Polynôme à coefficients réels

Définitions : soit n un entier naturel et a_0, a_1, … a_n des nombres réels tels que $a_n \neq 0$. On appelle fonction polynôme de degré n à coefficients réels (ou plus simplement polynôme de degré n) la fonction P définie sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$.

Equation polynomiale et racine d'un polynôme

Définition : l'équation $P(z)=0$ est appelée équation polynomiale de degré n. On appelle racine d'un polynôme P tout complexe z_0 tel que $P(z_0)=0$.

Factorisation par z-a

Définition : on dit qu'un polynôme P est factorisable (ou divisible) par $z-a$ s'il existe un polynôme Q tel que $P(z)=(z-a)Q(z)$.

Trois propriétés importantes

Propriété 1 : soit a un nombre complexe. Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $z^n - a^n$ est factorisable par $z-a$. En effet $z^n - a^n = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}$ c'est à dire $z^n - a^n = (z-a)\left(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \ldots + a^{n-2} z + a^{n-1}\right)$.

Propriété 2 : le polynôme P est factorisable par $z-a$ si et seulement si a est une racine de P.

Propriété 3 : pour tout entier naturel $n \geq 1$, un polynome de degré n admet au plus n racines.

Démonstration de la première propriété

Développer $z^n - a^n = (z-a)\left(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \ldots + a^{n-2} z + a^{n-1}\right)$ et conclure.

Démonstration de la deuxième propriété

Implication directe : en utilisant l'une des trois définitions, expliquer pourquoi « si le polynôme P est factorisable par $z-a$ alors a est une racine de P ».

Implication réciproque : on souhaite démontrer que « si a est une racine de P alors le polynôme P est factorisable par $z-a$ ». Pour cela on prend un polynôme P défini par $P(z)=\sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$. On sait que $P(a)=\sum_{k=0}^{n} \alpha_k a^k = 0$. Par conséquent $P(z)=P(z)-P(a)=\sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a^k$ et donc $P(z)=\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left(z^k - a^k\right)$. En utilisant la première propriété, expliquer pourquoi et comment $P(z)$ est factorisable par $z-a$. Conclure.

Démonstration de la troisième propriété

La démonstration se fait par récurrence sur le degré du polynôme. On reformule la propriété de la façon suivante : « L'équation $P(z)=0$ où P est une fonction polynôme de degré n a un nombre de solutions inférieur ou égal à n ».

Initialisation : l'équation $\alpha z+\beta=0$ admet si $\alpha\neq 0$ une racine évidente $z=-\dfrac{\beta}{\alpha}$. Que peut-on en conclure ?

Hérédité : on suppose la propriété vraie au rang p et on démontre qu'elle est vraie au rang $p+1$ c'est-à-dire que « L'équation $P(z)=0$ où P est une fonction polynôme de degré $p+1$ a un nombre de solutions inférieur ou égal à $p+1$ ». Pour cela on procède par disjonction de cas.

- Si P n'a pas de racine, alors la conclusion est évidente puisque $P(z)=0$ a forcément un nombre de solutions inférieur ou égal à $p+1$,

- Si P admet au moins une racine que l'on notera a, alors P est factorisable par $z-a$ et s'écrit $P(z)=(z-a)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré p. On en déduit que l'équation $P(z)=0$ est équivalente à $z-a=0$ (qui permet de comptabiliser une solution) ou $Q(z)=0$ (qui permet de comptabiliser au plus p solutions d'après l'hypothèse de récurrence) admet un nombre de solutions inférieur ou égal à $p+1$.

Factorisation par la méthode des coefficients indéterminés

On considère le polynôme P défini par $P(z)=z^4-4z^2-z+2$. Nous abordons la problématique suivante : « Montrer que 2 est une racine de P et en déduire une factorisation de P » en procédant par la méthode des coefficients indéterminés détaillée ci-dessous :

- 2 est une racine de P donc $P(z)=(z-2)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré 3 c'est-à-dire $P(z)=(z-2)\left(az^3+bz^2+cz+d\right)$,

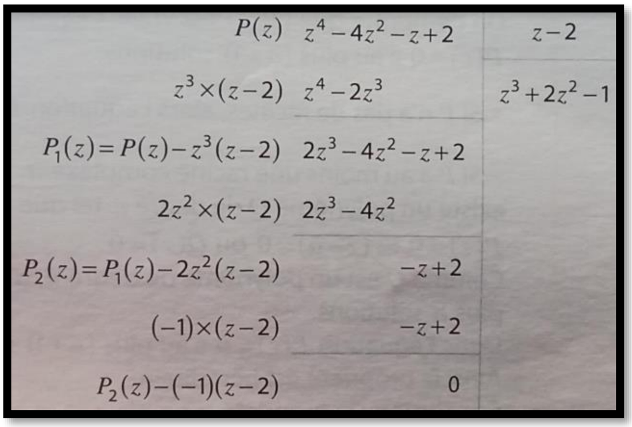
- Après développement on obtient $P(z)=az^4+(b-2a)z^3+(c-2b)z^2+(d-2c)z-2d$,

- On procède par identification pour obtenir le système $\begin{cases}a=1\\ b-2a=0\\ c-2b=-4\\ d-2c=-1\\ -2d=2\end{cases}$,

- Que l'on résout pour obtenir les valeurs $a=1$, $b=2$, $c=0$ et $d=-1$ et conclure quant à la factorisation du polynôme $P(z)=(z-2)\left(z^3+2z^2-1\right)$.

Factorisation par la méthode de la division

On considère le polynôme P défini par $P(z)=z^4-4z^2-z+2$. Nous abordons la même problématique : « Montrer que 2 est une racine de P et en déduire une factorisation de P » en procédant par la méthode de la division détaillée ci-contre.



$P(z)$	z^4-4z^2-z+2	$z-2$
$z^3\times(z-2)$	z^4-2z^3	z^3+2z^2-1
$P_1(z)=P(z)-z^3(z-2)$	$2z^3-4z^2-z+2$	
$2z^2\times(z-2)$	$2z^3-4z^2$	
$P_2(z)=P_1(z)-2z^2(z-2)$	$-z+2$	
$(-1)\times(z-2)$	$-z+2$	
$P_2(z)-(-1)(z-2)$	0	

Le raisonnement s'initie de la même manière : 2 est une racine de P donc $P(z)=(z-2)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré 3.

Puis, en observant le terme de plus haut degré du polynôme P on en déduit que $P(z)=(z-2)z^3+R(z)$ où R est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. En développant on obtient $P(z)-(z-2)z^3=R(z)$ c'est-à-dire $2z^3-4z^2-z+2=R(z)$. En observant le terme de plus haut degré on en déduit que $R(z)=(z-2)2z^2+S(z)$ où S est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. En développant on obtient $R(z)-(z-2)2z^2=S(z)$ c'est-à-dire $-z+2=S(z)$. En observant le terme de plus haut degré on en déduit que $S(z)=(z-2)\times(-1)+T(z)$ où S est un polynôme de degré inférieur ou égal à 0. En développant on obtient $S(z)-(z-2)\times(-1)=T(z)$ c'est-à-dire $0=T(z)$. On en conclut que $P(z)=z^4-4z^2-z+2=(z-2)(z^3+2z^2-1)$.

Afin de simplifier les calculs, on peut adopter une disposition analogue à celle de la division euclidienne de deux nombres entiers : voir l'image proposée ci-dessus.

Exercices d'application directe

- Soit P le polynôme défini par $P(z)=z^3+6z^2+13z+10$. Calculer $P(-2)$. En déduire une factorisation de $P(z)$. Résoudre l'équation polynomiale $P(z)=0$.
- Soit P le polynôme défini par $P(z)=z^3-11z^2+33z-35$. Calculer $P(7)$. En déduire une factorisation de $P(z)$. Résoudre l'équation polynomiale $P(z)=0$.
- Soit P le polynôme défini par $P(z)=z^3-12z^2+48z-128$. Calculer $P(8)$. En déduire une factorisation de $P(z)$. Résoudre l'équation polynomiale $P(z)=0$.
- « Les racines du polynôme $P(z)=2z^3-5z-6$ forment dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé un triangle équilatéral ». Cette affirmation est vraie ou fausse ?
- Factoriser $P(z)=z^5-z$ sous la forme du produit de cinq polynômes de degré 1.

Des racines réelles, des racines imaginaires

- On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^4 - 5z^3 + 7z^2 - 5z + 6$. Démontrer que pour tout z de $\mathbb{C}$ on a $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$. Montrer que le nombre imaginaire i est une racine de P. Quelle autre racine du polynôme P l'égalité précédente permet-elle de mettre en évidence ? En déduire une factorisation de P. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

- On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$. Démontrer que pour tout z de $\mathbb{C}$ on a $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$. Calculer $P(1+i)$. Quelle autre racine du polynôme P l'égalité précédente permet-elle de mettre en évidence ? En déduire une factorisation de P. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

- On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^4 - 2z^3 + 12z^2 - 8z + 32$. Démontrer que $2i$ et $-2i$ sont des racines de P. En déduire une factorisation de P puis l'ensemble des racines de P.

- On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^4 + 4$. Démontrer que si le nombre complexe z_0 est solution de l'équation $P(z) = 0$ alors les nombres complexes $\overline{z_0}$, $-z_0$ et $-\overline{z_0}$ le sont aussi. Justifier que $z_0 = 1 + i$ est une racine de P. Déduire des questions précédentes une factorisation de P.

- On considère l'équation polynomiale $z^3 - 1 = 0$. Trouver une solution réelle. En déduire que cette équation admet deux autres solutions complexes conjuguées que l'on déterminera sous forme algébrique et sous forme exponentielle. On note j la solution complexe dont la partie imaginaire est positive. Démontrer que l'autre solution non réelle est égale à j^2. Vérifier que $j^3 = 1$ et que $j^2 = -1 - j$. On note R, S et T les points du plan complexe d'affixes respectives les trois solutions de l'équation. Quelle est la nature du triangle RST ? Expliquer pourquoi.

Les formules de Viète

On considère le polynôme P défini par $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ où a, b, c et d sont quatre nombres réels tels que $a \neq 0$. On suppose dans cet exercice que P admet trois racines distinctes z_1, z_2 et z_3. Ecrire la forme factorisée de P puis développer cette forme. En déduire l'expression de $z_1 + z_2 + z_3$ en fonction de a, b, c et d. En déduire également l'expression de $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ en fonction de a, b, c et d. En déduire enfin l'expression de $z_1z_2z_3$ en fonction de a, b, c et d. Ces relations sont appelées les formules de Viète.

En utilisant les formules de Viète, déterminer un polynôme de degré 3 ayant trois racines z_1, z_2 et z_3 telles que $z_1 + z_2 + z_3 = 17$, $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 94$ et $z_1z_2z_3 = 168$. Vérifier que 4 est une racine de ce polynôme et en déduire les autres racines.