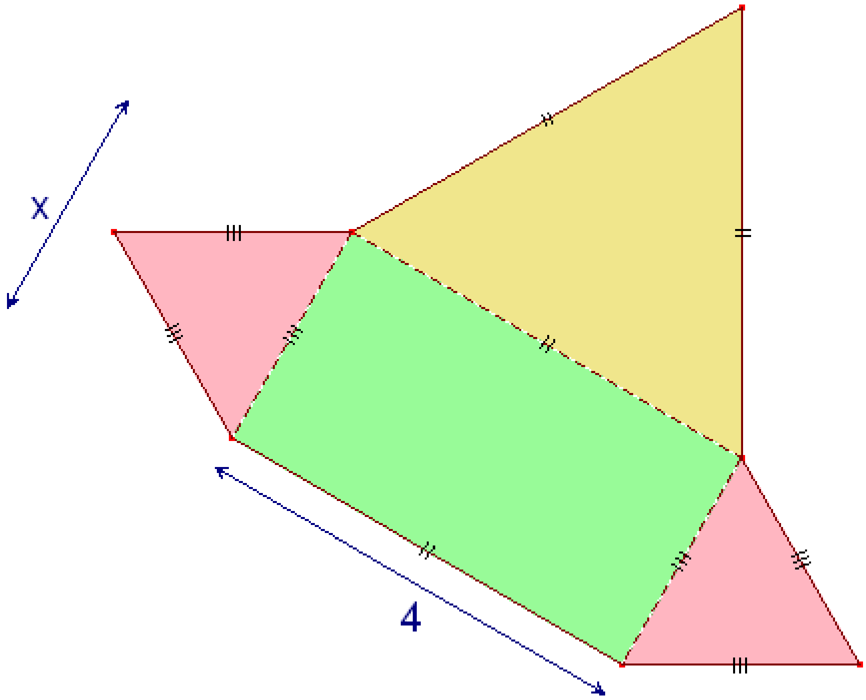
## Le périmètre d'une figure




1. Déterminer l'expression littérale du périmètre de la figure tracée ci-dessus.
   Cette expression sera donnée sous la forme la plus simple possible.

2. Déterminer le périmètre de cette figure lorsque $x=1$. Justifier la réponse par un calcul.

---

## Le volume d'un tonneau

Le volume d'un tonneau est donné par la formule suivante :

$$V=\frac{\pi h}{12}\left(D^2+Dd+d^2\right)$$

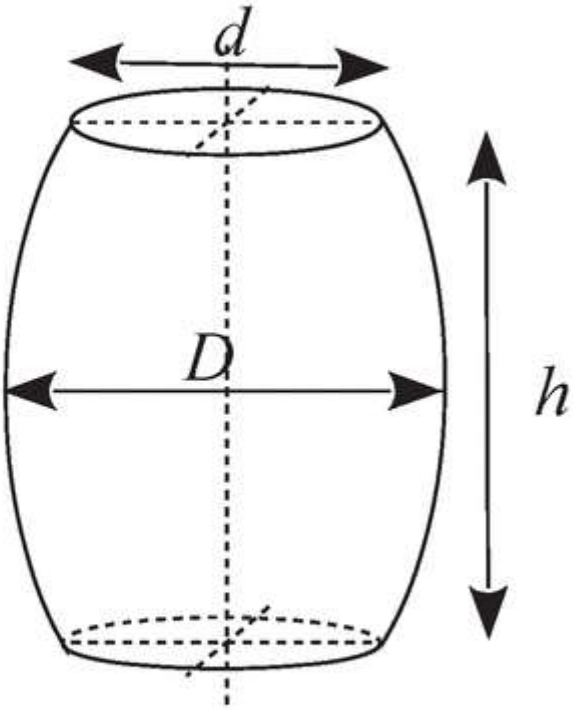
Les différentes dimensions exprimées en décimètres sont les suivantes :

$D=11$, $d=9$ et $h=15$

On prendra pour valeur approchée de la constante $\pi$ la valeur suivante :

$$\pi \simeq 3{,}14$$

On souhaite verser 1000 litres d'eau dans ce tonneau (c'est-à-dire mille décimètres cubes), la capacité de ce tonneau sera-t-elle suffisante ?



## Périmètre et aire d'une figure

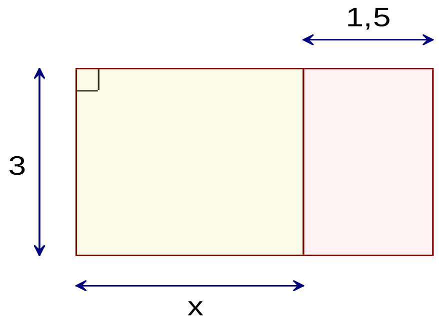



*Figure 1*

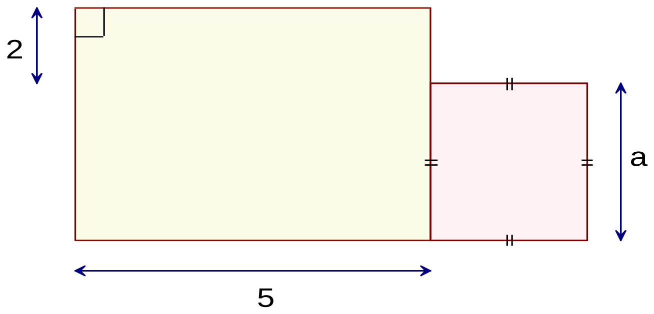



*Figure 2*

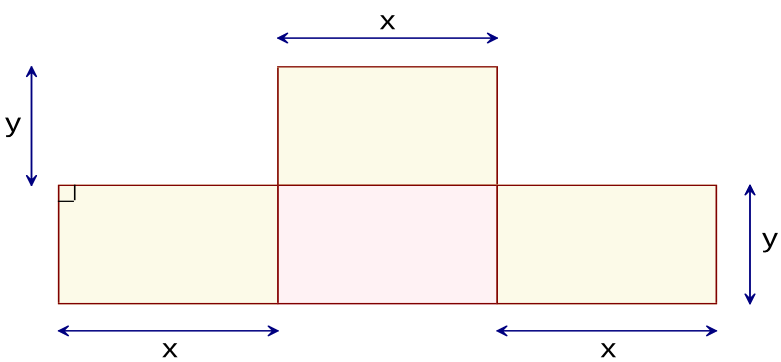



*Figure 3*

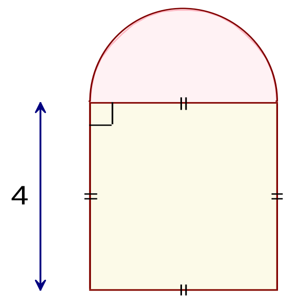



*Figure 4*

Partie 1 – Périmètre d'une figure

1. Pour chacune des configurations représentées ci-dessus, déterminer l'expression littérale du périmètre* de la figure. Cette expression sera donnée sous sa forme la plus simple.

2. Déterminer le périmètre de la figure 1 lorsque $x = 3$.

3. Déterminer le périmètre de la figure 2 lorsque $a = 1,5$.

4. Déterminer le périmètre de la figure 3 lorsque $x = 200$ et $y = 100$.

5. Déterminer le périmètre de la figure 4 lorsque $\pi = 3,14$.

Partie 2 – Aire d'une figure

1. Pour chacune des configurations représentées ci-dessus, déterminer l'expression littérale de l'aire de la figure. Cette expression sera donnée sous la forme la plus simple.

2. Déterminer l'aire de la figure 1 lorsque $x = 3$.

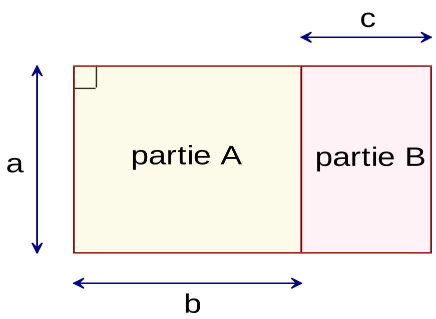
3. Déterminer l'aire de la figure 2 lorsque $a = 1,5$.

4. Déterminer l'aire de la figure 3 lorsque $x = 200$ et $y = 100$.

5. Déterminer l'aire de la figure 4 lorsque $\pi = 3,14$.

## Partie 3 – Aire d'un rectangle

On considère la configuration ci-contre représentant un rectangle constitué de deux parties elles-mêmes rectangulaires.




1. Déterminer l'expression littérale de l'aire de la partie A.

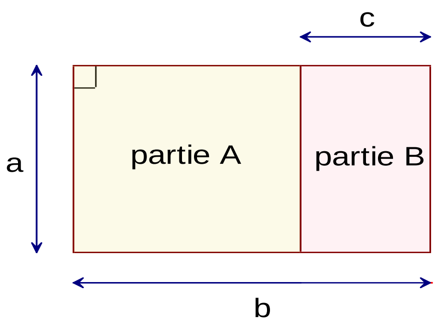
2. Déterminer l'expression littérale de l'aire de la partie B.

3. Déterminer de deux manières l'expression littérale de l'aire totale du rectangle.

4. En déduire une égalité entre deux expressions littérales.

## Partie 4 – Aire d'un rectangle

On considère la configuration ci-contre représentant un rectangle constitué de deux parties elles-mêmes rectangulaires.




1. Déterminer l'expression littérale de l'aire totale du rectangle

2. Déterminer l'expression littérale de l'aire de la partie B.

3. Déterminer de deux manières l'expression littérale de l'aire de la partie A.

4. En déduire une égalité entre deux expressions littérales.

## Partie 5 – Développer une expression

Développer une expression littérale c'est « enlever les enveloppes » c'est-à-dire supprimer les parenthèses. A l'aide des deux formules précédentes, développer les expressions :

$A = 2\times(x+3)$ $\qquad$ $B = -3\times(7+a)$ $\qquad$ $C = 5\times(2b-1)$ $\qquad$ $D = -12\times(3-y)$

$E = 2\times(3x+4)$ $\qquad$ $F = 5(x+6)+7(x+8)$ $\qquad$ $G = 9(x+8)-7(x+6)$

## Partie 4 – Un programme de calcul

On propose le programme de calcul suivant : « Penser à un nombre entier, ajouter au double du suivant le double du précédent, puis retrancher le triple du nombre pensé au départ ».

1. Faire plusieurs essais. Que remarque-t-on ?

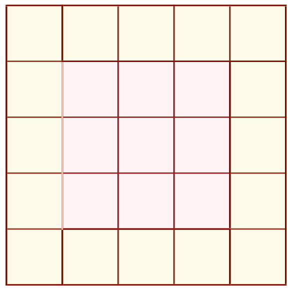
2. Ecrire le programme de calcul en partant d'un nombre $x$ quelconque, puis simplifier l'expression littérale ainsi obtenue. Que remarque-t-on ?

## Compter des carreaux

Partie 1 –Dans une pièce carrée

On veut carreler une pièce carrée. On dispose de carreaux de deux couleurs :

- Orange pour le pourtour,
- Rouge pour la partie centrale.



On appelle $n$ le nombre de carreaux sur un côté du carré et $N$ le nombre total de carreaux orange.

1. Déterminer $N$ lorsque $n = 4$.
2. Même question lorsque $n = 6$.
3. Développer et réduire chacune des formules suivantes. Que remarque-t-on ?

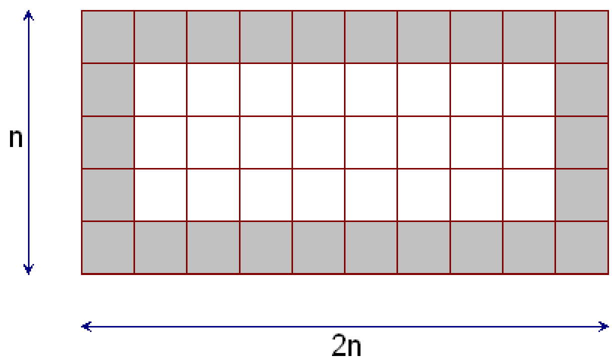
   $2n + 2(n-2)$ $\qquad$ $4(n-1)$ $\qquad$ $n + 2(n-1) + (n-2)$

4. Déterminer la valeur de $N$ lorsque $n = 10$. Justifier la réponse par un calcul précis.

Partie 2 – Dans une pièce rectangulaire

On veut carreler une pièce rectangle dont la longueur est le double de la largeur. On dispose de carreaux carrés de deux couleurs :

- Gris pour le pourtour de la pièce,
- Blancs pour la partie centrale.




On appelle $n$ le nombre de carreaux sur la largeur du rectangle, $N$ le nombre de carreaux gris sur le pourtour de la pièce.

1. Déterminer $N$ lorsque $n = 4$.
2. Même question lorsque $n = 6$.
3. Développer et réduire les expressions algébriques suivantes. Que remarque-t-on ?

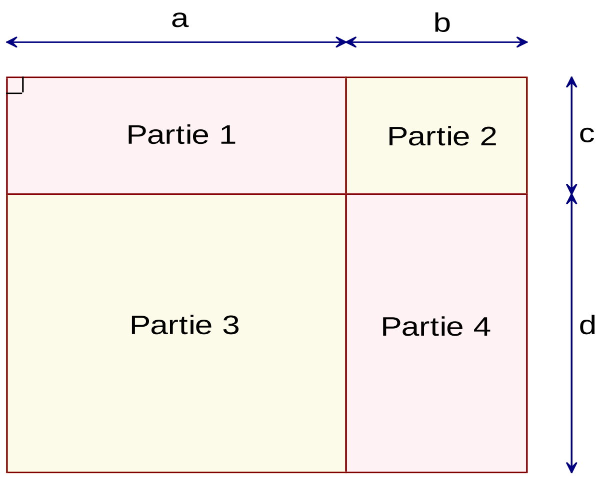
   $2n + 2(2n-2)$ $\qquad$ $2(n-1) + 2(2n-1)$ $\qquad$ $2(n+2n) - 4$

4. En déduire la valeur de $N$ lorsque $n = 10$. Justifier la réponse par un calcul précis.

## Développer des expressions

### Partie 1

On considère la configuration ci-contre représentant un rectangle constitué de quatre parties elles-mêmes rectangulaires.




1. Déterminer l'expression littérale de l'aire de chacune des quatre parties.

2. Déterminer de deux manières l'expression littérale de l'aire totale du rectangle.

3. En déduire une égalité entre deux expressions littérales.

### Partie 2

A l'aide de la formule précédente, développer réduire et ordonner les expressions littérales :

$A=(a+2)\times(b+3)$ $\quad B=(5+x)\times(7+y)$ $\quad C=(x+10)\times(20+y)$ $\quad D=(0,5+a)\times(b+2)$

$E=(x+3)\times(x+5)$ $\quad F=(a+1)\times(2+a)$ $\quad G=(6+y)\times(y+5)$ $\quad H=(0,1+b)\times(10+b)$

$I=(2x+1)(3x+2)$ $\quad J=(4x-3)(5x+4)$ $\quad K=(6x+5)(7x-6)$ $\quad L=(8x-7)(9x-8)$

### Partie 3

On propose le programme de calcul suivant : « Penser à un nombre entier, multiplier l'entier suivant par l'entier précédent, puis retrancher le carré du nombre pensé au départ ».

1. Faire plusieurs essais. Que remarque-t-on ?

2. Ecrire le programme de calcul en partant d'un nombre $x$ quelconque, puis simplifier l'expression littérale ainsi obtenue. Que remarque-t-on ?

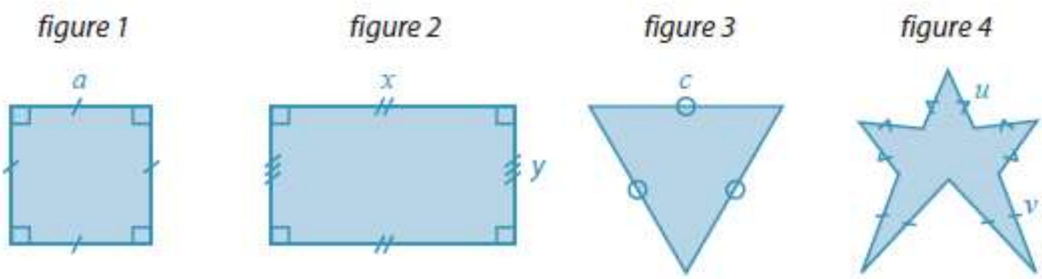
On propose le programme de calcul suivant : « Penser à un nombre entier, multiplier ce nombre par l'entier suivant, multiplier ce nombre par l'entier précédent, soustraire les deux résultats, puis retrancher le double du nombre pensé au départ ».

3. Faire plusieurs essais. Que remarque-t-on ?

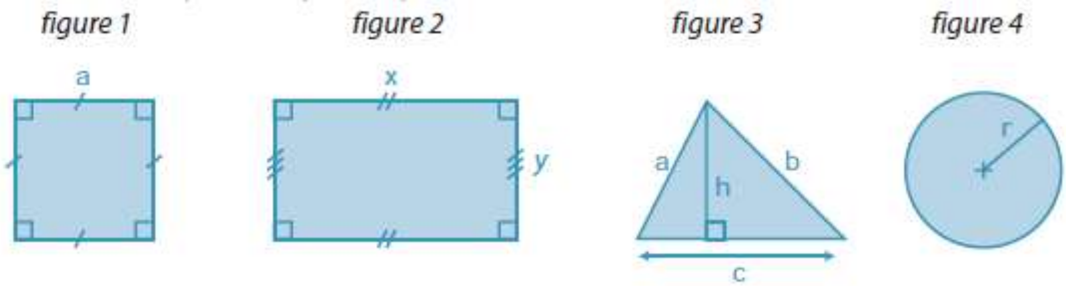
4. Ecrire le programme de calcul en partant d'un nombre $x$ quelconque, puis simplifier l'expression littérale ainsi obtenue. Que remarque-t-on ?

## Une série de dix exercices pour s'entrainer

### Exercice 1




Détermine la formule du périmètre (longueur du contour) de chacune des figures représentées ci-dessus. Chaque expression littérale sera proposée sous la forme la plus simple.




Détermine la formule de l'aire (mesure de la surface délimitée) de chacune des figures représentées ci-dessus. Chaque expression littérale sera proposée sous la forme la plus simple.

### Exercice 2

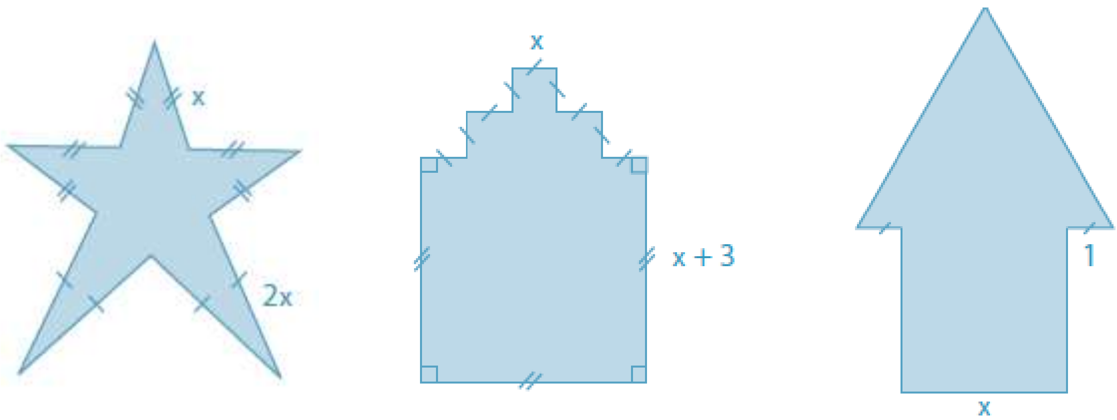
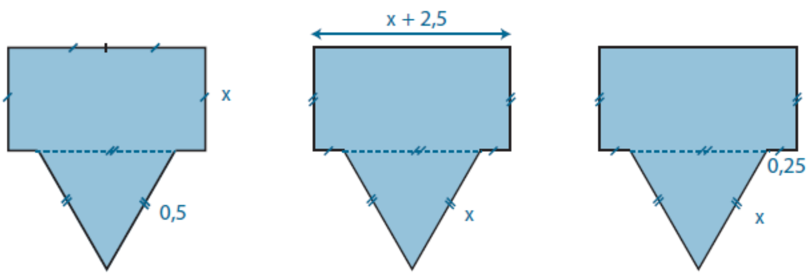



*Figure 1* *Figure 2* *Figure 3*

Pour chacune des figures proposées ci-dessus, écrire une formule pour son périmètre. Chaque expression littérale sera proposée sous la forme la plus simple. Dans la figure 3, il s'agit d'un triangle équilatéral posé sur un carré.

### Exercice 3

Laquelle des trois figures a pour périmètre $5(x+1)$ ? Justifier votre réponse.



Exercice 4

Ci-dessous on propose des expressions littérales avec parenthèses et des expressions littérales sans parenthèses. Associer à chaque expression littérale avec parenthèses l'expression littérale sans parenthèses qui lui correspond. Faire apparaître tous les détails de vos calculs.

| | | |
|---|---|---|
| $3x(2x-5)$ | $5(x-3)$ | $(x-1)(x+2)$ |
| $(x-3)(x-2)$ | $5(x-5)$ | $7x+14$ |
| $3x-(2x-1)$ | $x-(x+1)$ | $4(3x^2-2x+1)$ |
| $x^2+x-2$ | $x^2-5x+6$ | $7(x+2)$ |
| $x+1$ | $6x^2-15x$ | $x^2-1$ |
| $(x+1)(x-1)$ | $12x^2-8x+4$ | $5x-15$ |
| $5x-25$ | $x^2+1$ | $-1$ |

Exercice 5

Ci-contre on propose des expressions littérales avec parenthèses dans la colonne de gauche et des expressions sans parenthèses dans la colonne de droite. Associer à chaque expression de la colonne de gauche, une expression de la colonne de droite. Faire apparaître tous les détails.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(4x+3)-(x+5)$ | • | • | $3x+3$ |
| $7x-(3+4x)$ | • | • | $-3x-5$ |
| $(3+4x)-7x$ | • | • | $6$ |
| $6x-3-(3x-6)$ | • | • | $3x-2$ |
| $-(4x+5)-(-x)$ | • | • | $-3x+3$ |
| $5x+3-(-3+5x)$ | • | • | $3x-3$ |

Exercice 6

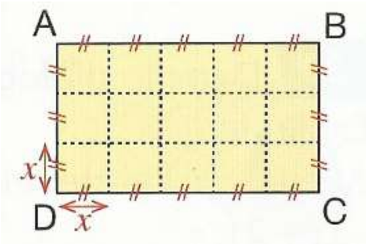
Développer les expressions avec parenthèses afin d'être en mesure d'associer les dominos.

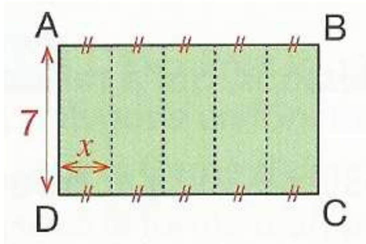
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $12-8x$ | $7(4x+1)$ | $10x+30$ | $7(3x+1)$ | $2x+2$ | $3(2-3x)$ | $8x+2$ | $8(x-3)$ |
| $6x+12$ | $5(2x+1)$ | $8x-24$ | $5(2x+6)$ | $7x-42$ | $2(4x+1)$ | $4x-2$ | $5(1-x)$ |
| $28x+7$ | $3(x-5)$ | $21x+7$ | $4(3x-2)$ | $14x-7$ | $4(3x+4)$ | $9x+27$ | $2(2x-1)$ |
| $5-5x$ | $3(2x+4)$ | $3x-15$ | $8(3x-1)$ | $6-9x$ | $7(x-6)$ | $20-15x$ | $3(3x+9)$ |
| $10x+5$ | $4(3-2x)$ | $24x-8$ | $7(2x-1)$ | $12x+16$ | $2(x+1)$ | $12x-8$ | $5(4-3x)$ |

Exercice 7

Exprimer en fonction de $x$ le périmètre des deux rectangles.

Exprimer en fonction de $x$ l'aire des deux rectangles.




Développer puis réduire les expressions suivantes en faisant apparaître toutes les étapes :

**a.** $4 \times (n+3) = 4 \times \ldots + 4 \times \ldots = \ldots + \ldots$
**b.** $6(3-x) = 6 \times \ldots - 6 \times \ldots = \ldots - \ldots$
**c.** $2(5y+7) = 2 \times \ldots + \ldots \times 7 = \ldots + \ldots$

**a.** $(x+5)(x+3) = \ldots + \ldots x + \ldots x + \ldots$
**b.** $(3x+2)(x+4) = 3\ldots + \ldots x + \ldots x + \ldots$
**c.** $(x+3)(x-2) = \ldots - \ldots x + \ldots x - \ldots$
**d.** $(x-4)(x-1) = \ldots - \ldots x - \ldots x + \ldots$

Exercice 8

Recopier et associer une expression du tableau A avec une expression du tableau B.

| | |
|---|---|
| $4\times3+x$ | $4\times x\times3$ |
| $4+3\times x$ | $4\times x+3$ |

*Tableau A*

| | |
|---|---|
| $4x+3$ | $12+x$ |
| $4+3x$ | $12x$ |

*Tableau B*

Recopier et associer une expression du tableau A avec une expression du tableau B.

| | |
|---|---|
| $4\times(3+x)$ | $6\times(3-x)$ |
| $3\times(4+x)$ | $2\times(9-x)$ |
| $2\times(3\times x+3)$ | $3\times(6\times x-6)$ |
| $6\times(x+2)$ | $6\times(x-3)$ |

*Tableau A*

| | |
|---|---|
| $6x+6$ | $18-2x$ |
| $4x+12$ | $18x-18$ |
| $6x+12$ | $6x-18$ |
| $3x+12$ | $18-6x$ |

*Tableau B*

Recopier et compléter les expressions avec des $+$ et des $\times$ pour que les égalités soient correctes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $4\ldots x\ldots6=4x+6$ | $6\ldots y\ldots5=6+5y$ | $2\ldots x\ldots5=10x$ | $7\ldots b\ldots b\ldots b=7b^2+b$ |
| $4\ldots b\ldots b=4b^2$ | $4\ldots b\ldots b=4+b^2$ | $2\ldots a\ldots a\ldots a=2a^3$ | $2\ldots g\ldots g\ldots g=2g+g^2$ |

Exercice 9

Pour chaque figure écrire une expression littérale donnant la longueur AB en fonction de $x$ :

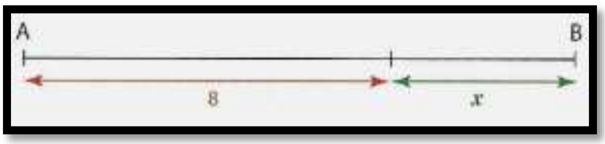



*Figure 1*


*Figure 2*


*Figure 3*


*Figure 5*

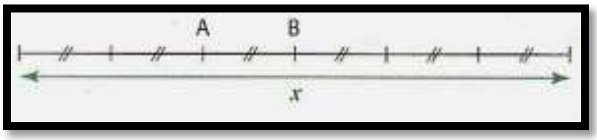



*Figure 5*

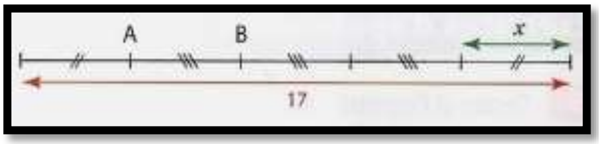
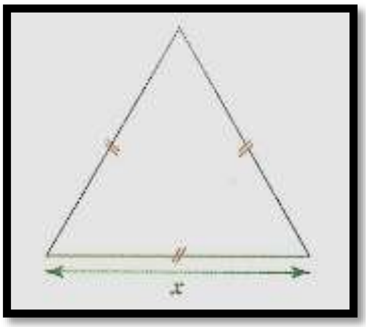


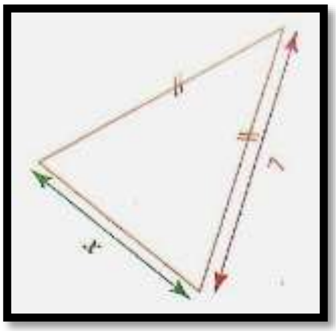

*Figure 6*

## Exercice 10

Pour chaque triangle proposé ci-contre écrire une expression littérale donnant le périmètre en fonction de $x$. Pour quelle valeur de $x$ le triangle 1 a-t-il un périmètre égal à 18 ? Pour quelle valeur de $x$ le triangle 2 a-t-il un périmètre égal à 20 ?

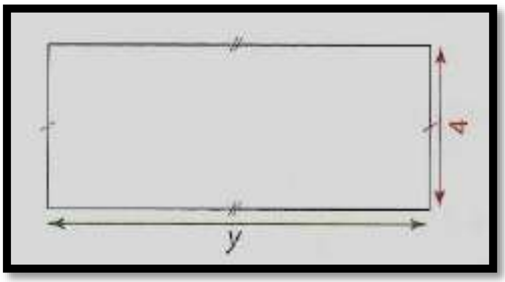



*Triangle 1*

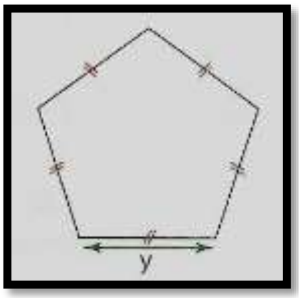



*Triangle 2*

Pour les deux figures proposées ci-contre, écrire une expression littérale donnant le périmètre en fonction de $y$. Pour quelle valeur de $y$ le rectangle a-t-il un périmètre égal à 30 ?




*rectangle*




*pentagone*

Pour quelle valeur de $y$ le pentagone a-t-il un périmètre égal à 30 ?

## Exercice 11

Dans un carré magique, la somme des nombres en ligne, des nombres en colonne et des nombres en diagonales est la même. Recopier et compléter ce carré pour qu'il soit magique quelle que soit la valeur de $a$ et de $b$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | | $b$ | $a+3$ |
| | $a+5$ | $a+6$ | $a+8$ |
| | $b-4$ | $a+10$ | $a+4$ |
| | | $a+1$ | |

## Exercice 12

Développer les expressions proposées ci-dessous :

$A = (x+4)(x+3)$

$B = (y+3)(2y+8)$

$C = (3z+4)(5-6z)$

$D = (-7t+8)(3-5t)$

$A = (7-3x)(9x-3)$

$B = (-2-3y)(4-8y)$

$C = (4a+6)(-3-5a)$

$D = (5z-7)(8z+2)$

Exercice 13

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = 3 \times (x + 2)$ $\quad$ $E = 1{,}6(x - 0{,}5)$

$B = 7 \times (x - 6)$ $\quad$ $F = 4(x + 1)$

$C = 1 \times (x + 5)$ $\quad$ $G = 7(3x - 8)$

$D = 4 \times (5 - x)$ $\quad$ $H = 6(2x + 9)$

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = x(x + 2)$ $\quad$ $D = 5x(x - 1)$

$B = x(x - 6)$ $\quad$ $E = 6x(2 + 9x)$

$C = 3x(x + 5)$ $\quad$ $F = x(x^2 - 4)$

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = 11 + 2(x - 6) + 4(-3x - 6)$

$B = -2(x - 5) - 3(7 - 4x)$

$C = 8 + 2y - 5(2y - 6) + 4$

$D = -7y - 4(3y - 6) + 3 + 2(3y - 7)$

$E = -5z + 5z(z - 3) - 7(6 - 8z)$

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = x(x + 6) - x$ $\quad$ $C = 3x(x + 4) - 6x^2$

$B = x(y - 2) + xy$ $\quad$ $D = 9x(x^2 - 6) + 2x^2$

$E = 5x(3 + 5x) + x(5 + x) + 4x(2x + 1)$

$F = 7x(3x - 5) - 6x(8 + 7x)$

$G = 9(3 + 9x) + 4x^2(7 - 12x) - 11x( - 5 + 8x)$

Exercice 14

- Que peut-on dire de la somme de deux nombres pairs ? Pourquoi ?
- Que peut-on dire de la somme de deux nombres impairs ? Pourquoi ?
- La somme de deux nombres entiers consécutifs est-elle paire ou impaire ? Pourquoi ?

Exercice 15

- Que peut-on dire du produit de deux nombres pairs ? Pourquoi ?
- Que peut-on dire du produit de deux nombres impairs ? Pourquoi ?
- Le produit de deux nombres entiers consécutifs est-il pair ou impair ? Pourquoi ?

## Factoriser une expression littérale

Lorsqu'on **développe** une expression littérale, on **enlève les parenthèses** et on **transforme un produit en une somme**.

Lorsqu'on **factorise** une expression littérale, on effectue l'opération **contraire**, c'est-à-dire qu'on **transforme une somme en un produit** en **restituant les parenthèses**.

Pour **factoriser une expression littérale**, on recherche la présence d'un **facteur commun** parmi les termes de la somme puis on applique l'une des relations suivantes : $k \times a + k \times b = k \times (a+b)$ ou bien $k \times a - k \times b = k \times (a-b)$.

---

## Application directe

Dans chacune des expressions littérales proposées ci-dessous, déterminer le facteur commun parmi les termes de la somme (ou de la différence) puis factoriser cette expression.

*Pour commencer*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A = 6 \times b + 6 \times d$ | $C = p \times 8 - p \times a$ | $E = 6 \times a + 6 \times z$ | $G = 9 \times q - 8 \times q$ |
| $B = 3 \times 4 + g \times 4$ | $D = s \times 7 - 4 \times 7$ | $F = k \times 5 + k \times t$ | $H = s \times 2 - 2 \times w$ |

*Entraînement 1*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A = 4x + 8$ | $B = 7 + 21x$ | $C = 2 - 16x$ | $D = x^2 + 8x$ |

*Entraînement 2*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A = 3x + 3$ | $B = 9t + 9$ | $C = 4 - 4y$ | $D = 1{,}2 + 1{,}2r$ |

*Entraînement 3*

| | | |
|---|---|---|
| $A = 8x + 12y$ | $B = 49a - 56b$ | $C = 24x + 30y - 18z$ |
| $D = 15xy + 30xz$ | $E = 2x^2 + 8x$ | $F = 25x^2y - 15xy^2$ |

---

## La factorisation au service de la réduction

Remarquons que c'est la technique de factorisation qui est à la base de la **réduction d'une expression littérale** faisant apparaître à plusieurs reprises la même lettre dans les différents termes d'une addition ou d'une soustraction.

$A = 2x + 6x - 5x$

$A = (2 + 6 - 5) \times x$

$A = 3x$

Il n'est pas indispensable de faire apparaître toutes ces étapes mais il faut comprendre qu'une même lettre joue le rôle de facteur commun et que réduire revient en fait à factoriser cette lettre.

## Des expressions à factoriser

$A = 16x + 4$
$B = 9 - 72x$
$C = 12 - 8x$
$D = -6x - 18$
$E = 9x + 6$
$F = 42 - 14x$

$A = 54 - 18a$
$B = -49 + 21x$
$C = -36z + 63$
$D = 5b + 25$
$E = 3x^2 + x$
$F = 8t^2 + 2t$
$G = -x + 3x^2$
$H = 3y^2 + 9y^2$

$A = 8x + 12y$
$B = 49a - 56b$
$C = 24x + 30y - 18z$
$D = 15xy + 30xz$
$E = 2x^2 + 8x$
$F = 25x^2y - 15xy^2$

$A = 5x + 2x + 10x$
$B = 3ax^2 - 3ax + 3a$
$C = 9x(x - 3) + 9x(10 + 2x)$

$A = 10x - 8$
$A = 4x + 28$
$D = 6x - 5x^2$
$B = 6y^5 - 8y^2$
$B = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{14}{3}$
$E = 7uv + 21u^2$
$C = 3x^2 + 4x$
$C = 0{,}5x + 3{,}5$
$F = 2x + 10$

## Les dominos

**Par factorisation, associer à chaque expression développée (située à gauche de chaque domino)** l'expression factorisée correspondante (située à droite du domino).

| | |
|---|---|
| $12 - 8x$ | $7(4x+1)$ |
| $6x + 12$ | $5(2x+1)$ |
| $28x + 7$ | $3(x-5)$ |
| $5 - 5x$ | $3(2x+4)$ |
| $10x + 5$ | $4(3-2x)$ |

| | |
|---|---|
| $10x + 30$ | $7(3x+1)$ |
| $8x - 24$ | $5(2x+6)$ |
| $21x + 7$ | $4(3x-2)$ |
| $3x - 15$ | $8(3x-1)$ |
| $24x - 8$ | $7(2x-1)$ |

| | |
|---|---|
| $2x + 2$ | $3(2-3x)$ |
| $7x - 42$ | $2(4x+1)$ |
| $14x - 7$ | $4(3x+4)$ |
| $6 - 9x$ | $7(x-6)$ |
| $12x + 16$ | $2(x+1)$ |

| | |
|---|---|
| $8x + 2$ | $8(x-3)$ |
| $4x - 2$ | $5(1-x)$ |
| $9x + 27$ | $2(2x-1)$ |
| $20 - 15x$ | $3(3x+9)$ |
| $12x - 8$ | $5(4-3x)$ |

## Le mystère de la case rouge

Louise joue à un jeu de calcul contre son ordinateur. Elle est découragée car elle ne gagne jamais. Elle remplit les cases au fur et à mesure mais elle n'a jamais le temps de terminer. Dès qu'elle complète **la septième case**, l'ordinateur écrit immédiatement le résultat dans **la case rouge**. Aider Louise à trouver le procédé utilisé par l'ordinateur pour avoir une chance de rivaliser avec lui…

**Doc. 1 La grille**

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |
| + | |

**Doc. 2 Les consignes de calcul**

- Écrire deux nombres entiers de son choix dans les deux premières cases de la grille.
- Dans chacune des huit cases suivantes, écrire la somme des nombres des deux cases précédentes.
- Dans la case rouge, calculer la somme des dix nombres écrits.