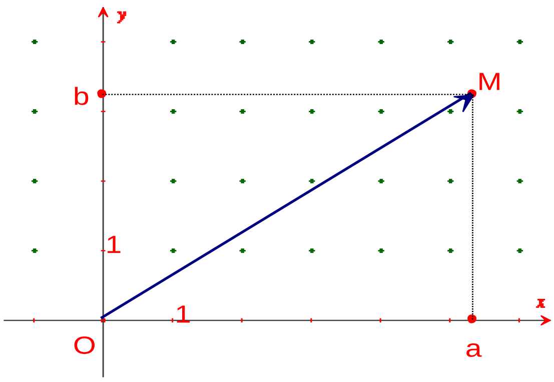
Module et argument d'un nombre complexe

On appelle **module** d'un nombre complexe z la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Le module de z est noté $|z|$ et se calcule comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle. Ainsi $\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$.

On appelle **argument** d'un nombre complexe z **non nul** une mesure de l'angle orienté $\theta = \left(\vec{i}; \overrightarrow{OM}\right)$. L'argument de z est noté $\arg(z)$.



Propriétés du module

Des égalités

- Un nombre complexe est nul si et seulement si son **module est nul**. $\boxed{z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0}$
- Le module du **produit** de deux complexes est égal au **produit** de leur module. $\boxed{|z \times z'| = |z| \times |z'|}$
- Le module du **quotient** de deux complexes est égal au **quotient** de leur module. $\boxed{\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}}$ si $z' \neq 0$
- Le module de la **puissance** d'un complexe est égal à la **puissance** du module. $\boxed{|z^n| = |z|^n}$

Une inégalité – L'inégalité triangulaire

Le module d'une **somme est inférieure à la somme** des modules. $\boxed{|z + z'| \leq |z| + |z'|}$

Propriétés d'un argument

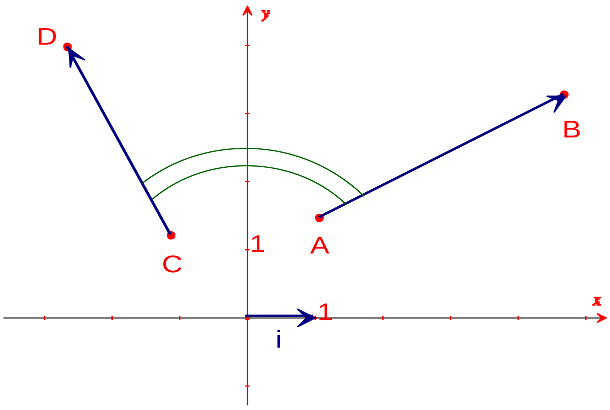
- Un argument du **produit** de deux complexes est égal à la **somme** des deux arguments. $\boxed{\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')}$
- Un argument du **quotient** de deux complexes est égal à la **différence** des deux arguments. $\boxed{\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')}$
- Un argument de la **puissance n** d'un complexe est égal au **produit** de l'argument par n. $\boxed{\arg(z^n) = n \times \arg(z)}$

Attention ! Il **n'existe pas** de relation pour un argument de la somme de deux complexes ! $\boxed{\arg(z + z') = \varnothing}$

Le module et la géométrie – Un argument et la géométrie

A, B, C et D sont quatre points distincts du plan complexe d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D.

- $|z_B - z_A| = AB$,
- $|z_D - z_C| = CD$,
- $\arg(z_B - z_A) = (\vec{i}; \overrightarrow{AB})$,
- $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$.



Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe

Tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ peut s'écrire sous une forme appelée **forme trigonométrique** ou sous une forme condensée appelée **forme exponentielle** :

$$\boxed{z = \underbrace{r(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{FORME TRIGONOMETRIQUE}} = \underbrace{re^{i\theta}}_{\text{FORME EXPONENTIELLE}}}$$

La notation sous **forme exponentielle** permet de mémoriser facilement **toutes les propriétés** du module et de l'argument à travers les formules suivantes :

$$\boxed{re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr' \times e^{i(\theta+\theta')}} \qquad \boxed{\frac{1}{r \times e^{i\theta}} = \frac{1}{r} \times e^{-i\theta}} \qquad \boxed{\frac{r \times e^{i\theta}}{r' \times e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} \times e^{i(\theta-\theta')}}$$

Les formules d'Euler

On trouve ci-dessous les quatre formules d'Euler :

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \qquad \boxed{e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \qquad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

La formule de Moivre

- La formule de Moivre est : $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$,
- Cette formule peut s'écrire de manière plus synthétique de la façon suivante $\boxed{\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}}$.

Cette formule peut être utilisée pour retrouver : les **formules de duplication** du cosinus et du sinus, les **formules d'addition et de soustraction** du cosinus et du sinus, ainsi que la **propriété fondamentale** liant les carrés du cosinus et du sinus.