Quatrième proportionnelle

- Dans une situation de proportionnalité, la **quatrième proportionnelle** est le quatrième nombre calculé à partir de trois autres nombres déjà connus. Pour déterminer une quatrième proportionnelle on utilise l'égalité des **produits en croix**.

a	c
b	x ?

a, b et c sont différents de zéro.

$a \times x = b \times c$ (**égalité des produits en croix**).

Exemple : Calcule le prix x de trois baguettes grâce au tableau de proportionnalité suivant.

Le prix du pain est proportionnel au nombre de baguettes achetées. L'égalité des produits en croix donne :
$5 \times x = 4{,}25 \times 3$.

Donc : $x = \dfrac{4{,}25 \times 3}{5} = \dfrac{12{,}75}{5} = 2{,}55$ €.

Nombre de baguettes	5	3
Prix en €	4,25	x ?

Représentation graphique

- <u>Propriété :</u> Si on représente graphiquement dans un repère une situation de proportionnalité alors on obtient des **points alignés avec l'origine du repère**.

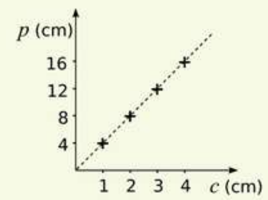
Exemple 1 : Le périmètre p d'un carré est proportionnel à son côté c puisqu'on a $p = 4c$.
Représente graphiquement le périmètre en fonction du côté.

1. On **choisit** des valeurs pour le côté c.
2. On **calcule** les valeurs correspondantes du périmètre p.

côté c (en cm)	1	2	3	4
périmètre p (en cm)	4	8	12	16

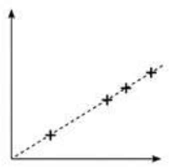
×4

3. On **place** les points dans un repère comme ci-contre.

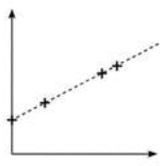


- <u>Réciproque :</u> Si une situation est représentée par des points alignés avec l'origine du repère alors c'est **une situation de proportionnalité**.

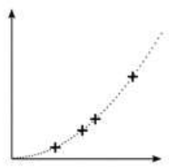
Exemple 2 : Ces graphiques représentent-ils des situations de proportionnalité ? Justifie.



Oui, car les points sont alignés avec l'origine du repère.



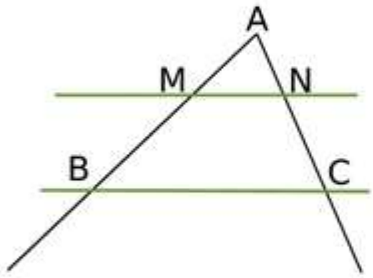
Non, car les points sont alignés mais pas avec l'origine du repère.



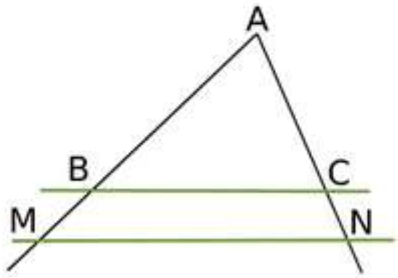
Non, car les points ne sont pas alignés.

Proportionnalité de longueurs dans un triangle

- Propriété : Si dans un triangle ABC, M est un point de la demi-droite [AB), N est un point de la demi-droite [AC) et les droites (BC) et (MN) sont **parallèles** alors les **rapports** de longueurs $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$ sont **égaux entre eux**.



ou



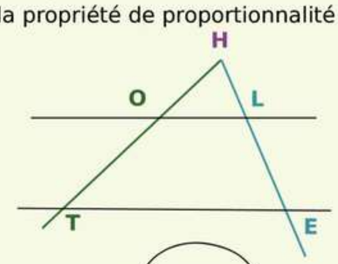
- Remarque : lorsque le théorème de Thalès s'applique, le tableau qui rassemble les longueurs du triangle ABC et celles du triangle AMN est un tableau de proportionnalité :

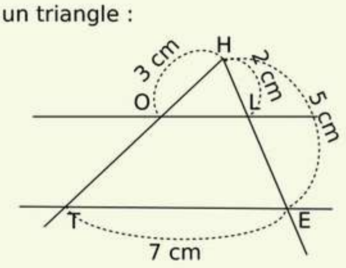
Longueurs des côtés du triangle ABC	AB	AC	BC
Longueurs des côtés du triangle AMN	AM	AN	MN

- Remarque : Le théorème de Thalès permet de calculer, dans certaines situations, une ou plusieurs longueurs inconnues. Après avoir écrit l'égalité de certains rapports de longueurs, il suffit de résoudre une équation pour déterminer la longueur inconnue.

Exemple 1 : Sur la figure suivante, les droites (OL) et (TE) sont parallèles. O et L appartiennent respectivement aux demi-droites [HT) et [HL). On donne HE = 5 cm, HL = 2 cm, TE = 7 cm et HO = 3 cm. Calcule les longueurs HT et OL.

Dans le triangle HTE : **O** $\in$ [HT], **L** $\in$ [HE] et (OL) // (TE).
D'après la propriété de proportionnalité des longueurs dans un triangle :





$$\frac{HO}{HT} = \frac{HL}{HE} = \frac{OL}{TE}$$

soit $\frac{3}{HT} = \frac{2}{5} = \frac{OL}{7}$

- D'une part, $2 \times$ **HT** $= 3 \times 5$ soit **HT** $= 3 \times \frac{5}{2} = 7{,}5$ donc **HT** = 7,5 cm.
- D'autre part, $5 \times$ **OL** $= 2 \times 7$ soit **OL** $= 2 \times \frac{7}{5} = 2{,}8$ donc **OL** = 2,8 cm.

Agrandissement et réduction d'une figure

- Définition : Quand deux figures F et F' ont **la même forme** et que les longueurs des côtés de F' sont **proportionnelles** aux longueurs des côtés de F on dit que :

  F' est un **agrandissement** de F si le coefficient de proportionnalité est **supérieur à 1**,

  F' est une **réduction** de F si le coefficient de proportionnalité est **inférieur à 1**.

  Le coefficient est appelé **rapport d'agrandissement ou de réduction**.

Exemple : Ce casse-tête est un cube constitué de plusieurs petits cubes de différentes couleurs.
Chaque petit cube est-il une réduction du casse-tête ?
Si oui, précise le rapport de cette réduction.

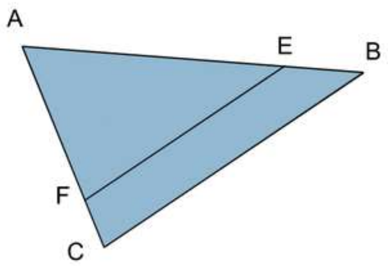
Chaque petit cube et le casse-tête ont la même forme : un cube. Comme chaque petit cube est plus petit que le casse-tête, alors chaque petit cube est bien une réduction du casse-tête.
Le côté du casse-tête contient trois petits cubes donc le rapport de réduction est $\frac{1}{3}$.

Remarque : Le casse-tête est un agrandissement de chaque petit cube de rapport 3.

- Propriété : Dans un agrandissement ou une réduction, les **mesures des angles**, la **perpendicularité** et le **parallélisme** sont conservés.

Exemple 2 : Déterminer si une figure est un agrandissement ou une réduction

Dans la figure ci-dessous, on donne les mesures suivantes :
AB = 6 cm, AC = 4 cm, BC = 5 cm, AF = 2,8 cm, AE = 4,2 cm et EF = 3,5 cm.
Le triangle AEF est-il une réduction du triangle ABC ?



Les figures AEF et ABC ont la même forme, on calcule donc les rapports :

$\frac{AE}{AB} = \frac{4,2}{6} = 0,7$

$\frac{AF}{AC} = \frac{2,8}{4} = 0,7$

$\frac{EF}{BC} = \frac{3,5}{5} = 0,7$

Les trois rapports sont égaux donc le triangle AEF est une réduction du triangle ABC.