Résolution d'équations et ensembles de nombres

1. L'équation $x+3=0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{N}$? La résoudre dans $\mathbb{Z}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $x^2-4=0$. La résoudre dans $\mathbb{Z}$.
3. L'équation $7x-1=0$ a-t-elle des solutions dans ID ? La résoudre dans $\mathbb{Q}$.
4. Résoudre dans ID l'équation $x^2-\dfrac{25}{9}=0$. La résoudre dans $\mathbb{Q}$.
5. L'équation $x^2-3=0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{Q}$? La résoudre dans $\mathbb{R}$.
6. On considère l'équation $3x^2-\left(1+3\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}=0$. Montrer que le discriminant de cette équation peut s'écrire $\Delta=\left(3\sqrt{3}-1\right)^2$. Résoudre cette équation dans $\mathbb{Q}$, puis dans $\mathbb{R}$.
7. L'équation $x^2+1=0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{R}$?
8. L'affirmation selon laquelle « telle équation n'a pas de solution » est-elle toujours exacte ? De quoi sa véracité dépend-elle ?

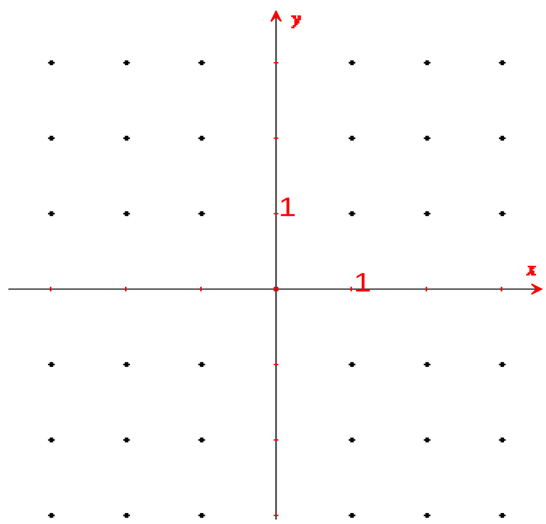
Une idée

Le mathématicien Bombelli eut l'idée de définir des nombres qui ne sont pas des nombres réels et de donner un sens à $\sqrt{-1}$. Il définit ainsi un nombre **« imaginaire »** noté i dont le carré est égal à -1. L'équation $x^2+1=0$ admet désormais deux solutions qui sont $x=i$ et $x=-i$. On se situe à l'extérieur de $\mathbb{R}$ dans un ensemble $\mathbb{C}$ appelé **l'ensemble des nombres complexes**.

La table de multiplication de Bombelli

Recopier et compléter la table de multiplication suivante :

	$+1$	-1	$+i$	$-i$
$+1$				
-1				
$+i$				
$-i$				



Le plan complexe

Nous savons que les réels sont représentés sur une droite horizontale graduée et orientée. Les nombres i et $-i$ seront placés sur la perpendiculaire à la droite des réels passant par l'origine. Placer les nombres $+1$, -1, i et $-i$ dans le plan complexe proposé ci-dessus.

Résolution d'équations

$(E_1) \Leftrightarrow x^2+4=0$. En supposant l'existence d'un nombre imaginaire i vérifiant $i^2=-1$, résoudre l'équation E_1. Représenter les solutions de l'équation E_1 dans le plan complexe.

$(E_2) \Leftrightarrow 4x^2+25=0$. En supposant l'existence d'un nombre imaginaire i vérifiant $i^2=-1$, résoudre l'équation E_2. Représenter les solutions de l'équation E_2 dans le plan complexe.

$(E_3) \Leftrightarrow x^4-81=0$. En supposant l'existence d'un nombre imaginaire i vérifiant $i^2=-1$, résoudre l'équation E_3. On pourra procéder à un changement de variable $X=x^2$. Représenter les solutions de l'équation E_3 dans le plan complexe.

$(E_4) \Leftrightarrow x^2-2x+5=0$. Montrer que $x^2-2x=(x-1)^2-1$ puis que $(E_4) \Leftrightarrow (x-1)^2+4=0$. En utilisant $i^2=-1$, factoriser l'expression $(x-1)^2+1$. Résoudre alors l'équation E_4. Représenter les solutions de l'équation E_4 dans le plan complexe.

Equation du second degré à coefficients réels

Une équation du second degré à coefficients réels est une équation d'inconnue x du type $ax^2+bx+c=0$ dans laquelle a, b et c sont trois nombres réels tels que $a \neq 0$.

1. En posant $\Delta=b^2-4ac$ démontrer que $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.
2. Si $\Delta \geq 0$, démontrer que l'équation admet deux solutions réelles distinctes qui sont $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Que peut-on dire des deux solutions lorsque $\Delta=0$?
3. Si $\Delta<0$, démontrer que l'équation admet deux solutions complexes conjuguées qui sont $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exercices d'application directe

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+z+1=0$. Placer les solutions dans le plan complexe.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-4z+6=0$. Placer les solutions dans le plan complexe.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2-z=\dfrac{2}{z}$. Placer les solutions dans le plan complexe.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-2)\left(z^2+2\sqrt{2}z+4\right)=0$.
   Placer les solutions dans le plan complexe.

Partie réelle, partie imaginaire

On considère les nombres complexes proposés ci-dessous. Déterminer pour chaque nombre $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z)$. Indiquer les nombres complexes qui sont des imaginaires purs.

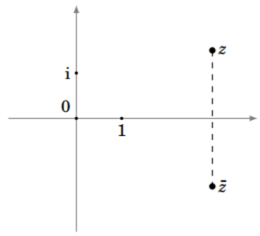
$z = 3 + 5i$ $\quad$ $z = -3i$ $\quad$ $z = \sqrt{2}$ $\quad$ $z = 3i^2 + i$ $\quad$ $z = 0$

Conjugué d'un nombre complexe

On définit le conjugué d'un nombre complexe de la façon suivante : « un nombre complexe et son conjugué ont la même partie réelle et des parties imaginaires opposées ». Déterminer pour chaque nombre complexe proposé ci-dessous $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z)$. Déterminer ensuite les conjugués de ces nombres complexes.

$z = -3$ $\quad$ $z = 2 + i$ $\quad$ $z = -1 - i$ $\quad$ $z = 5i$ $\quad$ $z = 3i^2 - i$

Un complexe et son conjugué

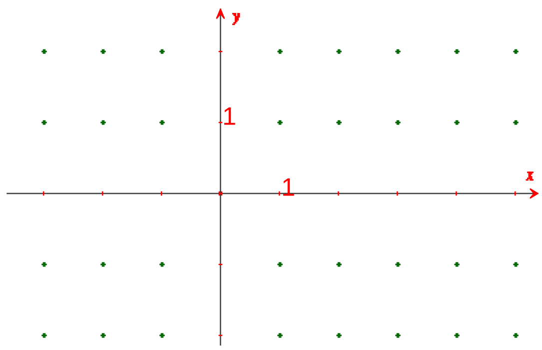


Que peut-on dire d'un complexe $z = a + ib$ et de son conjugué $\bar{z} = a - ib$ lorsqu'on place leur image dans le plan complexe ?

Affixe de points, affixes de vecteurs

On considère les points $A(4;0)$ $B(3;-1)$ et $C(-2;1)$. Placer ces points dans le plan complexe.

Déterminer z_A z_B et z_C les affixes des points. Déterminer $z_{\overrightarrow{AB}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

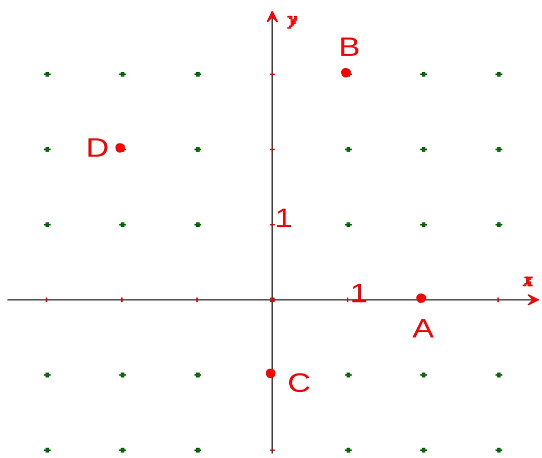


Affixe de points, affixes de vecteurs, relation de Chasles

On considère dans le plan complexe quatre points A, B, C et D. Déterminer z_A z_B z_C et z_D les affixes des points.

Déterminer $z_{\overrightarrow{AD}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AD}$.
Déterminer $z_{\overrightarrow{AB}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Déterminer $z_{\overrightarrow{BD}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BD}$.

Conjecturer une relation liant les trois nombres complexes $z_{\overrightarrow{AD}}$ $z_{\overrightarrow{AB}}$ et $z_{\overrightarrow{BD}}$.



La somme

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et $z' = a' + ib'$ un autre nombre complexe.
On considère $z + z'$ **la somme** des deux nombres complexes.

- Déterminer la partie réelle puis la partie imaginaire de $z + z'$.
- Préciser la forme algébrique de $z + z'$.

Le produit

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et $z' = a' + ib'$ un autre nombre complexe.
On considère $z \times z'$ **le produit** des deux nombres complexes.

- Déterminer la partie réelle puis la partie imaginaire de $z \times z'$.
- Préciser la forme algébrique de $z \times z'$.

L'inverse

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
On considère ${}^{1}\!/_{z}$ **l'inverse** de ce nombre complexe.

- Déterminer la partie réelle puis la partie imaginaire de ${}^{1}\!/_{z}$.
- Préciser la forme algébrique de ${}^{1}\!/_{z}$.

Partie réelle, partie imaginaire

Mettre les nombres complexes proposés ci-dessous sous la forme algébrique. Pour cela déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe. Détailler dans chaque cas l'ensemble des calculs effectués.

$z = 2 + 3i - (3 + 5i)$ $\qquad$ $z = (2 + 3i)^2$ $\qquad$ $z = \dfrac{-5 + i}{3 + 2i}$

$z = \dfrac{1}{i}$ $\qquad$ $z = \dfrac{2 - i}{3 - 2i}$ $\qquad$ $z = \dfrac{2 - i}{4}$ $\qquad$ $z = 1 + i + i^2 + i^3$

$z = \dfrac{2}{1 - i}$ $\qquad$ $z = \dfrac{i - 3}{1 + 2i}$ $\qquad$ $z = 1 + \dfrac{1}{i}$ $\qquad$ $z = \dfrac{(2 - i)(3 + 2i)}{4}$ $\qquad$ $z = \dfrac{(2 - i)^2}{3 + i}$

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe quelconque. La somme $z + \overline{z}$ est-elle réelle pure ou imaginaire pure ? La différence $z - \overline{z}$ est-elle réelle pure ou imaginaire pure ? Le produit $z \times \overline{z}$ est-il réel pur ou imaginaire pur ? La quantité $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}}$ est-elle réelle pure ou imaginaire pure ?

Montrer que $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$. Montrer que $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Les propriétés du conjugué

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes quelconques. On note $\overline{z} = a - ib$ et $\overline{z'} = a' - ib'$ leurs conjugués respectifs. On considère n un nombre entier naturel quelconque.

1. Démontrer que $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$. Démontrer que $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$.
2. Démontrer que $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$. Démontrer que $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.
3. Démontrer que $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$. Démontrer que $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$. On travaille ici avec $z' \neq 0$.
4. Déduire de certains des résultats précédents que si z_0 est une racine du polynôme $P(z) = az^2 + bz + c$ à coefficients réels, alors son conjugué est aussi une racine de ce polynôme. On rappelle qu'une racine z_0 d'un polynôme P vérifie l'équation $P(z_0) = 0$.

Réel pur, imaginaire pur, et conjugué

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe quelconque. Démontrer que z est un réel pur si et seulement si $\overline{z} = z$. Démontrer que z est un imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

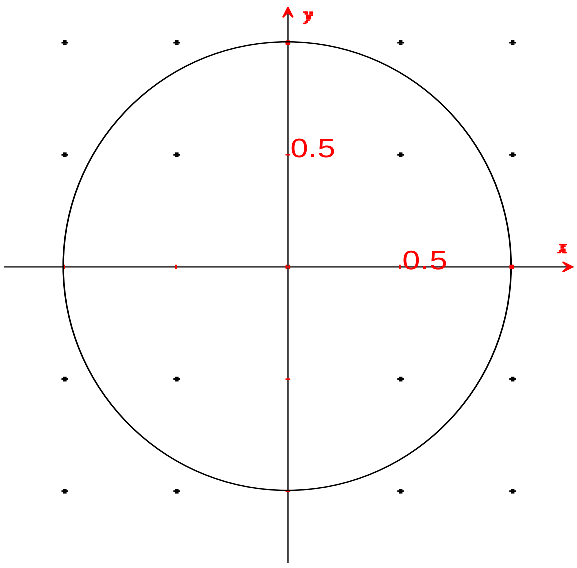
Partie réelle, partie imaginaire, encore…

Soit z un nombre complexe différent de i. On pose $z = x + iy$ ou x et y sont deux réels et on note $z' = \dfrac{z+i}{z-i}$. Déterminer en fonction de x et de y la partie réelle et la partie imaginaire de z'.

Soit z un nombre complexe non nul. On pose $z = x + iy$ ou x et y sont deux réels et on note $z' = \dfrac{z-1}{i \times \overline{z}}$. Déterminer en fonction de x et de y la partie réelle et la partie imaginaire de z'.

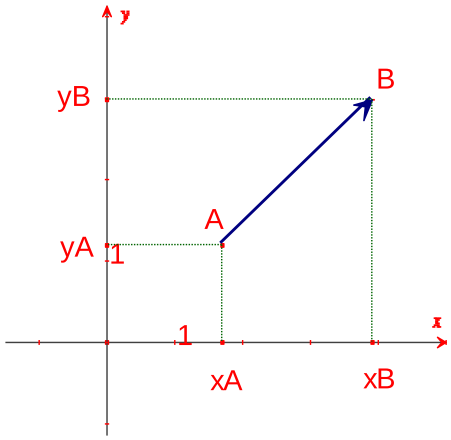
Un nombre complexe particulier

Dans le plan complexe on a tracé le cercle trigonométrique. On considère le nombre complexe $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $\overline{j}$ le conjugué du nombre complexe j. Calculer j^2 le carré du nombre complexe j. Calculer j^3 le cube du nombre complexe j. Placer j, $\overline{j}$, j^2 et j^3 dans le plan complexe ci-contre. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$. Que peut-on dire de $1/j$?



Différence de deux affixes

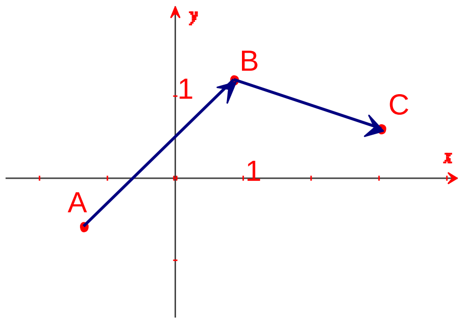
$A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ sont deux points du plan complexe.



- Comment s'écrivent les affixes z_A et z_B des points A et B ?
- Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$? En déduire l'affixe $z_{\overrightarrow{AB}}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Ecrire une relation liant $z_{\overrightarrow{AB}}$, z_A et z_B.

Somme de deux affixes

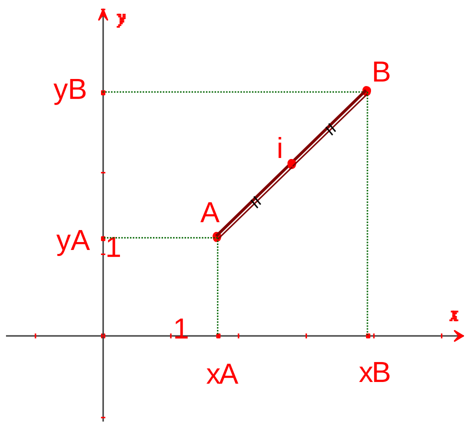
A, B et C sont trois points du plan complexe d'affixes z_A, z_B et z_C.



- Comment s'écrit l'affixe $z_{\overrightarrow{AB}}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Comment s'écrit l'affixe $z_{\overrightarrow{BC}}$ du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
- Comment s'écrit l'affixe $z_{\overrightarrow{AC}}$ du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
- Ecrire une relation liant $z_{\overrightarrow{AB}}$, $z_{\overrightarrow{BC}}$ et $z_{\overrightarrow{AC}}$.

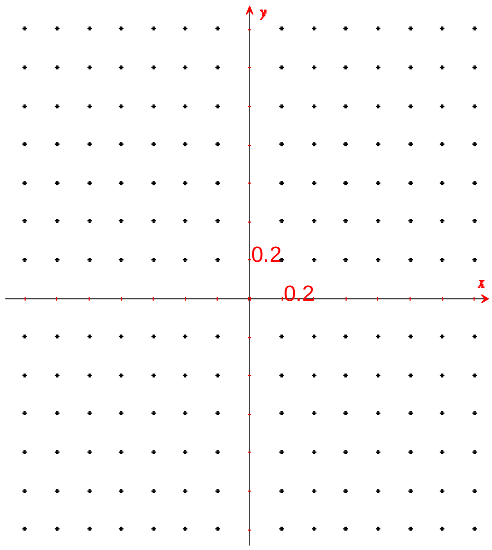
Demi-somme de deux affixes

$A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ sont deux points du plan complexe.



- Comment s'écrivent les affixes z_A et z_B des points A et B ?
- Quelles sont les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.
- En déduire l'affixe z_I du point I.
- Ecrire une relation liant z_I, z_A et z_B.

Un carré complexe

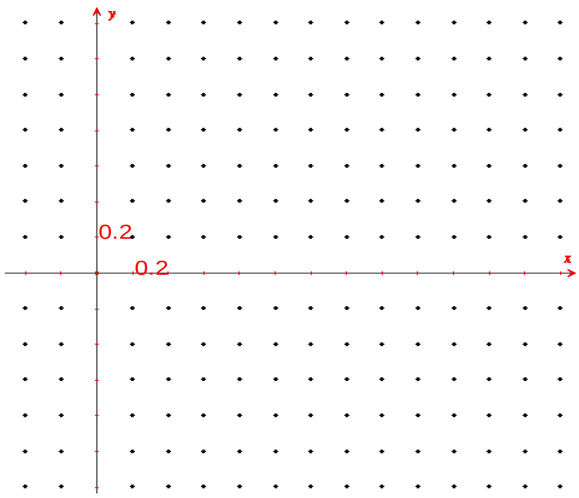


On considère le nombre complexe $z_1 = 1 + i$.

1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes $z_2 = i \times z_1$, $z_3 = i \times z_2$ et $z_4 = i \times z_3$. Exprimer z_2, z_3 et z_4 en fonction de z_1.

2. Placer dans le plan complexe les points images M_1, M_2, M_3 et M_4 d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4. Quelle est la nature du quadrilatère ainsi formé.

Un rectangle complexe



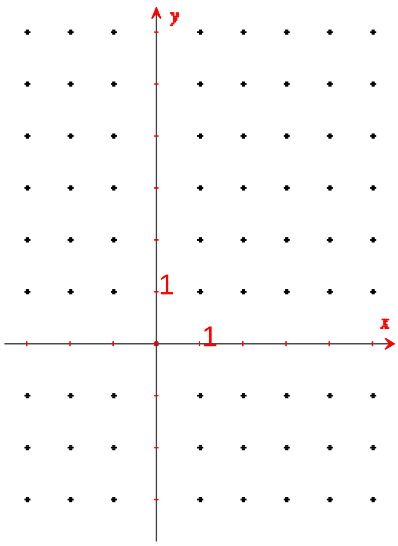
Soit M le point d'affixe $z = 1 + i$.

1. Soit N le point d'affixe $\frac{1}{z}$. Déterminer la forme algébrique de $\frac{1}{z}$. Placer les points M et N.

2. Construire le point P d'affixe $z + \frac{1}{z}$.

3. Quelle est la nature de OMPN ?

Un parallélogramme complexe



On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 4 + 2i$, $z_B = 1 - 3i$ et $z_C = -2$

1. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

2. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3. Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme. Placer le point D dans le plan complexe

4. Déterminer l'affixe du point d'intersection des diagonales du parallélogramme ABCD.

Résoudre des équations dans l'ensemble des complexes

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $2iz+4=-3z+i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $8z+5i=4-z+i$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $2i+3z=i(5-iz)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z+2\overline{z}=3-4i$.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $2z-4=5i+4\overline{z}$.

Dans les situations 4 et 5 il sera nécessaire de noter $z=x+iy$ pour déterminer x, y puis z.

Résoudre des équations dans l'ensemble des complexes, encore…

$3iz+1=i$ $\qquad$ $z-3i=iz+2$

$(z-2i)(2z+1-i)=0$ $\qquad$ $4z^2=z$ $\qquad$ $z-\dfrac{4}{z}=0$ $\qquad$ $(2-i)z=2z+i$

$\dfrac{z-i}{z+i}=2i$ $\qquad$ $\dfrac{z+i}{2z}=1-i$ $\qquad$ $\dfrac{2z+i}{iz}=\dfrac{2iz}{1-z}$

$z^2=4z+5$ $\qquad$ $z^2=4z$ $\qquad$ $20z-25=4z^2$ $\qquad$ $4z^2+12z=-10$

$i(z+3)=2+i$ $\qquad$ $\dfrac{z-5}{z+5}=z$ $\qquad$ $\dfrac{z+3}{z}=\dfrac{z+1}{z+2}$

$\overline{z}+i=2z-1$ $\qquad$ $\dfrac{z+1}{\overline{z}}=z$

Déterminer des ensembles de points

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z^2-\overline{z}$ soit un nombre réel.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $2z^2-3iz$ soit un nombre réel.
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z+3}{z-i}$ soit un nombre réel.

   Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z+3}{z-i}$ soit un imaginaire pur.
4. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z+i}{z-i}$ soit un nombre réel.

   Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z+i}{z-i}$ soit un imaginaire pur.