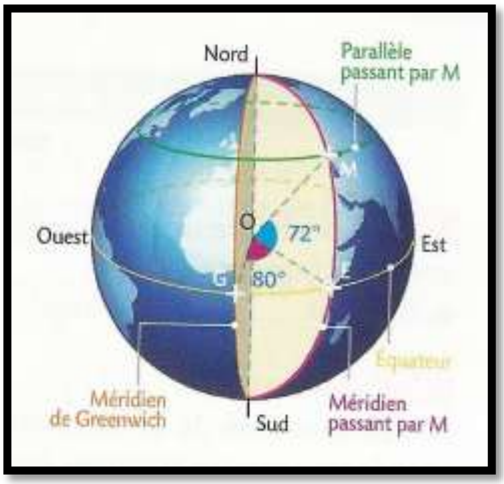
5. Déterminer les coordonnées géographiques le la vielle de Buenos Aires.

Exercices d'entrainement

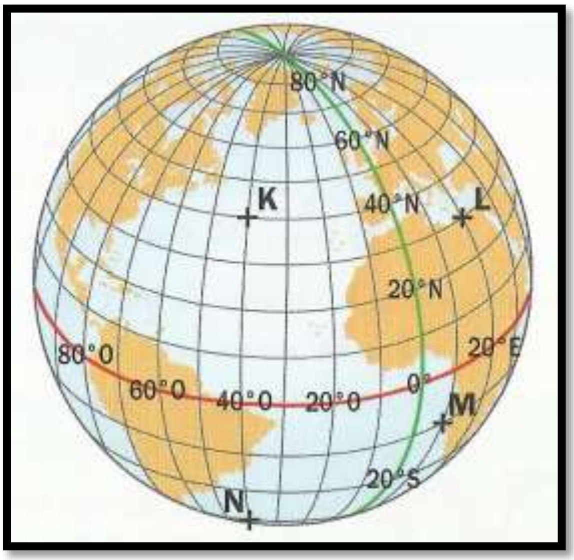
Situation 1

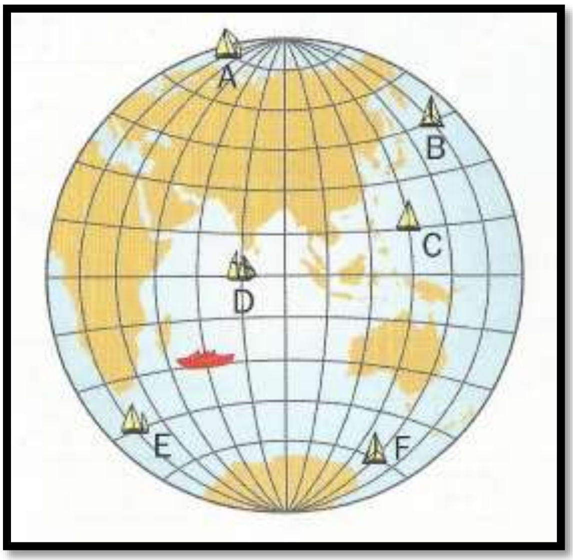
Déterminer les coordonnées géographiques des deux points M situés sur les sphères ci-dessous.





Situation 2



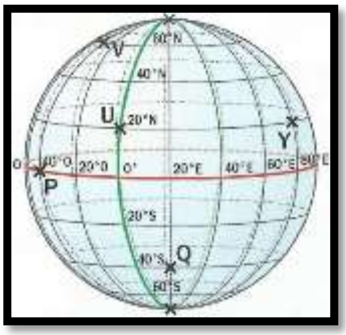


Déterminer les coordonnées géographiques des points K, L, M et N situés sur la première sphère.

Sachant que les coordonnées géographiques du paquebot rouge sont 60° Est 30° Sud, déterminer les coordonnées géographiques de chaque voilier A, B, C, D, E et F situés sur la seconde sphère.

Situation 3

Déterminer les coordonnées géographiques des cinq points P, Q, U, V et Y situés sur à la surface de la sphère proposée ci-contre.



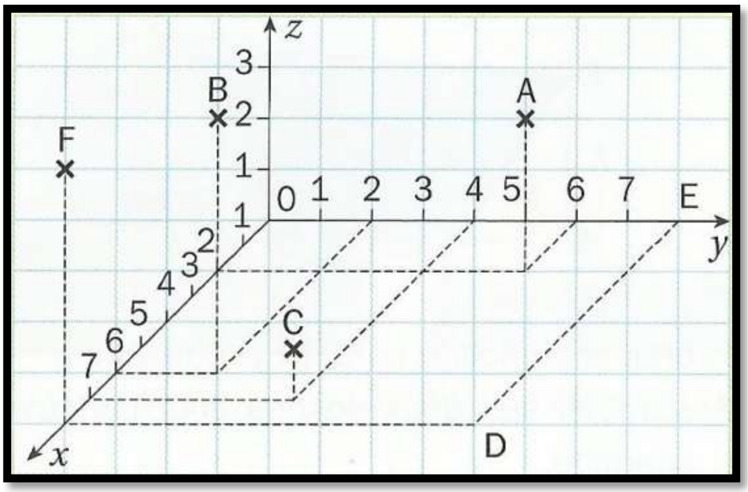
Exercices d'entrainement

Situation 1

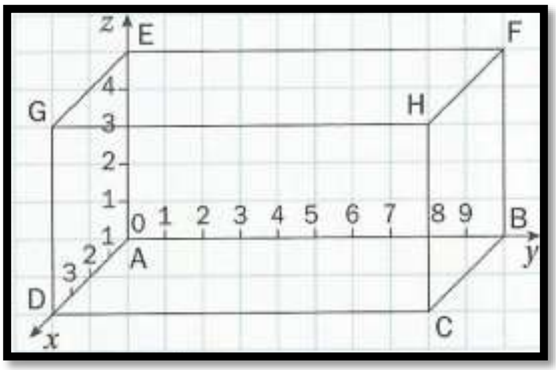
On considère un repère de l'espace constitué de trois axes :

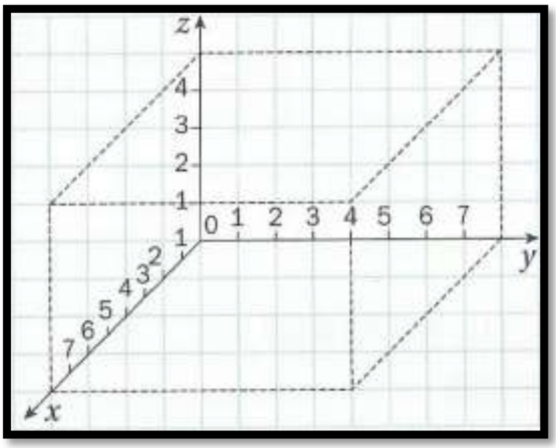
- Les abscisses sont sur l'axe (Ox),
- Les ordonnées sont sur l'axe (Oy),
- Les altitudes sont sur l'axe (Oz).

Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E et F.



Situation 2



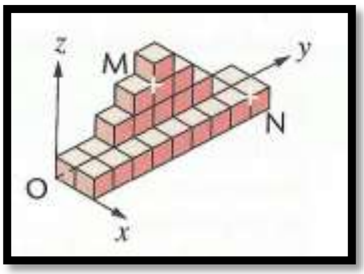


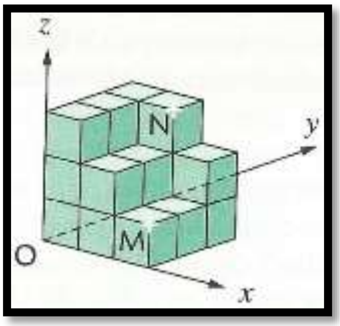
Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H sommets du premier pavé droit.

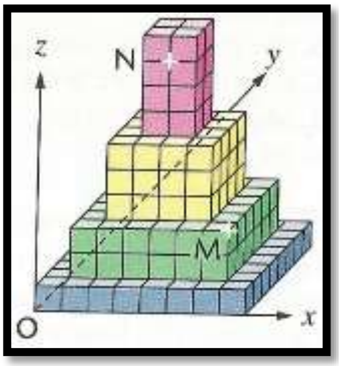
Dans le deuxième pavé droit, placer le point A de coordonnées (0 ; 0 ; 0), le point B de coordonnées (8 ; 0 ; 0), le point C de coordonnées (8 ; 8 ; 0), le point D de coordonnées (0 ; 8 ; 0), le point E de coordonnées (0 ; 0 ; 5), le point F de coordonnées (8 ; 0 ; 5), le point G de coordonnées (8 ; 8 ; 5), le point H de coordonnées (0 ; 8 ; 5).

Situation 3

Déterminer dans chaque cas les coordonnées des points M et N.



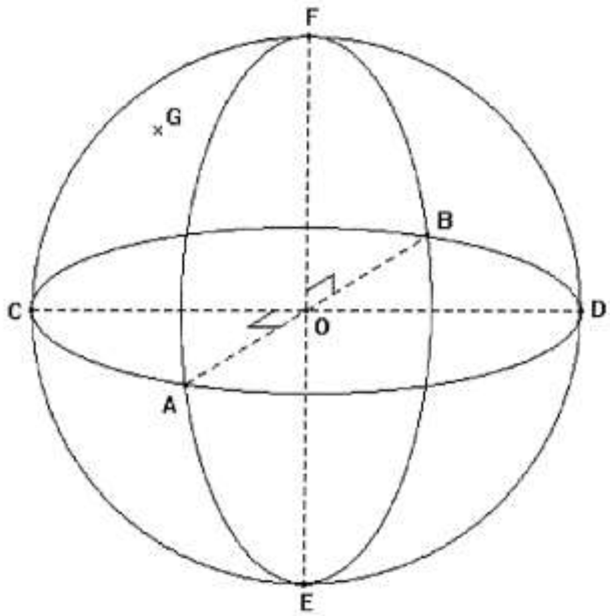




Généralités sur la sphère

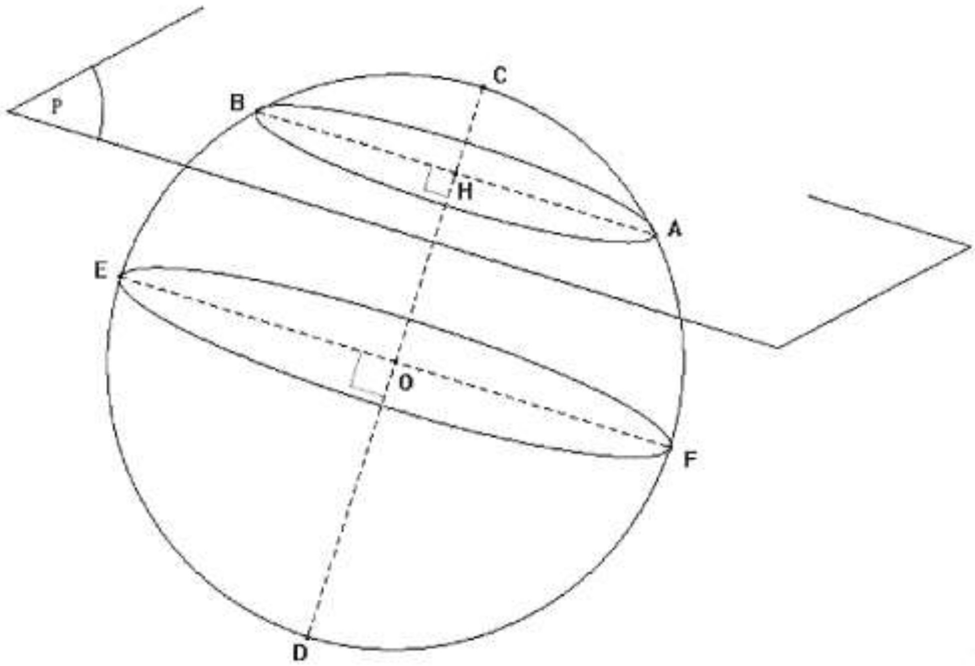
On a représenté ci-contre en perspective cavalière une sphère de centre O et de rayon 5 cm. Les diamètres [AB], [CD] et [EF] se coupent en O et sont perpendiculaires. Le point G est un point de la surface de la sphère.

1. Déterminer les longueurs AB, CD et EF. Déterminer la longueur OG.
2. Calculer la longueur AC.
3. Calculer le volume de la sphère.



Section d'une sphère

On sectionne la sphère de 5 cm de rayon par un plan (P) perpendiculaire en H au diamètre [CD].



Situation 1

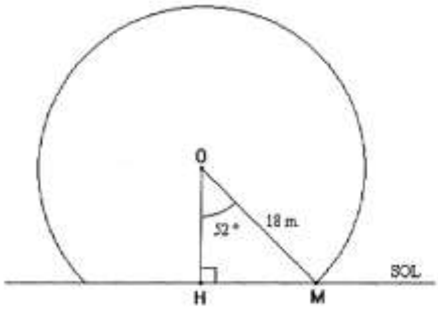
Sachant que OH = 3 cm, calculer le rayon HA du « cercle de section ».

Situation 2

Sachant que le rayon du « cercle de section » mesure 2 cm, calculer la longueur OH.
Arrondir au millimètre près.

La Géode

Dans le parc de la cité des Sciences se trouve la Géode, une salle de cinéma qui a extérieurement la forme d'une calotte sphérique posée sur le sol de rayon 18 mètres comme l'indique la figure.

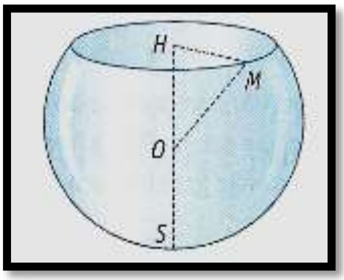


1. Calculer OH. Arrondir au mètre près.
2. Calculer HM. Arrondir au mètre près.
3. Quelle est la forme de la surface au sol occupée par la Géode ?
   Calculer l'aire de cette surface. Arrondir au mètre carré près.

Un aquarium et un doseur de lessive

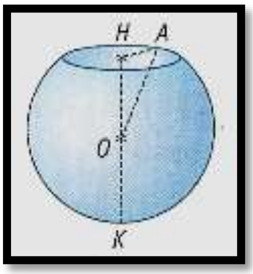
Situation 1

Un aquarium a la forme d'une calotte sphérique obtenue en coupant une sphère de centre O et de rayon 13 centimètres. La hauteur HS de l'aquarium est de 25 centimètres. Calculer le rayon HM de l'ouverture de cet aquarium.



Situation 2

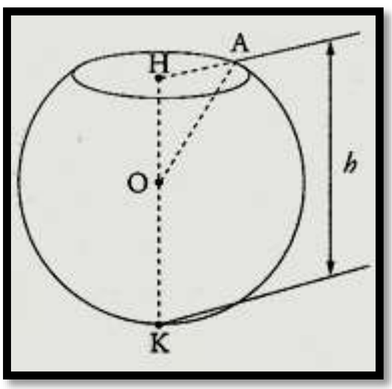
Un doseur de lessive a la forme d'une calotte sphérique de centre O et de rayon 4,5 centimètres. L'ouverture de ce récipient est délimitée par un cercle de centre H et de rayon HA égal à 2,7 centimètres. Calculer la hauteur HK de ce doseur de lessive.



Volume d'une calotte sphérique

Le volume d'une calotte sphérique de rayon R et de hauteur h est donné par la formule :

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h)}$$



Déterminer la capacité arrondie au litre près de l'aquarium étudié dans la situation 1.

Déterminer la capacité arrondie au millilitr du doseur de lessive étudié dans la situation 2.

Section d'une pyramide / Section d'un cône

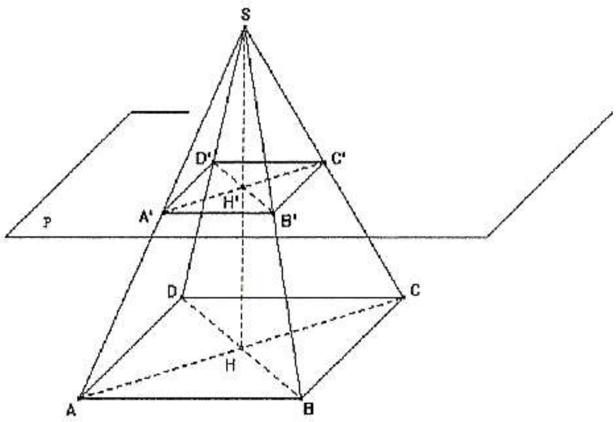
On a représenté ci-dessous, la **section d'une pyramide** par un **plan perpendiculaire à la hauteur** et la **section d'un cône** par un **plan perpendiculaire à l'axe de révolution**.

- La pyramide située au-dessus du plan de section est une **réduction** de la pyramide initiale.
  Le **rapport de réduction** est égal au rapport des longueurs SH' et SH.

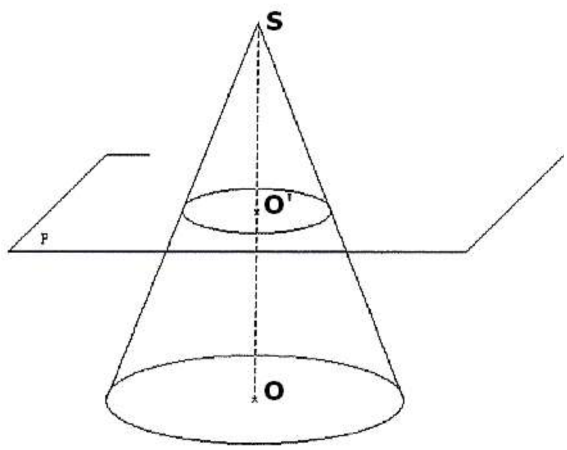
- Réciproquement, on peut dire que la pyramide initiale est un **agrandissement** de la pyramide située au-dessus du plan de section. Le **rapport d'agrandissement** est égal au rapport des longueurs SH et SH'.

- Le cône situé au-dessus du plan de section est une **réduction** du cône initial.
  Le **rapport de réduction** est égal au rapport des longueurs SO' et SO.

- Réciproquement, on peut dire que le cône initial est un **agrandissement** du cône situé au-dessus du plan de section. Le **rapport d'agrandissement** est égal au rapport des longueurs SO et SO'.

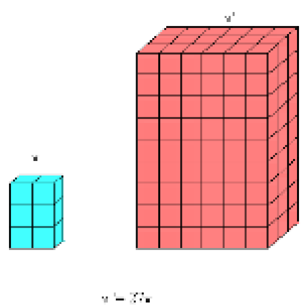


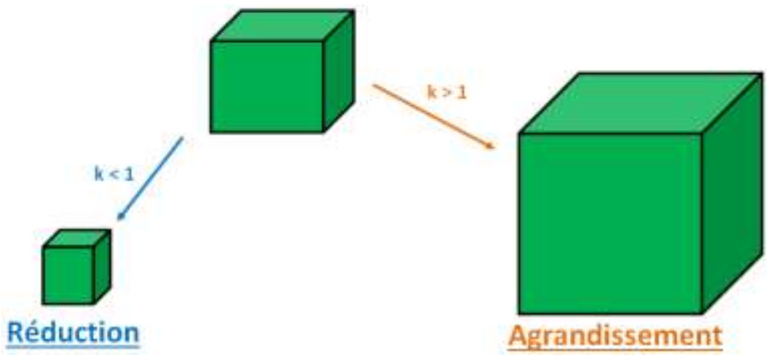
Section d'une pyramide



Section d'un cône

Agrandissement / réduction





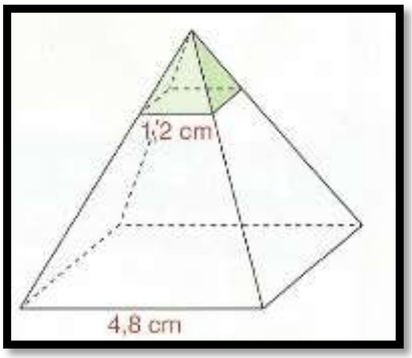
Utiliser les deux figures proposées ci-dessus pour répondre aux trois questions suivantes. Que peut-on dire d'un rapport de réduction ? Que peut-on dire d'un rapport d'agrandissement ? Que peut-on dire du volume d'un solide obtenu après agrandissement de rapport k d'un solide initial ?

Réduction d'une pyramide

La pyramide à base carrée proposée ci-contre, de hauteur 6 centimètres, a été coupée par un plan parallèle à sa base.

Calculer le volume de la grande pyramide.

Déterminer le rapport de réduction et en déduire le volume de la petite pyramide verte.

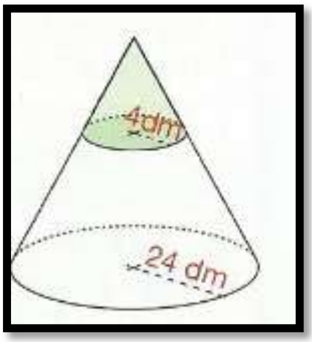


Réduction d'un cône

Le cône de révolution proposé ci-contre, de hauteur 36 décimètres, a été coupé par un plan parallèle à sa base.

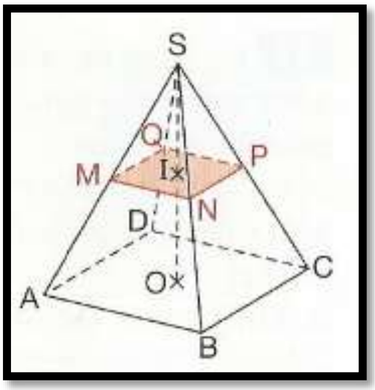
Calculer le volume du grand cône.

Déterminer le rapport de réduction et en déduire le volume du petit cône vert.



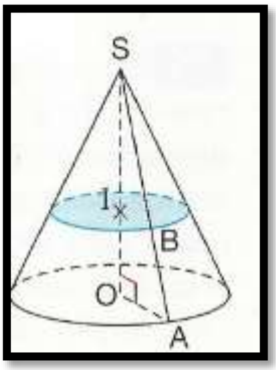
Section de pyramide

SABCD est une pyramide régulière à base carrée de côté 6 centimètres et de hauteur [SO] avec SO = 7,5 centimètres. Un plan parallèle à sa base coupe [SO] en I de telle sorte que SI = 2,5 centimètres. Calculer le volume de la pyramide SABCD. Déterminer le rapport de réduction et en déduire le volume de la petite pyramide SMNPQ.



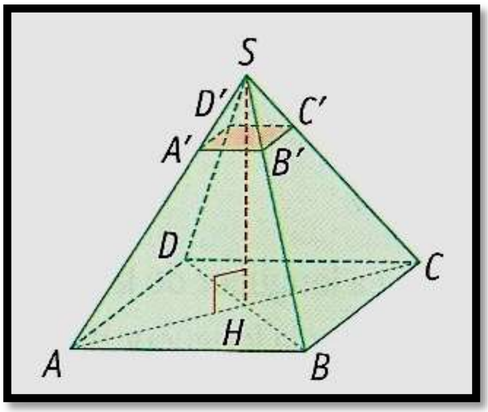
Section de cône

Un cône de révolution de sommet S et de base un disque de centre O est coupé par un plan parallèle à sa base. La section est le cercle de centre I qui passe par B point d'intersection du segment [SA] avec le plan. On donne SO = 10 cm, OA = 7,5 cm et SI = 6 cm. Calculer le volume du grand cône de base le disque de rayon [OA]. Déterminer le rapport de réduction et en déduire le volume du petit cône de base le disque de rayon [IB].



Réduction d'une pyramide

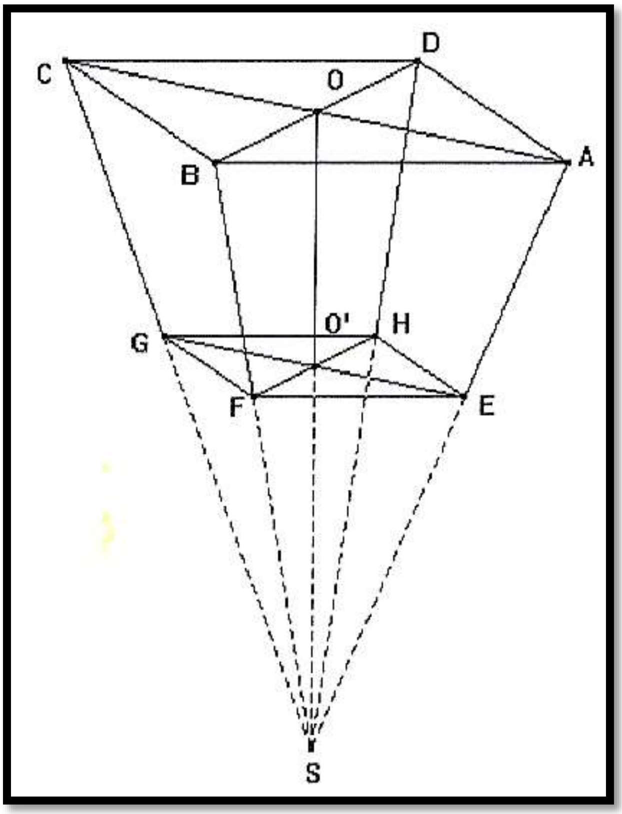
$SABCD$ est une pyramide à base rectangulaire de hauteur SH où H est le centre du rectangle $ABCD$. On donne $AB = 8$, $BC = 6$ et $SH = 12$ centimètres.



1. Calculer la longueur AC.
2. En déduire la longueur AH.
3. Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.
4. Démontrer que $SA = 13$ centimètres.
5. On note A' un point du segment $[SA]$ et on coupe la pyramide par le plan qui passe par le point A' et qui est parallèle à sa base. On obtient une pyramide $S'A'B'C'D'$ qui est une réduction de la pyramide $SABCD$. Où placer le point A' pour que le volume de $S'A'B'C'D'$ soit huit fois plus petit que celui de $SABCD$? Expliquer le raisonnement.

Tronc de pyramide

Une boîte de crème glacée a la forme d'un tronc de pyramide ABCDEFGH comme l'indique la figure ci-contre.



ABCD est un carré de centre O et EFGH est un carré de centre O'. [SO] est la hauteur de la pyramide SABCD.

Les plans ABCD et EFGH sont parallèles. On donne les longueurs suivantes :

- AB = 16 cm,
- EF = 12 cm,
- SO = 32 cm.

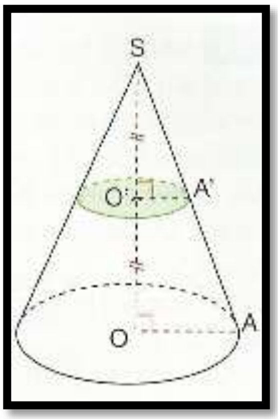
1. Dans le triangle SAB, calculer $\frac{SE}{SA}$
2. En déduire la longueur SO'.
3. Calculer le volume de la pyramide SABCD.
4. Calculer le volume de la pyramide SEFGH et en déduire le volume de la boîte.
5. Le volume de la boîte sera-t-il suffisant pour contenir 1,5 litre de crème glacée ?

Coupé à moitié ?

Un cône de révolution a été sectionné par un plan perpendiculaire à sa hauteur. La section passe par O' le milieu de la hauteur [SO].

On peut donc dire que le cône a été coupé « à moitié ». Cela concerne les longueurs.

Peut-on dire la même chose concernant le volume du petit cône par rapport au grand ?



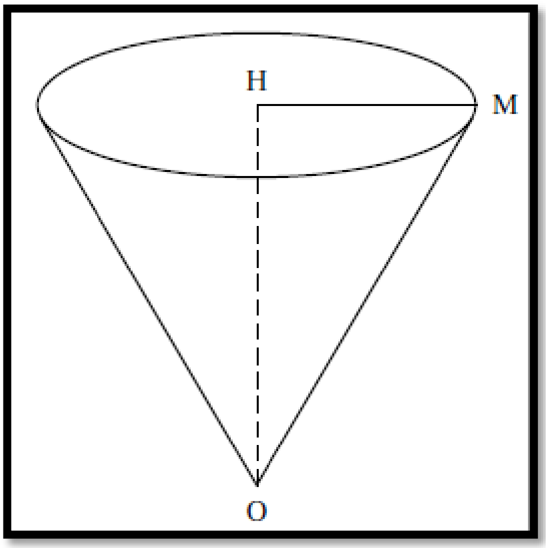
Rempli au quart ?

La figure ci-contre représente un cône de révolution d'axe (OH) tel que le segment [OH] mesure 5 centimètres et l'angle HOM mesure 30°.

1. Calculer la longueur HM arrondie au millimètre.

2. On verse de l'eau dans le cône jusqu'au quart de sa hauteur. Quel est le volume d'eau versé ?

3. Quel pourcentage du volume total du cône est occupé par l'eau ?

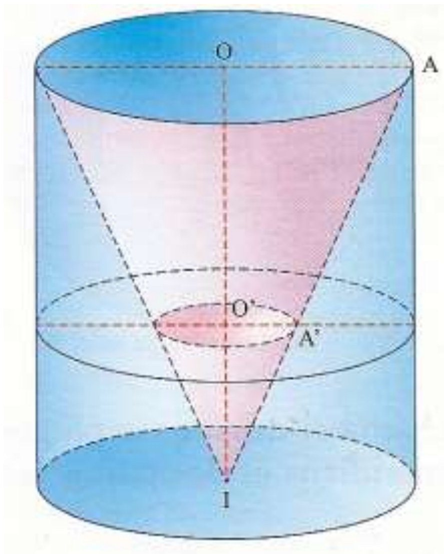


Tronc de cône

Un coquetier est fabriqué avec un cylindre de rayon 3 centimètres et de hauteur 6 centimètres, que l'on évide en creusant un cône de même base circulaire que le cylindre et dont le sommet est le centre de l'autre base du cylindre.

1. Montrer que le volume du coquetier exprimé en cm^3 est égal à 36π.

2. On sectionne l'objet par un plan (P) parallèle à la base du cylindre comme l'indique la figure ci-contre. Sachant que la longueur OO' est égale à 4 centimètres et que les droites (OA) et (OA') sont parallèles, calculer la longueur O'A'. Justifier.



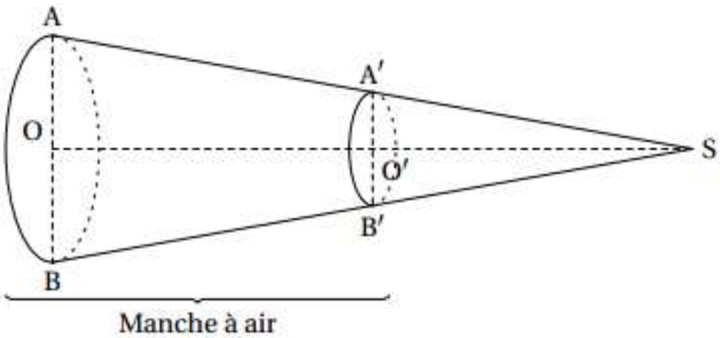
Dessiner la section du coquetier avec le plan (P) et calculer la surface de cette « couronne ».

Manche à air

Sur l'altiport (aérodrome d'altitude) de la station de ski se trouve une manche à air qui permet de vérifier la direction et la puissance du vent. Cette manche à air à la forme d'un tronc de cône de révolution obtenu à partir d'un cône auquel on enlève la partie supérieure, après section par un plan parallèle à la base. On donne :

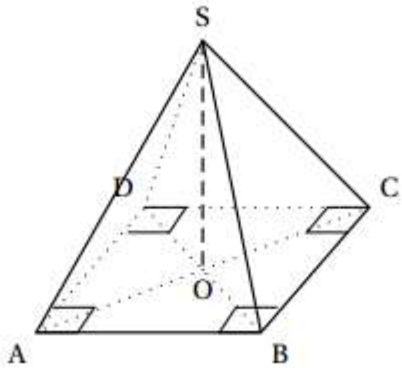
- AB = 60 cm, A'B' = 30 cm, BB' = 240 cm.
- O est le centre du disque de la base du grand cône de sommet S.
- O' milieu de [OS], est le centre de la section de ce cône par un plan parallèle à la base.
- B' appartient à la génératrice [SB] et A' appartient à la génératrice [SA].

1. Démontrer que la longueur SB est égale à 480 cm.
2. Calculer la longueur SO. On arrondira le résultat au centimètre.
3. Calculer le volume d'air qui se trouve dans la manche à air. On arrondira au centimètre cube.



Présentation de macarons

Pour présenter ses macarons, une boutique souhaite utiliser des présentoirs dont la forme est une pyramide régulière à base carrée de côté 30 cm et dont les arêtes latérales mesurent 55 cm. On a schématisé le présentoir par la figure suivante :



Peut-on placer ce présentoir dans une vitrine réfrigérée parallélépipédique dont la hauteur est de 50 cm ?

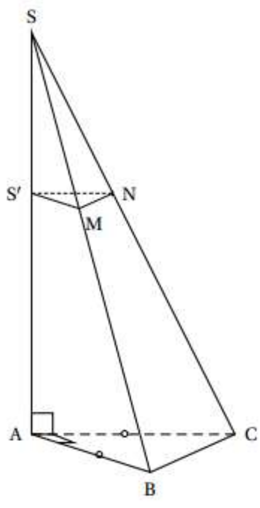
Bouteille de parfum

La dernière bouteille de parfum de chez Chenal a la forme d'une pyramide SABC à base triangulaire de hauteur [AS] telle que : ABC est un triangle rectangle et isocèle en A, AB = 7,5 cm et AS = 15 cm.

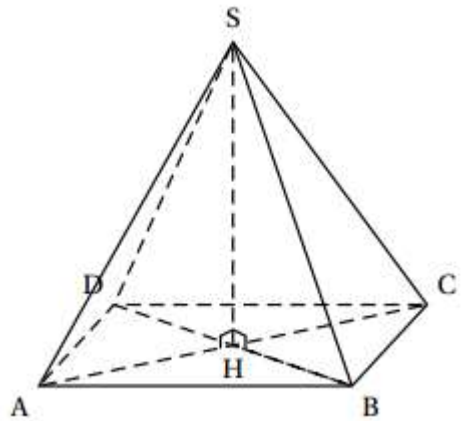
1. Calculer le volume de la pyramide SABC. On arrondira au cm3.

Pour fabriquer son bouchon SS'MN, les concepteurs ont coupé cette pyramide par un plan P parallèle à sa base et passant par le point S' tel que SS' = 6 cm.

2. Quelle est la nature de la section plane S'MN obtenue ? Calculer la longueur S'N. Calculer le volume maximal de parfum que peut contenir cette bouteille en cm3.



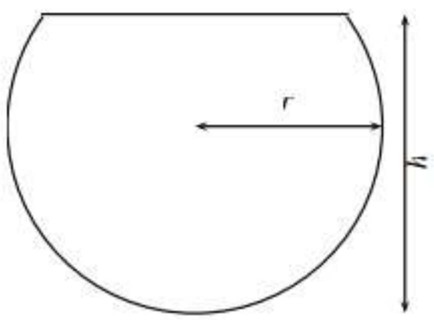
Pyramide du Louvre



La Pyramide du Louvre est une œuvre de l'architecte Leoh Ming Pei. Il s'agit d'une pyramide régulière dont la base est un carré de côté 35,50 mètres et dont les quatre arêtes qui partent du sommet mesurent toutes 33,14 mètres. La Pyramide du Louvre est schématisée comme ci-contre.

1. Calculer la hauteur réelle de la Pyramide du Louvre. On arrondira le résultat au centimètre.
2. On veut tracer le patron de cette pyramide à l'échelle 1/800. Calculer les dimensions nécessaires de ce patron en les arrondissant au millimètre. Construire le patron en faisant apparaître les traits de construction. On attend une précision de tracé au millimètre.

Aquarium

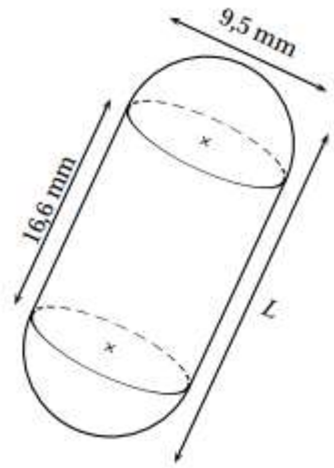


Un aquarium a la forme d'une sphère de 10 cm de rayon, coupée en sa partie haute : c'est une « calotte sphérique ». La hauteur totale de l'aquarium est 18 cm. Le volume d'une calotte sphérique est donné par la formule où r est le rayon de la sphère et h est la hauteur de la calotte sphérique :

$$V = \frac{\pi}{3} \times h^2 \times (3r - h)$$

1. Prouver que la valeur exacte du volume en cm3 de l'aquarium est 1296π.
2. Donner la valeur approchée du volume de l'aquarium au litre près.
3. On remplit cet aquarium à ras bord, puis on verse la totalité de son contenu dans un autre aquarium parallélépipédique. La base du nouvel aquarium est un rectangle de 15 cm par 20 cm. Déterminer la hauteur atteinte par l'eau (on arrondira au cm).

Une gélule



On considère une gélule constituée de deux demi-sphères identiques de diamètre 9,5 mm et d'une partie cylindrique d'une hauteur de 16,6 mm comme l'indique le croquis ci-contre.

Robert tombe malade et son médecin lui prescrit comme traitement une boîte d'antibiotique conditionné en gélules correspondant au croquis ci-dessus. Chaque gélule de cet antibiotique a une masse volumique de $6{,}15 \times 10^{-4}$ g/mm3. La boîte d'antibiotique contient 3 plaquettes de 6 gélules. Quelle masse d'antibiotique Robert a-t-il absorbée durant son traitement ? Donner le résultat en grammes arrondi à l'unité.