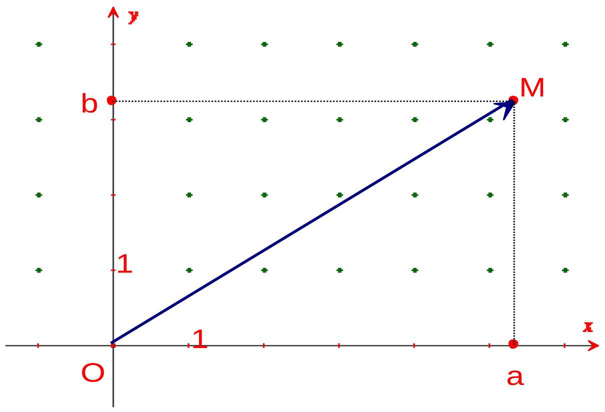
Module et argument

A tout point M de coordonnées $(a;b)$ du plan complexe, on associe un nombre complexe noté z qui s'écrit $z=a+ib$. On définit le module et l'argument de ce complexe de la façon suivante :

- On appelle **module** d'un nombre complexe z la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Le module de z est noté $|z|$ et se calcule comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

- On appelle **argument** d'un nombre complexe z **non nul** une mesure de l'angle orienté $\theta=\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)$. L'argument de z est noté $\arg(z)$.

Les premières formules



Exprimer $|z|$ en fonction de a et b.

Exprimer $\cos\theta$ en fonction de a et $|z|$, puis en fonction de a et b.

Exprimer $\sin\theta$ en fonction de b et $|z|$, puis en fonction de a et b.

Remarque

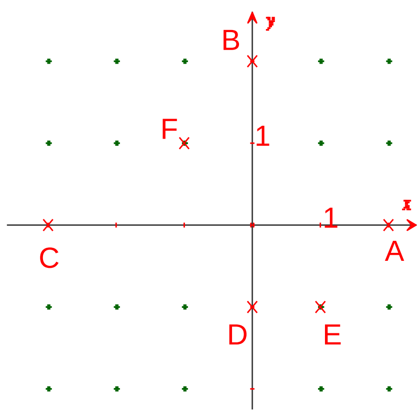
Si la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe correspondent aux « coordonnées cartésiennes » d'un point du plan complexe, le module et l'argument correspondent aux « coordonnées polaires » de ce même point.

Exprimer le module à l'aide du conjugué

Soit $z=a+ib$ la forme algébrique d'un nombre complexe. Ecrire en fonction de a et b le produit $z\times\bar{z}$. En déduire une expression du module $|z|$ en fonction de z et $\bar{z}$.

Calculer le module des nombres complexes $z=2+i$, $z=3-4i$ et $z=3i$.

Déterminer un module et un argument



1. Déterminer la forme algébrique des affixes z_A, z_B, z_C, z_D, z_E et z_F.

2. Déterminer les modules de z_A, z_B, z_C, z_D, z_E et z_F.

3. Déterminer les arguments de z_A, z_B, z_C, z_D, z_E et z_F.

Déterminer le module et un argument d'un point image

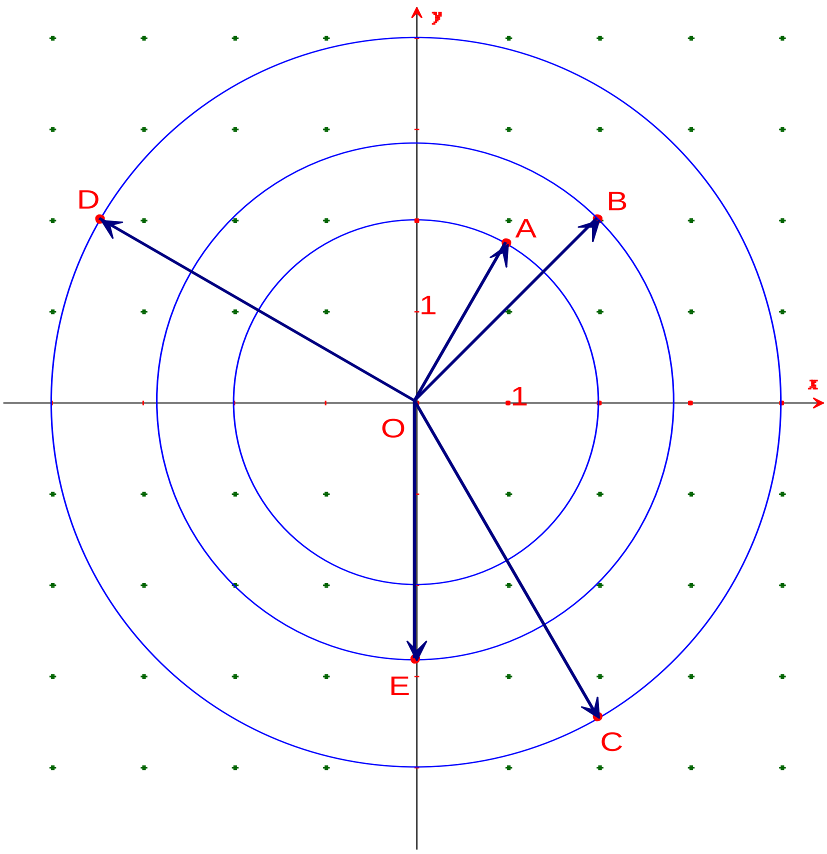
On a placé dans le plan complexe ci-contre les points A, B, C, D et E.

On note z_A, z_B, z_C, z_D et z_E les affixes des cinq points.

1. Déterminer les modules de z_A, z_B, z_C, z_D et z_E.

2. Déterminer les arguments de z_A, z_B, z_C, z_D et z_E.

3. Donner la forme algébrique des complexes z_A, z_B, z_C, z_D et z_E.



4. Placer le point F d'affixe z_F qui vérifie $|z_F| = 4$ et $\arg(z_F) = \frac{\pi}{2}$.

   Placer le point G d'affixe z_G qui vérifie $|z_G| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_G) = -\frac{3\pi}{4}$.

Les propriétés du module

Soit z un nombre complexe. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Soit n un entier relatif.

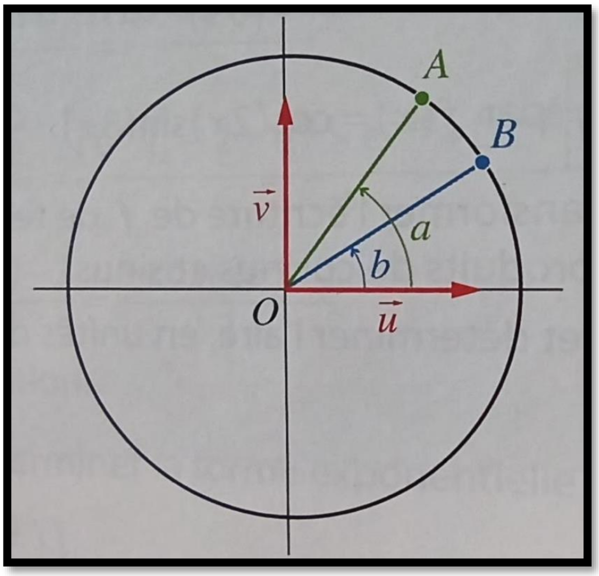
$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \qquad |z|^2 = z \times \overline{z} \qquad |z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$$

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ si } z_2 \neq 0 \qquad |z^n| = |z|^n \text{ si } z \neq 0 \qquad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

En écrivant $z = x + iy$, démontrer les trois premières propriétés. En écrivant $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, démontrer les deux propriétés suivantes. En procédant par disjonction de cas (n entier naturel puis n entier relatif négatif) démontrer la sixième propriété. Pour la septième propriété appelée « inégalité triangulaire », suivre les indications proposées ci-après : montrer que $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z_1 \times \overline{z_2}\right) + |z_2|^2$, montrer que pour tout z complexe $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$, en déduire que $|z_1 + z_2|^2 \leq \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$ puis conclure. Dans quel cas a-t-on $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$?

Un point d'étape sur les formules trigonométriques

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. On considère le cercle trigonométrique de rayon 1. Les points A et B sont deux points de ce cercle tels que les mesures des angles orientés $\left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right)$ et $\left(\vec{u};\overrightarrow{OB}\right)$ soient respectivement a et b.



On a donc $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\cos(a)\\ \sin(a)\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\cos(b)\\ \sin(b)\end{pmatrix}$.

Calculer de deux manière le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ et en déduire la relation suivante : $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

A l'aide des deux relations trigonométriques $\cos(-x)=\cos(x)$ et $\sin(-x)=-\sin(x)$, déduire de la relation précédente la relation suivante : $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$.

A l'aide des deux relations trigonométriques $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$, déduire des deux relations précédentes les deux relations suivantes : $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$.

A l'aide des quatre relations précédentes appelées « formules d'addition », démontrer les quatre « formules de duplication » proposées ci-dessous :

$$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a) \qquad \sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$$

$$\cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Les premières propriétés de l'argument

Soit z un nombre complexe. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Soit n un entier relatif.

z est un réel pur si et seulement si $\arg(z)\equiv 0[\pi]$

z est un imaginaire pur si et seulement si $\arg(z)\equiv \pi/2[\pi]$

$$\arg\left(\bar{z}\right)\equiv-\arg(z)[2\pi] \qquad \arg(-z)\equiv\arg(z)+\pi[2\pi] \qquad \arg\left(-\bar{z}\right)\equiv-\arg(z)+\pi[2\pi]$$

A l'aide de considérations d'ordre géométriques et graphiques dans le plan complexe, expliciter le sens et vérifier la validité des cinq affirmations proposées ci-dessus.

La forme trigonométrique d'un nombre complexe

A tout point M de coordonnées $(a;b)$ du plan complexe, on associe un nombre complexe noté z qui s'écrit $z=a+ib$. Supposons z **non nul**. Notons $r=|z|$ le module de z. Notons $\theta=\arg(z)$ un argument de z. La forme trigonométrique de z est : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$. Justifier la validité et cohérence de cette forme en la confrontant à la forme algébrique $z=a+ib$.

Les autres propriétés de l'argument

On considère $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ un complexe non nul écrit sous la forme trigonométrique. On considère également $z_1=r(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ et $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ deux complexes non nuls écrits sous la forme trigonométrique. On considère également n un entier relatif.

1. Ecrire le produit $z_1\times z_2$ sous la forme trigonométrique.
2. Quel est le module de z_1 ? Quel est le module de z_2 ? Quel est le module de $z_1\times z_2$?
3. En déduire une relation entre $|z_1|$, $|z_2|$ et $|z_1\times z_2|$.
4. Quel est un argument de z_1 ? Un argument de z_2 ? Un argument de $z_1\times z_2$?
5. En déduire une relation entre $\arg(z_1)$, $\arg(z_2)$ et $\arg(z_1\times z_2)$.
6. Grâce à la relation démontrée au point 5, écrire de deux manières $\arg\left(z\times\frac{1}{z}\right)$ et en déduire une relation entre $\arg\left(\frac{1}{z}\right)$ et $\arg(z)$.
7. Déterminer enfin une relation entre $\arg(z_1)$, $\arg(z_2)$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.
8. Grace à la relation démontrée au point 5 et celle démontrée au point 6, établir en raisonnant par disjonction de cas (cas ou n est un entier naturel positif puis cas ou n est un entier relatif négatif) une relation entre $\arg(z^n)$, l'entier n et $\arg(z)$.

Quatre relations pour résumer le travail effectué

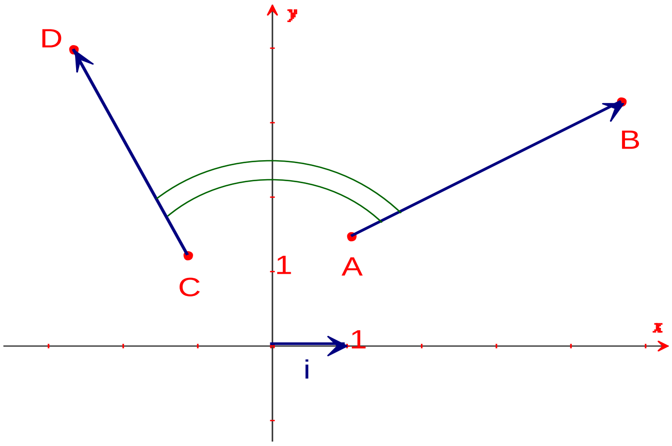
$$\arg(z_1\times z_2)\equiv\arg(z_1)+\arg(z_2)[2\pi] \qquad \arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\equiv\arg(z_1)-\arg(z_2)[2\pi] \qquad \arg(z^n)\equiv n\arg(z)[2\pi]$$

Interprétation géométrique du module et de l'argument d'une différence

A et B deux points du plan complexe d'affixes z_A et z_B. C et D deux points du plan complexe d'affixes z_C et z_D. Rappelez ce que représentent les différences $z_B - z_A$ et $z_D - z_C$.

1. Quelle interprétation géométrique peut-on donner à $|z_B - z_A|$ et à $|z_D - z_C|$?
2. Quelle interprétation géométrique peut-on donner à $\arg(z_B - z_A)$ et à $\arg(z_D - z_C)$?
3. En déduire une interprétation géométrique pour $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$



Construction d'un carré

On considère les nombres complexes $z_1 = (1-i)(1+2i)$, $z_2 = \dfrac{2+6i}{3-i}$ et $z_3 = \dfrac{4i}{i-1}$.

M_1, M_2 et M_3 désignent les points images dans le plan complexe .

1. Déterminer la forme algébrique des trois nombres complexes.
2. Placer M_1, M_2 et M_3 dans le plan complexe.
3. Calculer $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$. Calculer $\left|\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right|$ et $\arg\left(\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)$.
4. En déduire que le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle isocèle.
5. Construire le point M_4 tel que $M_1M_2M_4M_3$ soit un carré et déterminer son affixe z_4.

Une rotation – Une translation

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Tracer les cercles de centre O et de rayons 1 et 2.
2. Placer les points A, B et D d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} + i$ $z_B = \sqrt{3} - i$ et $z_D = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Vous commencerez par déterminer les formes trigonométriques de ces trois nombres complexes

On considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et la translation T de vecteur $\vec{i}$.

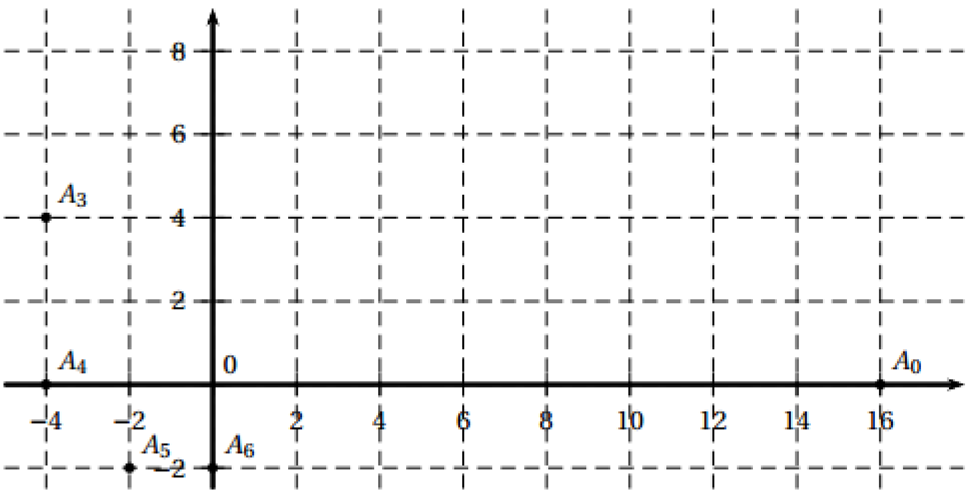
1. Déterminer les affixes $z_{A'}$ et $z_{B'}$ des points A' et B' images de A et B par la rotation R. Vous commencerez par déterminer les formes trigonométriques de ces complexes puis les formes algébriques. Déterminer l'affixe $z_{D'}$ du point D' image de D par la translation T. Vous commencerez par déterminer la forme algébrique de ce complexe puis la forme trigonométrique. Placer les points A', B' et D'.

2. Calculer $\frac{z_{A'}-z_{B'}}{z_{D'}}$. Déterminer une mesure de l'angle orienté de vecteurs $\left(\overrightarrow{OD'};\overrightarrow{B'A'}\right)$.
   En déduire que (OD') est la médiatrice du segment $[A'B']$.

Une spirale complexe

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z par : $\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases}$. On note r_n le module du nombre complexe z_n, c'est-à-dire $r_n = |z_n|$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. Calculer z_1, z_2 et z_3. Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique. Ecrire le nombre $\frac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique. Démontrer que le triangle OA_0A_1 est rectangle en A_1.
2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La suite (r_n) est-elle convergente ? Interpréter géométriquement ce résultat.
3. On note $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_kA_{k+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$. Démontrer que $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$. Exprimer L_n en fonction de n. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).



Forme exponentielle d'un nombre complexe

Nous savons désormais que tout nombre complexe non nul peut s'écrire sous la **forme trigonométrique** $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où r est le module et θ un argument de z. Posons $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. L'écriture de z sous **forme exponentielle** est alors $z = re^{i\theta}$.

Application directe

Ecrire les nombres complexes sous forme exponentielle. Détailler les étapes du raisonnement.

$z_1 = 4\sqrt{3} + 4i$ $\quad z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ $\quad z_3 = -\dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5i}{2}$ $\quad z_4 = 2 - 2i$ $\quad z_5 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

Pertinence de la notation

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z = r'e^{i\theta'}$ deux complexes non nuls notés sous forme exponentielle. En utilisant les propriétés établies dans le cours sur la fonction exponentielle :

1. Calculer $z \times z'$ sous forme exponentielle.
   Que devient le module du produit ? Que devient un argument du produit ?

2. Calculer $1/z$ sous forme exponentielle.
   Que devient le module de l'inverse ? Que devient un argument de l'inverse ?

3. Calculer z/z' sous forme exponentielle.
   Que devient le module du quotient ? Que devient un argument du quotient ?

4. Cette nouvelle notation respecte-t-elle les propriétés sur le module et l'argument ?

Les formules d'Euler

Pour tout nombre réel θ non nul on définit $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Que peut-on dire de $e^{-i\theta}$? Exprimer $\cos(\theta)$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Exprimer $\sin(\theta)$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Ces deux expressions sont appelées les formules d'Euler.

En utilisant les expressions du cosinus et du sinus ainsi établies, retrouver la relation fondamentale $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

En utilisant l'expression du cosinus ainsi établie, établir la relation $1 + e^{2i\theta} = 2\cos(\theta)e^{i\theta}$.

La formule de Moivre

Pour tout nombre réel θ et tout entier naturel n on a la relation suivante $[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ qui est une autre façon d'exprimer $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Détermination de lignes trigonométriques

La formule de multiplication de deux nombres complexes exprimés sous forme exponentielle rappelée ci-contre indique que le module d'un produit est égal au produit des modules tandis que l'argument d'un produit est la somme des arguments.

$$z_1 \times z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \times r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 \times e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

On considère dans cette situation les deux nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = 1 + i$.

1. Déterminer la forme exponentielle de ces deux nombres complexes.
2. Déterminer la forme exponentielle et la forme algébrique du produit $Z = z_1 \times z_2$.
3. Sauriez-vous déterminer, à partir des résultats précédents, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$?

Détermination de lignes trigonométriques, encore…

La formule de division de deux nombres complexes exprimés sous forme exponentielle rappelée ci-contre indique que le module d'un quotient est égal au quotient des modules tandis que l'argument d'un quotient est la différence des arguments.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \times e^{i\theta_1}}{r_2 \times e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} \times e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

1. Ecrire le complexe $z_1 = 1 - i$ sous forme exponentielle.
   Ecrire le complexe $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}i$ sous forme exponentielle.
2. En déduire la forme exponentielle du quotient $Z = \frac{z_1}{z_2}$.
   En écrivant ce même nombre complexe Z sous forme algébrique, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et celle de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. Vous détaillerez les étapes du raisonnement.

Détermination de plusieurs formules trigonométriques

On rappelle ci-contre les formules d'Euler permettant d'exprimer le cosinus et le sinus d'un angle x à l'aide d'exponentielles complexes.

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

1. A l'aide de ces deux formules redémontrer la relation $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$.
2. A l'aide de ces deux formules redémontrer la relation $(\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 = \cos(2x)$.
3. A l'aide de ces deux formules redémontrer la relation $2 \times \cos(x) \times \sin(x) = \sin(2x)$.