Thème 2 : le futur des énergies

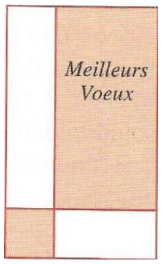
2.3 Optimisation du transport d'électricité

Modéliser un réseau de distribution électrique simple par un graphe orienté. Exprimer mathématiquement les contraintes et la fonction à minimiser. Sur l'exemple d'un réseau comprenant 2 sources, 1 nœud et 2 cibles, formuler le problème de minimisation des pertes par effet Joule et le résoudre pour différentes valeurs numériques correspondant aux productions des sources et aux besoins des cibles. (voir page 124 jusqu'à 135).

Contenu maths : notion élémentaire de graphe orienté / modéliser des contraintes entre variables par des équations / manipuler plusieurs équations pour exprimer une grandeur en fonction d'une autre / notion de fonction / détermination d'un extremum local par des techniques variées (lecture de tables, lecture graphique, forme canonique, dérivation)

Exercice 1

Une carte de vœu est de forme rectangulaire, de dimensions 6 centimètres et 10 centimètres. Elle comporte un rectangle et un carré coloré comme l'indique la figure ci-contre. Etant donné que ces cartes seront imprimées en grande quantité, on souhaite que la partie colorée soit la plus petite possible afin de minimiser la consommation d'encre nécessaire pour l'impression. On note x la dimension d'un côté du carré situé en bas à gauche et $a(x)$ l'aire totale de la partie colorée.



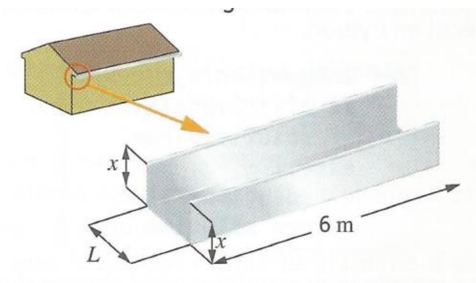
1. Démontrer que $a(x)=2x^2-16x+60$.

2. Montrer que $a(x)=2(x-4)^2+28$. Dresser le tableau de variations de la fonction a et en déduire la valeur de x pour laquelle la partie colorée est d'aire minimale.

3. Comment retrouver le même résultat avec l'outil de la dérivation ?

Exercice 2

Un bricoleur souhaite réaliser une gouttière pour sa cabane de jardin mesurant 6 mètres de long. Il dispose d'une feuille de métal rectangulaire de dimensions 6 mètres et 14 centimètres. Il compte plier chaque côté de la feuille en les relevant perpendiculairement. On désigne par x la longueur d'un côté relevé. On souhaite déterminer la valeur de x qui maximise la contenance (donc le volume) de la gouttière.



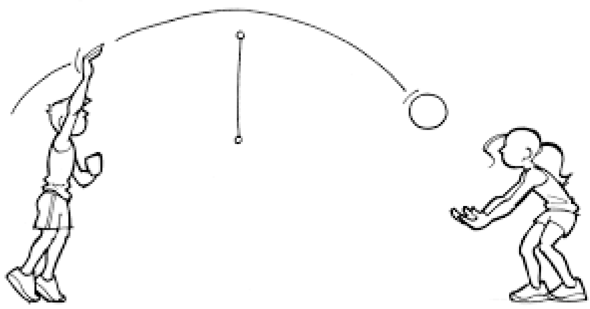
1. Montrer que le volume de la gouttière exprimé en cm^3 est $v(x)=-1200x^2+8400x$.

2. Montrer que $v(x)=-1200(x-3,5)^2+14700$. Dresser le tableau de variations de la fonction v et en déduire la valeur de x pour laquelle la contenance est maximale.

3. Comment trouver le même résultat avec l'outil de la dérivation ?

Exercice 3

Alex effectue un service lors d'une partie de volley-ball. La trajectoire du ballon est modélisée par la fonction h définie par $h(t) = -0,525t^2 + 2,1t + 1,9$ où $h(t)$ est la hauteur du ballon par rapport au sol exprimée en mètres en fonction du temps t exprimé en secondes.



1. Le temps $t = 0$ correspond au moment où Alex frappe le ballon.
   Montrer que $h(t) = -0,525(t-2)^2 + 4$. Dresser le tableau de variations de la fonction h.

2. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon au cours de sa trajectoire ?
   Au bout de combien de temps cette hauteur maximale est-elle atteinte ?

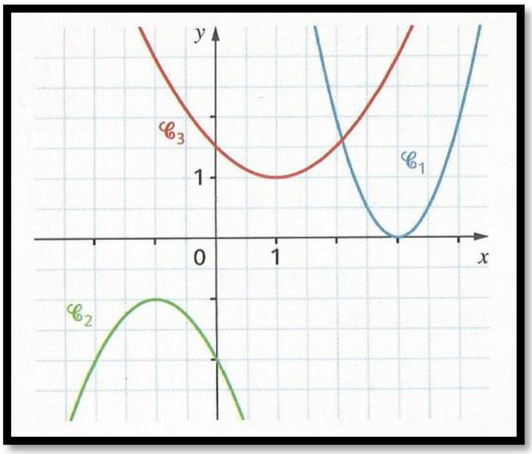
3. Comment trouver les mêmes résultats à l'aide de la dérivation ?

Exercice 4

On considère trois fonctions f, g et h définies par les expressions suivantes :

- $f(x) = -(x+1)^2 - 1$
- $g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$
- $h(x) = 2(x-3)^2$

Associer à chaque fonction sa courbe…



Exercice 5

Un trinôme du second degré est une fonction qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où les coefficients a, b et c sont trois réels quelconques tels que $a \neq 0$. Nous noterons $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Démontrer l'égalité suivante : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

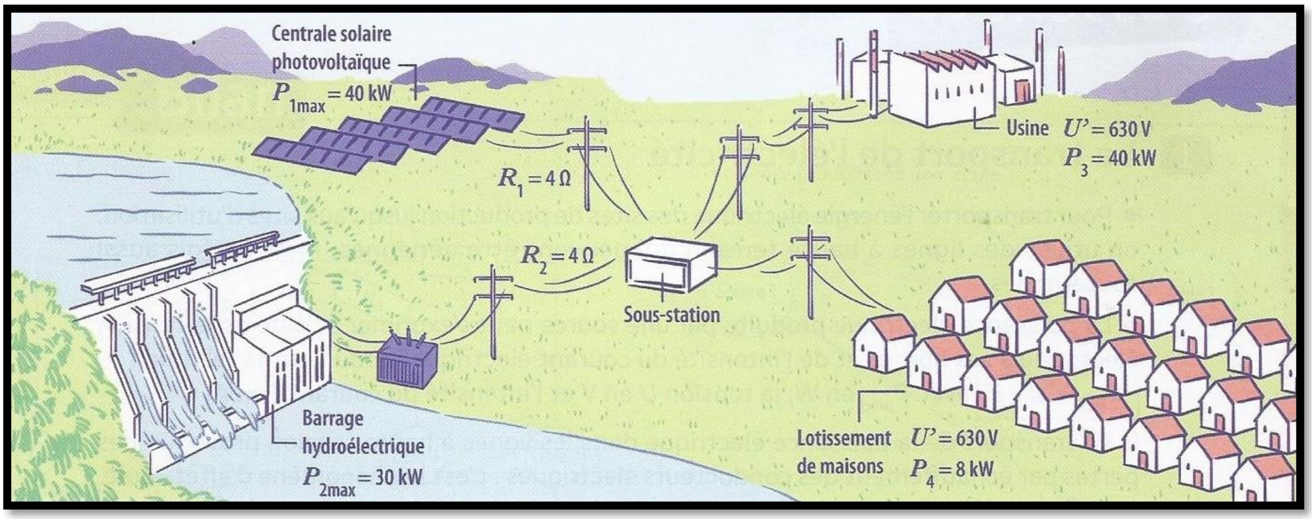
2. Dresser le tableau des variations de la fonction f en distinguant les cas où $a > 0$ et $a < 0$.

3. En déduire les variations des quatre fonctions proposées ci-dessous :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \qquad g(x) = -x^2 + 2x + 8 \qquad h(x) = 8x^2 - 16x + 16 \qquad k(x) = 2x^2 - 12x + 36$$

4. Comment trouver les mêmes résultats à l'aide de la dérivation ?

Exercice 6



On modélise un réseau électrique par une centrale solaire photovoltaïque de puissance maximale $P_{1max} = 40$ kW et une centrale hydroélectrique de puissance maximale $P_{2max} = 30$ kW. Ces centrales sont raccordées à une même sous-station qui permet d'alimenter une usine de puissance de fonctionnement $P_3 = 40$ kW et un lotissement de maisons de puissance de fonctionnement $P_4 = 8$ kW.
L'usine et le lotissement fonctionnent chacun avec une tension de 630 V.
Les valeurs des résistances des conducteurs entre la centrale solaire et la sous-station ainsi qu'entre la centrale hydroélectrique et la sous-station, peuvent être estimées chacune à 4 Ω. Les distances entre la sous-station et l'usine, ou même le lotissement sont de quelques kilomètres seulement, nous pouvons négliger la valeur de la résistance des lignes correspondantes.

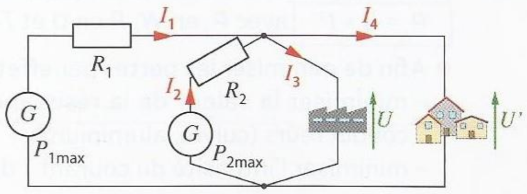


Schéma du circuit électrique

- La puissance électrique produite par une source peut s'exprimer à l'aide de la tension électrique à ses bornes et de l'intensité du courant électrique produit par la relation : $\boxed{P_{prod} = U \times I}$ avec P_{prod} en W, la tension U en V et l'intensité du courant I en A.

La puissance électrique dissipée par effet Joule dans un conducteur de résistance R parcouru par un courant électrique d'intensité I, a pour expression : $\boxed{P_J = R \times I^2}$ avec P_J en W, R en Ω et I en A.

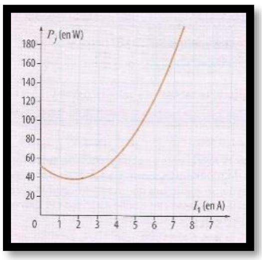
Contraintes du circuit

On note :
P (en watt), la puissance électrique ;
I (en ampère), l'intensité ;
R (en ohm), la résistance des conducteurs.

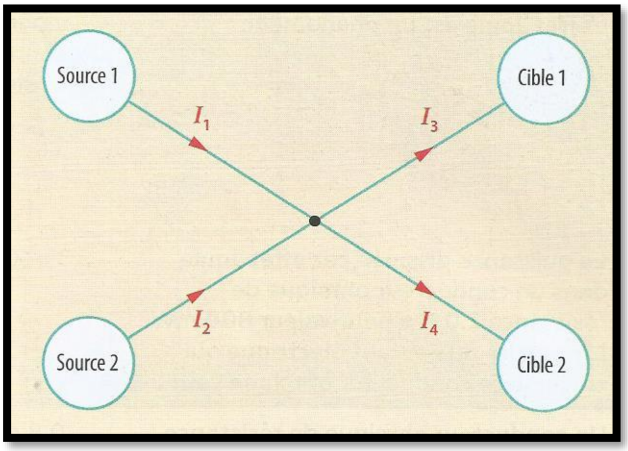
On considère que le circuit proposé doit répondre aux contraintes suivantes :

- **Loi des nœuds :** la somme des intensités des courants qui entrent par un nœud est égale à la somme des intensités des courants qui sortent du même nœud.
Ici : $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$
- **Pertes par effet Joule** $P_J = R \times I^2$
- **Principe de conservation de puissance**
Ici : $P_1 + P_2 = P_{Jtotal} + P_3 + P_4$
- **Loi d'Ohm pour chaque récepteur** (ici les câbles), $U = R \times I$
- **Puissance de fonctionnement des cibles** $P = U \times I$

Les pertes par effet Joule s'expriment comme une fonction du second degré que nous devons minimiser.

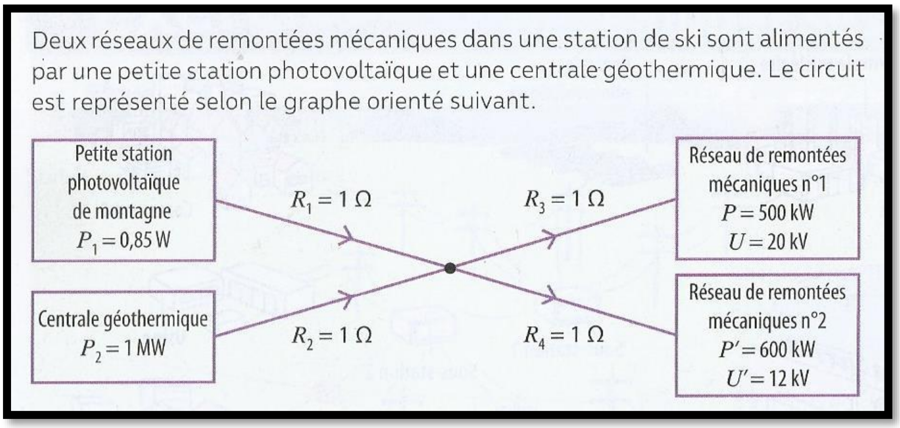


On a représenté ci-contre le réseau électrique proposé en haut de page sous la forme d'un graphe orienté. Identifier les contraintes de fonctionnement des deux cibles puis calculer les intensités parcourant l'usine et le lotissement. A l'aide de la loi des nœuds exprimer I_2 en fonction des autres intensités. Exprimer les pertes totales par effet Joule P_J de ce réseau électrique. Montrer que l'expression de P_J est $P_J(I_1) = 4\left(I_1^{\,2} + (76,2 - I_1)^2\right)$. Développer cette expression mathématique et la minimiser.



Exercice 7

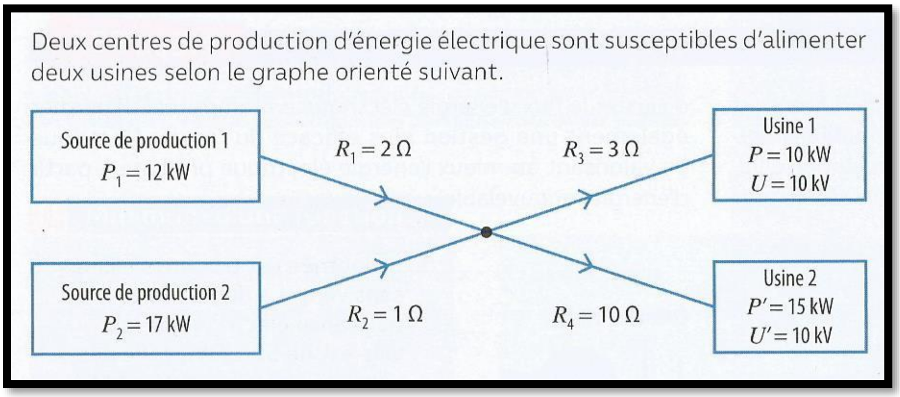
Vérifier que les pertes par effet Joule exprimées en fonction de I_1 sont données par la fonction *pertes* proposée ci-dessous. Trouver la valeur de I_1 qui minimise les pertes de ce réseau.



La fonction *pertes* est définie par $pertes(I_1) = 2I_1^{\,2} - 150I_1 + 8750$.

Exercice 8

Vérifier que les pertes par effet Joule exprimées en fonction de I_1 sont données par la fonction *pertes* proposée ci-dessous. Trouver la valeur de I_1 qui minimise les pertes de ce réseau.



La fonction *pertes* est définie par $pertes(I_1) = 3I_1^{\,2} - 5I_1 + 31,75$.

Exercice 9

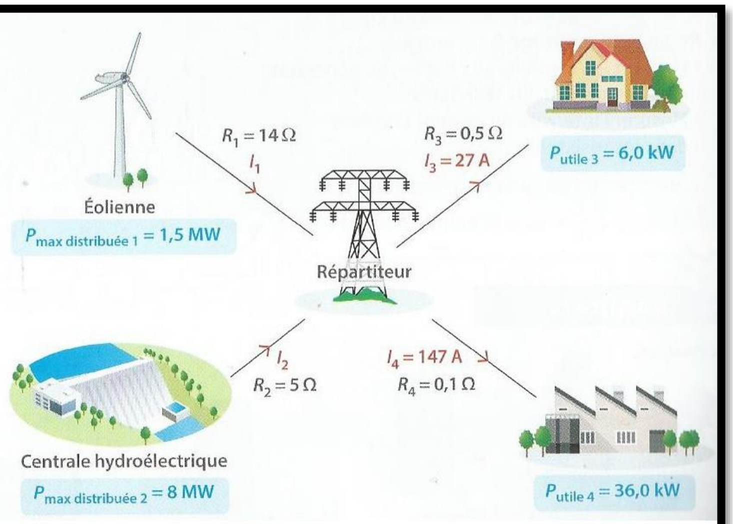
On cherche dans cet exercice à optimiser un réseau électrique modélisé par le graphe orienté ci-après…

1. A partir de la contrainte sur les intensités arrivant aux cibles, vérifier que P_{J_4} vaut 2160 W et en déduire que I_4 est environ égal à 147 A. A partir des contraintes sur le nœud intermédiaire, montrer que $I_1 + I_2 = 174$. Justifier que I_2 peut prendre une valeur comprise dans $[94;174]$.

2. Ecrire l'expression de la fonction $P_{Jtotale}$ en fonction de I_1, I_2, I_3 et I_4. En déduire que $P_{Jtotale} = 14 \times I_1^{\,2} + 5(174 - I_1)^2 + 2520$ et que $P_{Jtotale} = 14(174 - I_2)^2 + 5 \times I_2^{\,2} + 2520$.
Déterminer par la ou les méthodes de votre choix la valeur minimale de $P_{Jtotale}$ ainsi que les valeurs de I_1 et de I_2 correspondantes. Vérifier qu'alors les trois contraintes sont respectées.

Pour étudier l'optimisation du fonctionnement du réseau électrique, il peut être simplifié, comme dans l'exemple ci-contre.

- Une éolienne et une centrale hydroélectrique alimentent le réseau avec des puissances électriques maximales différentes ($P_{\text{max distribuée}}$) et des intensités I_1 et I_2 ajustables.
- Deux usagers, aux besoins différents (P_{utile}), reçoivent des intensités différentes I_3 et I_4 connues et fixées.
- La distribution se fait par quatre câbles de résistances différentes connues (R_1, R_2, R_3 et R_4) parcourus respectivement par des intensités I_1, I_2, I_3 et I_4.
- Un répartiteur permet d'ajuster productions et besoins en tenant compte des pertes par effet Joule le long des différents câbles.



a. Contrainte sur les intensités sortant des sources

L'intensité délivrée par chaque source distributrice dépend de la puissance qu'elle distribue, les pertes par effet Joule étant limitées à environ 6 %.

Pour l'arc 1 : $P_{J1} \leqslant \dfrac{6}{100} \times P_{\text{max distribuée 1}}$

$P_{J1} \leqslant \dfrac{6}{100} \times 1\,500\,000$

soit $P_{J1} \leqslant 90\,000$ W.

Comme $P_{J1} = R_1 \times I_1^{\,2}$, avec $R_1 = 14\ \Omega$, on a :

$I_1 \leqslant \sqrt{\dfrac{P_{J1}}{R_1}}$, or $\sqrt{\dfrac{90\,000}{14}} \approx 80$ A

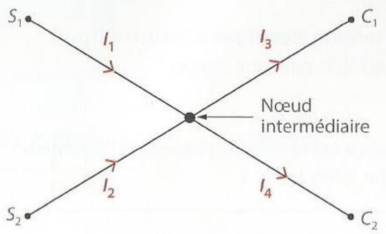
$I_1 \leqslant 80$ A

De même, pour l'arc 2 : $I_2 \leqslant 310$ A.

b. Contrainte sur les intensités au nœud intermédiaire : loi des nœuds

L'intensité du courant se conserve : la somme des intensités entrant dans un nœud est égale à la somme des intensités qui en ressortent.

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$



c. Contrainte sur les intensités arrivant aux cibles

L'intensité du courant qui alimente chaque cible destinatrice est imposée par la puissance qui y est utilisée. Les pertes par effet Joule sur cette partie du réseau correspondent à environ 6 % de la puissance utilisée.

Pour l'arc 3 : $P_{J3} = \dfrac{6}{100} \times P_{\text{utile 3}}$

$P_{J3} = \dfrac{6}{100} \times 6\,000 = 360$ W

Comme $P_{J3} = R_3 \times I_3^{\,2}$, avec $R_3 = 0{,}5\ \Omega$, on a :

$I_3 = \sqrt{\dfrac{P_{J3}}{R_3}} = \sqrt{\dfrac{360}{0{,}5}} \approx 27$ A.

De même, pour l'arc 4 : $I_4 \approx 147$ A.

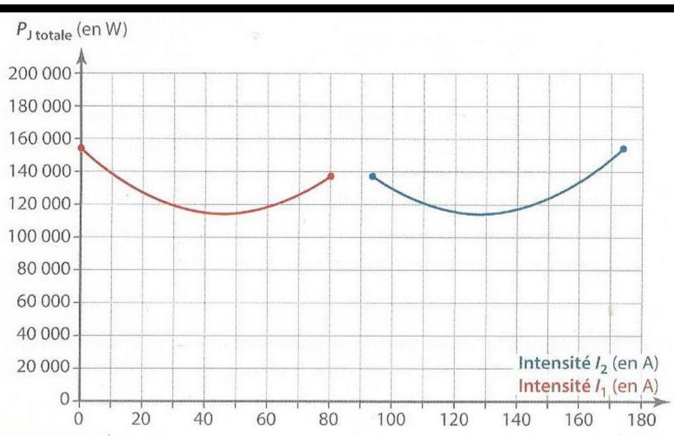
Optimiser l'acheminement de l'énergie électrique revient à minimiser les pertes par effet Joule. Pour cela, on définit et étudie une fonction objectif :

$$P_{\text{J totale}} = P_{J1} + P_{J2} + P_{J3} + P_{J4}$$

Les intensités I_3 et I_4 étant constantes, $P_{\text{J totale}}$ s'exprime en fonction des variables I_1 et I_2.

L'étude des variations graphiques ou algébriques de $P_{\text{J totale}}$ permet de déterminer les valeurs de I_1 et de I_2 qui minimisent les pertes.

FOCUS MATHS p. 156



Représentations graphiques de $P_{\text{J totale}}$ en fonction de I_1 et de I_2.