Egalité de quotients

- Propriété : SI on **multiplie (ou divise)** le **numérateur** et le **dénominateur** d'un quotient par un **même nombre non nul** ALORS on obtient un **quotient égal au premier**.

- Formule : SI a est quelconque, $b \neq 0$ et $k \neq 0$ ALORS $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}}$ ou $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}}$.

- Remarque : cette propriété permet de **simplifier** ou de **transformer** un quotient.

Exemple 1 : Simplifie le quotient $\frac{42}{-140}$.

$\frac{42}{-140} = -\frac{42}{140}$	$\longrightarrow$	On détermine le signe du quotient.
$\frac{42}{-140} = -\frac{3 \times 2 \times 7}{10 \times 7 \times 2}$	$\longrightarrow$	On cherche les facteurs communs à 42 et 140.
$\frac{42}{-140} = -\frac{3}{10}$	$\longrightarrow$	On simplifie le quotient.

Exemple 2 : Détermine le nombre manquant dans l'égalité $\frac{-1,2}{6} = \frac{\dots}{18}$.

$\times 3$ $\frac{-1,2}{6} = \frac{\dots}{18}$ $\times 3$	$\longrightarrow$	Pour passer de 6 à 18, **on multiplie par 3**.
donc $\frac{-1,2}{6} = \frac{-3,6}{18}$	$\longrightarrow$	Ainsi, pour trouver le nombre manquant, **on multiplie – 1,2 par 3**, ce qui donne – 3,6.

Produit en croix de deux quotients

- Propriété : SI **deux nombres en écriture fractionnaire** sont **égaux** ALORS **leurs produits en croix** sont **égaux**.

- Formule : Si $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$ ALORS $\boxed{a \times d = b \times c}$.

- Propriété réciproque : SI les **produits en croix** de **deux nombres en écriture fractionnaire** sont **égaux** ALORS ces **deux nombres** sont **égaux**.

- Formule : Si $\boxed{a \times d = b \times c}$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$ ALORS $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$.

- Remarque : cette propriété permet de **simplifier** ou de **transformer** un quotient.

Exemple 1 : Les nombres $\frac{2,1}{3,5}$ et $\frac{4,1}{6,9}$ sont-ils égaux ? Justifie.

$2,1 \times 6,9 = 14,49$ et $3,5 \times 4,1 = 14,35$	$\longrightarrow$	On calcule les produits en croix.
$14,49 \neq 14,35$	$\longrightarrow$	On les compare.
donc $\frac{2,1}{3,5} \neq \frac{4,1}{6,9}$	$\longrightarrow$	Les **produits en croix ne sont pas égaux** donc **les nombres ne sont pas égaux**.

Exemple 2 : Détermine le nombre manquant dans l'égalité $\frac{-1,2}{6} = \frac{...}{7}$.

$-1,2 \times 7 = 6 \times ?$ donc $-8,4 = 6 \times ?$	$\longrightarrow$	On écrit l'égalité des produits en croix.
$? = -\frac{8,4}{6} = -1,4$	$\longrightarrow$	On trouve le nombre manquant.

Additions et soustractions

- Règle : pour **additionner** (ou **soustraire**) deux nombres en écriture fractionnaire ayant le même dénominateur, on **additionne** (ou on **soustrait**) les **numérateurs**, on **conserve** le **dénominateur**.

- Formule : $\boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}}$ ou $\boxed{\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}}$ avec $c \neq 0$

- Remarque : pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture fractionnaire de **dénominateurs différents**, on réduit les deux écritures fractionnaires **au même dénominateur** puis on applique la règle ci-dessus.

Exemple : Calcule l'expression $A = -1 + \frac{13}{30} - \frac{-11}{12}$.

Multiples de 30 : 30 ; 60 ; 90 ; 120 ... Multiples de 12 : 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ...	$\longrightarrow$	On cherche le plus petit multiple commun non nul à 30 et 12.
$A = \frac{-1 \times 60}{1 \times 60} + \frac{13 \times 2}{30 \times 2} + \frac{11 \times 5}{12 \times 5}$	$\longrightarrow$	On détermine le signe de chaque quotient et on réduit les quotients au même dénominateur 60.
$A = \frac{-60}{60} + \frac{26}{60} + \frac{55}{60} = \frac{-60+26+55}{60}$	$\longrightarrow$	On additionne les numérateurs et on garde le dénominateur.
$A = \frac{21}{60} = \frac{7 \times 3}{20 \times 3} = \frac{7}{20}$	$\longrightarrow$	On simplifie si possible.

Multiplication

- Règle : pour **multiplier** deux nombres en écriture fractionnaire, on **multiplie** leurs **numérateurs entre eux**, o **multiplie** leurs **dénominateurs entre eux**.

- Formule : $\boxed{\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a \times b}{c \times d}}$ avec $c \neq 0$ et $d \neq 0$.

Exemple : Calcule l'expression $B = -\frac{35}{33} \times \frac{-39}{-80}$.
Donne le résultat sous forme simplifiée.

$B = -\frac{35 \times 39}{33 \times 80}$	$\longrightarrow$	On détermine le signe du résultat.
$B = -\frac{7 \times 5 \times 13 \times 3}{11 \times 3 \times 2 \times 5 \times 8}$	$\longrightarrow$	On cherche des facteurs communs.
$B = -\frac{7 \times 13}{11 \times 2 \times 8}$	$\longrightarrow$	On simplifie.
$B = -\frac{91}{176}$	$\longrightarrow$	On calcule.

Inverse d'un nombre non nul

- Définition : deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre lorsque **leur produit est égal à 1**.

- Propriété : SI x est un **nombre non nul** ALORS **son inverse** est le nombre $\frac{1}{x}$.

- Notation : l'inverse d'un nombre x se note de la façon suivante x^{-1}.

- Propriété : SI $\frac{a}{b}$ est un **nombre en écriture fractionnaire** ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) ALORS **son inverse** est le nombre en écriture fractionnaire $\frac{b}{a}$.

- Remarques : un nombre et son inverse ont **toujours le même signe**, le nombre **zéro n'admet pas d'inverse**.

Exemple : Quels sont les inverses des nombres 3 et $\frac{-7}{3}$?

L'inverse de 3 est $3^{-1} = \frac{1}{3}$.	L'inverse de $\frac{-7}{3}$ est $\left(\frac{-7}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{-7}{3}} = \frac{3}{-7} = \frac{-3}{7}$.

Division de deux quotients

- Règle : **diviser** un nombre par un nombre non nul revient à **multiplier le premier nombre par l'inverse du deuxième**.

- Formule : $\boxed{a \div b = a \times \frac{1}{b}}$ avec $b \neq 0$.

- Remarque : cette règle est **très utile dans le cas de la division** de deux nombres en écritures fractionnaires puisqu'elle **permet de se ramener à la règle de multiplication**.

- Formule : $\boxed{\frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b}}$ avec $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$.

Exemple 1 : Calcule $C = \frac{-8}{7} \div \frac{5}{-3}$.

$C = +\left(\frac{8}{7} \div \frac{5}{3}\right)$ ⟶ On détermine le signe du résultat.

$C = \frac{8}{7} \times \frac{3}{5}$ ⟶ On multiplie par l'inverse du deuxième quotient.

$C = \frac{8 \times 3}{7 \times 5}$ ⟶ On multiplie les fractions.

$C = \frac{24}{35}$ ⟶ On calcule.

Exemple 2 : Calcule $D = \dfrac{-\dfrac{32}{21}}{\dfrac{-48}{-35}}$ et donne le résultat en le simplifiant le plus possible.

$D = -\dfrac{\dfrac{32}{21}}{\dfrac{48}{35}}$	$\longrightarrow$ On détermine le signe du résultat.
$D = -\dfrac{32}{21} \times \dfrac{35}{48}$	$\longrightarrow$ On multiplie par l'inverse du deuxième quotient.
$D = -\dfrac{8 \times 2 \times 2 \times 7 \times 5}{7 \times 3 \times 3 \times 2 \times 8}$	$\longrightarrow$ On cherche des facteurs communs.
$D = -\dfrac{10}{9}$	$\longrightarrow$ On calcule sans oublier de simplifier avant !

Exemple 3 : Quelle est la nature du nombre E défini par $E = \dfrac{1+\dfrac{2}{3}}{1-\dfrac{2}{3}}$?

$E = \dfrac{\dfrac{3}{3}+\dfrac{2}{3}}{\dfrac{3}{3}-\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\dfrac{5}{3}}{\dfrac{1}{3}}$	$\longrightarrow$ E peut s'écrire aussi $E = \left(1+\dfrac{2}{3}\right) \div \left(1-\dfrac{2}{3}\right)$. On commence donc par calculer les parenthèses.
$E = \dfrac{5}{3} \times \dfrac{3}{1}$	$\longrightarrow$ On multiplie par l'inverse du deuxième quotient.
$E = \dfrac{5 \times 3}{3 \times 1}$	$\longrightarrow$ On cherche des facteurs communs.
$E = 5$ donc E est un nombre entier.	

Valeurs approchées d'un quotient

A un rang donné (unité, dixième, centième, millième, etc) :

- La **valeur approchée par défaut** d'un nombre est le **nombre décimal inférieur le plus proche** dont la partie décimale correspond au rang donné,

- La **valeur approchée par excès** d'un nombre est le **nombre décimal supérieur le plus proche** dont la partie décimale correspond au rang donné,

- La **troncature** d'un nombre correspond à la **valeur approchée par défaut**,

- L'**arrondi** d'un nombre correspond à la **valeur approchée par défaut** ou à la **valeur approchée par excès**, celle qui est la **plus proche du nombre**.

$25 \div 7 \approx 3,57142857$	**Encadrement**	**Troncature**	**Arrondi**
Au dixième	3,5 < 25/7 < 3,6	3,5	3,6
Au centième	3,51 < 25/7 < 3,52	3,51	3,51