

## Carrés parfaits et racines carrées

La table de multiplication ci-dessous fait apparaître les premiers carrés parfaits :

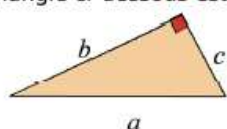
×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

- Définition et notation : la **racine carrée** d'un nombre positif  $a$  est le nombre positif dont le **carré** est le nombre  $a$ . La racine carrée de  $a$  est notée  $\sqrt{a}$ .
- Exemple : La racine carrée de 49 est 7 car le carré de 7 est 49. On note  $\sqrt{49} = 7$ .
- Remarque : Toute les racines carrées **ne sont pas des nombres entiers** ! C'est le cas des racines des nombres qui ne sont pas des carrés parfaits. On utilise alors la calculatrice...

## Théorème de Pythagore

- Propriété : SI un triangle est **rectangle** ALORS le **carré** de la longueur de l'**hypoténuse** est égal à la **somme des carrés** des longueurs des **deux côtés de l'angle droit**.
- Remarque : cette propriété permet de **calculer la longueur de l'hypoténuse** d'un triangle rectangle lorsqu'on connaît la longueur des deux côtés de l'angle droit. Il suffit pour cela d'**utiliser directement** la relation (égalité) de Pythagore.

**Exemple 1** : Le triangle ci-dessous est rectangle donc  $a^2 = b^2 + c^2$ .

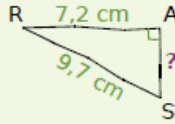


- Remarque : cette propriété permet également de **calculer la longueur d'un des côtés de l'angle droit** d'un triangle rectangle lorsqu'on connaît la longueur de l'hypoténuse et celle de l'autre côté de l'angle droit. Il suffit pour cela d'**effectuer une soustraction** après avoir établi la relation (égalité) de Pythagore.

**Exemple 2 : Calcul de la longueur d'un côté de l'angle droit**

Soit RAS un triangle rectangle en A tel que RS = 9,7 cm et RA = 7,2 cm. Calcule AS.

Figure à main levée :



Le triangle RAS est rectangle en A, son hypoténuse est le côté [RS]. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$RS^2 = RA^2 + AS^2$$

$$9,7^2 = 7,2^2 + AS^2$$

$$AS^2 = 9,7^2 - 7,2^2$$

$$AS^2 = 94,09 - 51,84$$

$$AS^2 = 42,25$$

La longueur AS est positive donc  $AS = \sqrt{42,25}$  cm.

(La valeur obtenue avec la calculatrice pour  $\sqrt{42,25}$  est 6,5. C'est une valeur exacte car  $6,5^2 = 42,25$ .)

Donc  $AS = 6,5$  cm (valeur exacte).

- Remarque : cette propriété permet enfin de **démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle**, cela arrive lorsque la relation (égalité) de Pythagore **n'est pas vérifiée**.

**Exemple 3** : NUL est un triangle tel que NU = 42 cm ; LU = 46 cm et LN = 62 cm. Démontre que NUL n'est pas un triangle rectangle.

Remarque préliminaire : Si ce triangle est rectangle, seul le côté [LN] peut être son hypoténuse car c'est le côté le plus long.

Dans le triangle NUL, le plus long côté est [LN] donc on **calcule séparément**  $LN^2$  et  $LU^2 + NU^2$  :

D'une part,  $LN^2 = 62^2$

$$LN^2 = 3844$$

D'autre part,  $LU^2 + NU^2 = 46^2 + 42^2$

$$LU^2 + NU^2 = 2116 + 1764$$

$$LU^2 + NU^2 = 3880$$

On constate que  $LN^2 \neq LU^2 + NU^2$ .

Or si le triangle était rectangle, d'après le théorème de Pythagore, il y aurait égalité. Comme ce n'est pas le cas, le triangle NUL n'est pas rectangle.

### Réciproque du théorème de Pythagore

- Propriété : SI dans un triangle, le **carré** de la longueur **du plus grand côté** est égal à la **somme des carrés** des longueurs **des deux autres côtés** ALORS ce triangle est **rectangle** et admet pour hypoténuse le plus grand côté.

**Exemple** : NEZ est un triangle tel que NE = 75 cm ; EZ = 45 cm et NZ = 60 cm. Démontre que ce triangle est rectangle.

Dans le triangle NEZ, le plus long côté est [NE] donc on **calcule séparément**  $NE^2$  et  $EZ^2 + NZ^2$  :

D'une part,  $NE^2 = 75^2$

$$NE^2 = 5625$$

D'autre part,  $EZ^2 + NZ^2 = 45^2 + 60^2$

$$EZ^2 + NZ^2 = 2025 + 3600$$

$$EZ^2 + NZ^2 = 5625$$

On constate que  $NE^2 = EZ^2 + NZ^2$ .

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle NEZ est rectangle en Z.