La notation puissance

- Définition et notation : si n désigne un nombre entier positif, la **puissance n** du nombre relatif a est **le produit de n facteurs égaux** à a. On notera ce produit a^n et on lira cette notation « a puissance n ». Le nombre n est appelé **l'exposant**.

- Formule : $\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n fois}}}$.

- Extension de la définition et de la formule : si a est différent de 0, $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n fois}}}}$.

- Convention : pour tout nombre relatif non nul, $\boxed{a^0 = 1}$.

- Cas particuliers : pour tout nombre relatif $\boxed{a^1 = a}$ et si a est différent de 0 $\boxed{a^{-1} = \dfrac{1}{a}}$.

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale des nombres : 2^4 et 10^{-3}.

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$	$10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1\,000} = 0{,}001$

Exemple 2 : Écris sous la forme d'une puissance les expressions : $3^2 \times 3^3$ et $\dfrac{2^3}{2^5}$.

$3^2 \times 3^3 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) = 3^5$	$\dfrac{2^3}{2^5} = \dfrac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \dfrac{1}{2^2} = 2^{-2}$

Signe d'une puissance

- Propriété : SI le nombre a est **positif** ALORS le nombre a^n est **positif** quelque soit le nombre entier positif n (c'est-à-dire **quelque soit l'exposant**).

- Propriété : SI le nombre a est **négatif** ALORS le nombre a^n est **positif** lorsque l'exposant est n est **pair** OU est **négatif** lorsque l'exposant n est **impair**.

Exemple : Quel est le signe de A = $(-3)^4$ et de B = $(-2)^{-5}$?

- Comme **– 3 est négatif** et l'exposant **4 est pair**, **A est un nombre positif**.
- Comme **– 2 est négatif** et l'exposant **– 5 est impair**, **B est un nombre négatif**.

Puissance de 10

- Formule : pour tout nombre entier n strictement positif, $\boxed{10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{\text{n fois}}}$.

- Extension de la formule : pour tout entier n strictement positif $\boxed{10^{-n} = \dfrac{1}{\underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{\text{n fois}}}}$.

- Convention : $\boxed{10^0 = 1}$.

- Remarque : 10^n est un « grand nombre » pour lequel l'exposant correspond au nombre de zéros situés après le 1 : $\boxed{10^n = 1\underbrace{00...0}_{\text{n zéros}}}$.

- Remarque : 10^{-n} est un « petit nombre » pour lequel l'exposant correspond au nombre de zéros situés avant le 1 : $\boxed{10^{-n} = \underbrace{0,0...0}_{\text{n zéros}}1}$.

Exemple : Écris les nombres 100 000 ; 0,01 ; 100 et 0,000 001 sous la forme d'une puissance de 10.

100 000 = 10^5	0,01 = 10^{-2}	100 = 10^2	0,000 001 = 10^{-6}

Multiplication par une puissance de 10

- Règle : **multiplier** un nombre par 10^n revient à **décaler la virgule** de **n rangs vers la droite** (et de rajouter des zéros si nécessaire).

- Règle : **multiplier** un nombre par 10^{-n} revient à **décaler la virgule** de **n rangs vers la gauche** (et de rajouter des zéros si nécessaire).

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale des nombres 208,641 × 10^2 et 37,1 × 10^{-3}.

208,641 × 10^2 = 20 864,1	37,1 × 10^{-3} = 0,037 1

Exemple 2 : Par combien faut-il multiplier 7,532 pour obtenir 75 320 ?
Par combien faut-il multiplier 7 pour obtenir 0,007 ?

- Pour passer de 7,532 à 75 320, on décale la virgule de 4 rangs vers la droite donc il faut multiplier 7,532 par 10^4 pour obtenir 75 320.
- Pour passer de 7 à 0,007, on décale la virgule de 3 rangs vers la gauche donc il faut multiplier 7 par 10^{-3} pour obtenir 0,007.

Calculs avec les puissances de 10

- Règle du produit : **multiplier** deux puissances de 10 revient à **ajouter les exposants**.

- Règle du quotient : **diviser** deux puissances de 10 revient à **soustraire les exposants**.

- Règle de la puissance : **élever** une puissance de 10 **à une autre puissance** revient à **multiplier les exposants** entre eux.

- Formules : pour tout nombre entiers positifs n et p on peut écrire,

$$\boxed{10^n \times 10^p = 10^{n+p}} \qquad \boxed{\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}} \qquad \boxed{\left(10^n\right)^p = 10^{n \times p}}$$

- Attention ! il n'y a **pas de règle** pour l'addition/soustraction de deux puissances de 10.

Exemple : Donne l'écriture décimale des nombres $A = 10^4 \times 10^3$ et $B = 10^{-3} \times 10^{-7}$.

$A = 10^4 \times 10^3 = 10^{4+3} = 10^7 = 10\ 000\ 000$
$B = 10^{-3} \times 10^{-7} = 10^{-3+(-7)} = 10^{-10} = 0{,}000\ 000\ 000\ 1$

Exemple : Écris les nombres $C = \dfrac{10}{10^{-3}}$ et $D = \dfrac{10^{-7}}{10^3}$ sous la forme d'une seule puissance de 10.

$C = \dfrac{10^1}{10^{-3}}$	⟶	On remarque que $10 = 10^1$.
$C = 10^{1-(-3)}$ $C = 10^{1+3}$	⟶	On applique la règle du quotient de deux puissances de 10. (Attention aux signes moins !)
$C = 10^4$	⟶	On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

$D = \dfrac{10^{-7}}{10^3}$		
$D = 10^{-7-3}$	⟶	On applique la règle du quotient de deux puissances de 10. (Attention aux signes moins !).
$D = 10^{-10}$	⟶	On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

Exemple 1 : Écris le nombre $E = (10^{-3})^{-7} \times (10^2)^{-3}$ sous la forme d'une seule puissance de 10.

$E = 10^{-3\times(-7)} \times 10^{2\times(-3)}$	⟶	On applique la règle des puissances de puissance de 10.
$E = 10^{21} \times 10^{-6}$	⟶	On effectue les multiplications sur les exposants.
$E = 10^{21+(-6)}$	⟶	On applique la règle du produit de deux puissances de 10.
$E = 10^{15}$	⟶	On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

Exemple 2 : Donne l'écriture décimale des nombres $F = 10^3 + 10^2$ et $G = 10^{-2} - 10^{-3}$.

$F = 10^3 + 10^2 = 1\ 000 + 100 = 1\ 100$	$G = 10^{-2} - 10^{-3} = 0{,}01 - 0{,}001 = 0{,}009$

Ecriture scientifique

- Définition : tout nombre décimal non nul peut être écrit en **notation scientifique**, c'est-à-dire sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal **ayant un seul chiffre non nul avant la virgule** et n est un nombre **entier relatif.** a est appelé **mantisse** du nombre.

Exemple : Écris le nombre A = 6 430 en notation scientifique.

A = 6 430

$A = 6{,}43 \times 10^3$	⟶	On déplace la virgule de manière à obtenir un nombre ayant un seul chiffre non nul avant la virgule puis on multiplie par la puissance de 10 de manière à avoir égalité.

L'écriture scientifique de A est donc $6{,}43 \times 10^3$.

- Règle : pour **comparer deux nombres**, on peut **comparer leurs ordres de grandeurs** à l'aide de leurs **notations scientifiques**. En cas d'**égalité des exposants**, on **compare les mantisses.**

Exemple : Compare $A = 1{,}7 \times 10^3$ et $B = 2{,}5 \times 10^{-2}$ puis compare $C = 12{,}4 \times 10^3$ et $D = 3{,}1 \times 10^4$.

- L'ordre de grandeur de A est 10^3 alors que B est de l'ordre de 10^{-2}. Donc $A > B$.
- On écrit C en notation scientifique : $C = 1{,}24 \times 10 \times 10^3 = 1{,}24 \times 10^4$.
  L'ordre de grandeur de C est donc 10^4 tout comme l'ordre de grandeur de D.
  Mais comme $1{,}24 < 3{,}1$, alors $1{,}24 \times 10^4 < 3{,}1 \times 10^4$ et donc $C < D$.