Critères de divisibilité

Parmi les dix nombres ci-dessous, déterminer ceux qui sont divisibles par 2, déterminer ceux qui sont divisibles par 3, déterminer ceux qui sont divisibles par 5, déterminer ceux qui sont divisibles par 9. On rappellera les critères de divisibilité par 2, par 3, par 5, par 9.

42 78 65 66 25 40 12 15 20 81

Diviseur – Multiple

1. Soit $a=12\Delta$ un nombre à trois chiffres. Par quel chiffre peut-on remplacer Δ pour que $a=12\Delta$ soit divisible par 5 ? Pour que $a=12\Delta$ soit un multiple de 2 ? Pour que 3 soit un diviseur de $a=12\Delta$?

2. Soit $b=235\nabla$ un nombre à quatre chiffres. Par quel chiffre peut-on remplacer ∇ pour que $b=235\nabla$ soit divisible par 3 ? Pour que $b=235\nabla$ soit un multiple de 5 ? Pour que 2 soit un diviseur de $b=235\nabla$?

3. Déterminer les chiffres Δ et ∇ pour que le nombre $c=2\Delta3\nabla$ soit à la fois divisible par 2, par 5 et par 9.

Divisible par deux

Soit n un entier naturel. On considère le nombre $A=n\left(n^2+5\right)$. Le but est de démontrer que le nombre A est **toujours** pair. Pour cela on propose un **raisonnement par disjonction de cas***.

1. On suppose dans un premier temps que n est pair. Démontrer que le nombre A est pair.

2. On suppose désormais que n est impair. Démontrer que le nombre A est pair.

* Le **raisonnement par disjonction de cas** est la **séparation** d'une question en **plusieurs cas indépendants**, chacun d'eux étant **plus faciles** à résoudre **successivement** que globalement.

Divisible par trois

Démontrer que la somme de **trois entiers relatifs consécutifs** est divisible par trois.

Soit a et b deux entiers naturels. On considère le nombre $N=ab\left(a^2-b^2\right)$. Le but est de démontrer que le nombre N est toujours divisible par trois. On propose à nouveau un **raisonnement par disjonction de cas**.

1. On suppose que a ou b est multiple de trois. Démontrer que N est divisible par trois.

2. Lorsqu'un nombre n'est pas un multiple de trois, il peut s'écrire sous la forme $3k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$ ou bien $3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$.Montrer que N est divisible par trois lorsque :

$a=3k+1$	$a=3k+1$	$a=3k+2$	$a=3k+2$
$b=3k'+1$	$b=3k'+2$	$b=3k'+1$	$b=3k'+2$

Divisible par quatre

Démontrer que la somme de deux **impairs consécutifs** est divisible par quatre.

Divisible par deux et par trois

Soit n un entier naturel. Démontrer que $n^3 - n$ est divisible par deux **et** par trois. On procédera par disjonction de cas. On supposera d'abord que n est soit pair soit impair et on montrera que $n^3 - n$ est divisible par deux. On supposera ensuite que $n = 3k$ ou $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$ et on montrera que $n^3 - n$ est alors divisible par trois.

Transitivité et combinaison linéaire

- $\boxed{\text{Si } b \text{ divise } a \text{ et si } a \text{ divise } c \text{ alors } b \text{ divise } c.}$
- $\boxed{\text{Si } b \text{ divise } a \textbf{ et } c \text{ alors, pour tout entier relatif } k \text{ et } k',\ b \textbf{ divise aussi } k \times a + k' \times c.}$

Proposer une démonstration de chacune des deux propriétés proposées ci-dessus. On se basera pour cela sur la **définition de la divisibilité** rappelée ici : « b divise a signifie qu'il existe un **entier** relatif q tel que $a = b \times q$ ».

Application directe

Soit n un entier relatif. Soit a un entier relatif.

1. Montrer que si a divise $n-3$ et $2n+1$ alors a divise 7.
2. Montrer que si a divise $n^2+3n+13$ et $n+2$ alors a divise 11.
3. Développer $(n+1)^2 + (n+1) - 2$.
   Montrer que si un entier a divise $n^2+3n+19$ et $n+1$ alors il divise 17.

Divisibilité par 37

Soit n un entier naturel non nul tel que $n = 10a + b$ où a et b sont des entiers naturels.

1. Montrer que si $a - 11b$ est divisible par 37 alors n est divisible par 37.
2. Sans calculatrice, en déduire que 38369 est divisible par 37.

Recherche d'entiers

1. Déterminer n pour que n divise $n+8$.
2. Déterminer n pour que $n-1$ divise $n+17$.
   Pour cela on remarquera que $n+17 = (n-1)+18$.
3. Déterminer n pour que $n-3$ divise n^2+3.
   Pour cela on remarquera que $n^2+3 = n^2-9+12$.

Recherche de couples d'entiers

Soit x et y deux entiers naturels tels que $x > y$.

1. Montrer que si $x^2 - y^2 = 7$ alors $x - y$ et $x + y$ sont des diviseurs de 7. En déduire quels sont tous les entiers x et y tels que $x^2 - y^2 = 7$.
2. Montrer que si $x^2 y - xy^2 = 6$ alors xy et $x - y$ sont des diviseurs de 6. En déduire quels sont tous les entiers x et y tels que $x^2 y - xy^2 = 6$.

Divisibilité et polynômes

Soit n un entier naturel non nul. Montrer que pour tous les réels x et a on a l'égalité $x^n - a^n = (x-a)\left(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}\right)$. En déduire que $19^n - 12^n$ est divisible par 7.

Division euclidienne

Soient a et b deux entiers relatifs tels que $b > 0$.
Il existe un **unique couple** $(q;r)$ d'entiers relatifs tels que $\boxed{a = b \times q + r}$ avec $0 \leq r < b$.

Application directe

Effectuer la division euclidienne de a par b dans chacune des trois situations suivantes :

- $a = 2003$ et $b = 7$
- $a = 6200$ et $b = 19$
- $a = 275$ et $b = 14$

Importance du reste

$a = b \times q + r$ donne le quotient q, le reste r de la division de a par b uniquement si $\boxed{0 \leq r < b}$

Application directe

1. Sachant que $19 = 3 \times 5 + 4$. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne 19 par 5. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 19 par 3.

2. Sachant que $38367 = 152 \times 251 + 215$. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne 38367 par 251. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 38367 par 152.

3. Sachant que $197719 = 341 \times 578 + 621$. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne 197719 par 341. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 197719 par 578.

Plus grand commun diviseur

Deux entiers naturels non nuls ont toujours un **nombre fini** de diviseurs et donc un nombre fini de **diviseurs communs** (1 et -1 en font partie). Par conséquent, il existe un diviseur commun à ces deux nombres **plus grand** que les autres. Ce nombre est appelé le plus grand commun dénominateur de a et de b et sera noté $PGCD(a;b)$.
Remarquons immédiatement la propriété suivante :

- $\boxed{\text{Si } b \text{ divise } a \text{ alors } PGCD(a;b)=b}$

On souhaite démontrer la propriété suivante :

- $\boxed{\text{Si } a,\ b,\ q,\ r \text{ sont tels que } a=b\times q+r \text{ avec } r\neq 0 \text{ alors } PGCD(a;b)=PGCD(b;r)}$

1. Montrer que si d divise a et b alors d divise b et r. **Réciproquement**, montrer que si d divise b et r alors d divise a et b.

2. Que peut-on en déduire de l'ensemble des diviseurs communs à a et b et de l'ensemble des diviseurs communs à b et r. Conclure.

Algorithme d'Euclide

Calculer $PGCD(1636;1128)$, $PGCD(1414;666)$, $PGCD(2378;1769)$, $PGCD(1730;519)$.

Homogénéité

Si on multiplie deux entiers naturels non nuls a et b par un **même entier naturel** k alors leur PGCD est lui aussi multiplié par k.

On a donc l'égalité suivante : $\boxed{PGCD(k\times a;k\times b)=k\times PGCD(a;b)}$.

Application directe

1. Trouver tous les entiers naturels non nuls a tels que $a<336$ et $PGCD(336;a)=28$.

2. Trouver tous les entiers naturels non nuls b tels que $b<225$ et $PGCD(225;b)=45$.

Combinaison linéaire

N'oublions pas que si d divise a **et** b alors, pour tout relatif k et k', d **divise aussi** $k\times a+k'\times b$. Comme le $PGCD(a;b)$ divise a **et** b, il vérifie **lui aussi** cette propriété et divise donc toute combinaison linéaire de a et b.

Application directe

1. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que $PGCD(n;n+1)=1$.

2. Soit n un entier naturel non nul. Que peut-on dire de $PGCD(n;n+2)$?

3. Soit n un entier naturel non nul. On considère deux entiers $a=2n+5$ et $b=n+1$. Calculer $a-2b$ et en déduire les valeurs possibles du $PGCD(a;b)$.

4. Soit n un entier naturel non nul. On considère deux entiers $a=3n+11$ et $b=n+6$.

Calculer $a-3b$ et en déduire les valeurs possibles du $PGCD(a;b)$.

5. Soit n un entier naturel non nul. On considère deux entiers $a=6n+5$ et $b=7n+6$. Calculer $6b-7a$ et en déduire $PGCD(a;b)$.

6. Soit n un entier naturel non nul. On considère deux entiers $a=21n+4$ et $b=16n+3$. Déterminer deux entiers relatifs tels que $\alpha a+\beta b=1$ et en déduire $PGCD(a;b)$.

Problèmes

1. Soit n un entier naturel non nul. On considère $a=n^2+3n$ et $b=n^2+5n+6$.
   - Factoriser a et b.
   - Calculer $PGCD(a;b)$ en fonction de n.

2. Soit n entier non nul. Soit $a=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $b=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ et $c=\dfrac{(n+2)(n+3)}{2}$.
   - Expliquer dans un premier temps pourquoi a, b et c sont trois entiers naturels.
   - Démontrer que $PGCD(2a;2b)=(n+1)PGCD(n;n+2)$.
   - En déduire $PGCD(a;b)$ en distinguant les cas où n est pair et où n est impair.
   - De façon analogue, déterminer $PGCD(b;c)$.

Nombres premiers entre eux

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. a et b sont **premiers entre eux** signifie que $PGCD(a;b)=1$. Cela signifie qu'**aucune** table de multiplication ne contient à la fois l'un et l'autre, excepté la table de 1 évidemment !

Si $d=PGCD(a;b)$ alors il existe deux entiers relatifs a' et b' **premiers entre eux** tels que $a=da'$ et $b=db'$.

On souhaite démontrer cette propriété : pour cela déterminer les entiers a' et b' puis calculer $PGCD(a';b')$.

Application directe

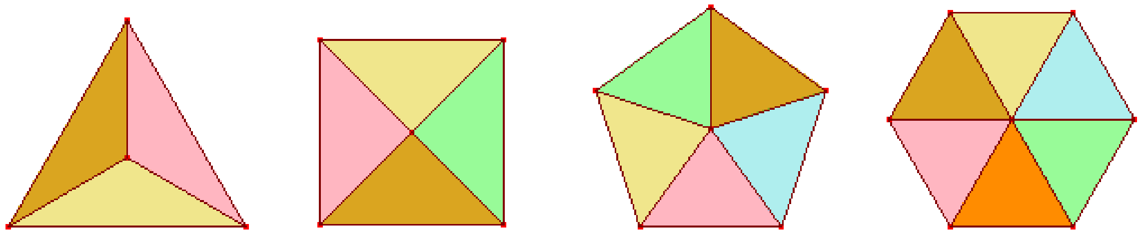
1. Trouver les couples $(a;b)$ d'entiers naturels tels que $ab=1452$ et $PGCD(a;b)=11$.

2. Trouver les couples $(x;y)$ d'entiers naturels tels que $xy=7776$ et $PGCD(x;y)=18$.

3. Trouver les couples $(a;b)$ d'entiers naturels tels que $a+b=144$ et $PGCD(a;b)=18$.

4. Trouver les couples $(x;y)$ d'entiers naturels tels $x+y=1902$ et $PGCD(x;y)=317$.

Un point mobile



Triangle Carré Pentagone Hexagone

1. Un point mobile se déplace sur les côtés du triangle en tournant dans le sens direct, sa position initiale étant le sommet « en bas, à gauche ». Quelle sera sa position finale après avoir parcouru 2021 côtés ?

2. Un point mobile se déplace sur les côtés du carré en tournant dans le sens direct, sa position initiale étant le sommet « en bas, à gauche ». Quelle sera sa position finale après avoir parcouru 2021 côtés ?

3. Un point mobile se déplace sur les côtés du pentagone en tournant dans le sens direct, sa position initiale étant le sommet « en bas, à gauche ». Quelle sera sa position finale après avoir parcouru 2021 côtés ?

4. Un point mobile se déplace sur les côtés de l'hexagone en tournant dans le sens direct, sa position initiale étant le sommet « en bas, à gauche ». Quelle sera sa position finale après avoir parcouru 2021 côtés ?

Les jours de la semaine

1. Le premier janvier 2012 était un dimanche. Quel jour de la semaine sera le premier janvier 2013 ?

2. Quel jour de la semaine sera le premier janvier 2014 ? Et le premier janvier 2015 ?

Une horloge

1. Quelle heure indique l'horloge 113 heures après avoir indiqué 2 heures ?

2. Quelle heure indique l'horloge 156 heures après avoir indiqué 6 heures.

Congruences

Soit a et b deux entiers relatifs. p désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Dire que a et b sont **congrus modulo** p signifie qu'ils ont le même reste dans la division euclidienne par p.

On note $a \equiv b[p]$.

A l'aide de la définition ci-dessus, réécrire chacun des résultats des exercices précédents à l'aide d'une congruence.

Propriétés immédiates

$a \equiv b[p] \Leftrightarrow b \equiv a[p]$ $\qquad$ $a \equiv b[p] \Leftrightarrow b-a$ est un multiple de p

1. La première propriété exprime la **commutativité** de la relation de congruence.
2. La deuxième propriété exprime que « deux entiers relatifs a et b sont **congrus** mod p si et seulement si leur **différence** $b-a$ est un **multiple** de p ». Démontrer cette propriété.
3. Que peut-on dire d'un entier a **congru à zéro** modulo p ?

Autres propriétés des congruences

La relation de congruence est **transitive**.
Cela signifie que si $a \equiv b[p]$ et que si $b \equiv c[p]$ alors $a \equiv c[p]$.

La relation de congruence est **compatible avec** les opérations **d'addition**, de **soustraction** et de **multiplication**. Cela signifie que si k est un relatif, si n est un naturel, si $a \equiv b[p]$ et si $c \equiv d[p]$, alors on a les égalités suivantes :

$a+k \equiv b+k[p]$ $\qquad$ $a-k \equiv b-k[p]$ $\qquad$ $a \times k \equiv b \times k[p]$ $\qquad$ $a^n \equiv b^n[p]$

$a+c \equiv b+d[p]$ $\qquad$ $a-c \equiv b-d[p]$ $\qquad$ $a \times c \equiv b \times d[p]$ $\qquad$ **Non valable pour la division !**

Divisible par deux

Soit n un entier naturel. On considère le nombre $A = n(n^2+5)$. Le but est de démontrer que le nombre A est **toujours** pair. Pour cela on propose un **raisonnement par disjonction de cas***. On suppose dans un premier temps que n est pair. Démontrer dans ce cas que le nombre A est pair. On suppose dans un second temps que n est impair. Démontrer que dans ce cas aussi le nombre A est pair.

Divisible par trois

Démontrer que le nombre $N = ab(a^2-b^2)$ est toujours divisible par trois. Pour cela on envisagera les cas possibles correspondants aux trois restes possibles de la division euclidienne par 3. Cas où $a \equiv 0[3]$. Cas où $a \equiv 1[3]$. Cas où $a \equiv -1[5]$. Cas où $b \equiv 0[3]$. Cas où $b \equiv 1[3]$. Cas où $b \equiv -1[3]$.

Divisible par cinq

Démontrer que $n^2(n^4-1)$ est divisible par 5 quelque soit n. Pour cela on envisagera les cinq cas possibles correspondants aux cinq restes possibles de la division euclidienne par 5.

Cas où $n \equiv 0[5]$. Cas où $n \equiv 1[5]$. Cas où $n \equiv 2[5]$. Cas où $n \equiv -1[5]$. Cas où $n \equiv -2[5]$.

Critère de divisibilité par 3

« Si la somme des chiffres est divisible par trois, alors le nombre est divisible par trois. »

Exemple : 17382

Critère de divisibilité par quatre

« Si la somme du chiffre des unités avec le double du chiffre des dizaines est divisible par quatre, alors le nombre est divisible par quatre. »

Exemple : 17564

Critère de divisibilité par sept

« Si la différence entre le nombre de dizaines et le double du chiffre des unités est divisible par sept, alors le nombre est divisible par sept. »

Exemple : 17381

Critère de divisibilité par huit

« Si la somme du chiffre des unités, du double du chiffre des dizaines et du quadruple du chiffre des milliers est divisible par 8. »

Exemple : 17976

Critère de divisibilité par 9

« Si la somme des chiffres est divisible par neuf, alors le nombre est divisible par neuf. »

Exemple : 17487

Le relevé d'identité bancaire

Le relevé d'identité bancaire (RIB) est formé : d'un nombre de 21 chiffres (cinq chiffres identifiant la banque, cinq chiffres identifiant le guichet et onze chiffres représentant le numéro de compte), suivi d'un nombre de deux chiffres qui est une clé de détection d'erreur dans l'un des 21 chiffres précédents.

La clé est définie ainsi : « on note A le nombre constitué des 21 chiffres, on calcule le reste R de la division euclidienne de $100 \times A$ par 97. La clé est alors définie par $97 - R$.

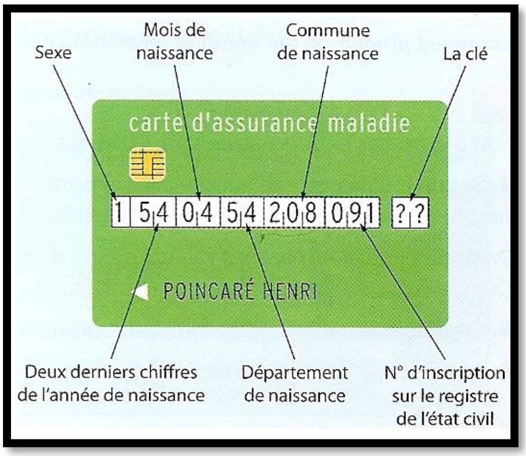
Soit A = 200 410 101 278 340 238 431

1. Ecrire $100 \times A$ sous la forme $a \times 10^{12} + b \times 10^{6} + c$ avec $0 \leq c < 10^{6}$ et dire combien de chiffres comporte $100 \times A$. Identifier a, b et c.

2. Calculer le reste de la division euclidienne de 10^{6} par 97 puis de 10^{12} par 97. Calculer la clé du nombre A.

Numéro INSEE

Le numéro INSEE d'une personne est un nombre de 15 chiffres. Il se compose de plusieurs parties. Les 13 premiers chiffres forment un nombre N comme expliqué ci-contre. Les deux derniers chiffres forment une clé de contrôle $K = 97 - R$ où R est le reste de la division euclidienne du nombre N par 97.



Le but de l'exercice est de déterminer cette clé avec une calculatrice qui n'effectue pas de calculs exacts sur des nombres à 13 chiffres.

1. Déterminer les entiers a et b tels que $N = a \times 10^6 + b$.
2. Quel est le reste de la division euclidienne de 10^2 par 97 ?
3. En déduire le reste de la division euclidienne de 10^6 par 97.
4. Calculer la clé de la carte vitale ci-dessus. Justifier la réponse.

En donnant son numéro, Henri se trompe souvent.

5. S'il inverse les deux derniers des 13 chiffres, son erreur est-elle détectée par la clé ?
6. S'il entre pour code de la commune 305, son erreur est-elle détectée par la clé ?

Une suite de nombres particulière

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définis par $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases}$. Calculer les premiers termes de la suite u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5. Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de chaque terme u_n de la suite ? Montrer que pour tout $n \in IN$ on a $u_{n+2} \equiv u_n [4]$. En déduire que, pour tout entier naturel k on a $u_{2k} \equiv 2[4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0[4]$. Montrer par récurrence que, pour tout n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$. En déduire par récurrence également que pour tout $n \in IN$ on a $2u_n \equiv 28[100]$. Sauriez-vous en déduire les deux derniers chiffres du nombre u_n et de cette manière valider la conjecture émise ?

Une suite de nombres particulière, encore…

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 10u_n + 21$. Calculer les premiers termes u_1, u_2 et u_3. Quelle conjecture peut-on émettre concernant l'écriture décimale de chaque terme u_n de la suite ? Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $3u_n = 10^{n+1} - 7$. Est-on en mesure de valider la conjecture émise ? Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. Démontrer que $3u_n \equiv 4 - (-1)^n [11]$. En déduire que pour tout n u_n n'est pas divisible par 11.

Les rep-units

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1111, sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1. Pour tout entier naturel p, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec fois le chiffre 1, c'est-à-dire : $N_p = \underbrace{111...1}_{p \text{ fois}} = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k$. L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.

1. Montrer que N_p n'est divisible ni par 2 ni par 5.

2. Dans cette question on étudie la divisibilité de N_p par 3. Prouver que pour tout entier naturel j on a $10^j \equiv 1[3]$. En déduire que $N_p \equiv p[3]$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit N_p soit divisible par 3.

3. Dans cette question on étudie la divisibilité de N_p par 7. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous ou a est l'unique entier relatif appartenant à l'ensemble $\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$ tel que $10^m \equiv a[7]$.

m	0	1	2	3	4	5	6
a							

Soit p un entier naturel non nul. Montrer que $10^p \equiv 1[7]$ si et seulement si p est un multiple de 6 (utiliser la division euclidienne de p par 6). Justifier que $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$. En déduire que N_p est divisible par 7 si et seulement si p est un multiple de 6.

Les rep-units, encore…

Un rep-unit est un entier naturel dont l'écriture décimale ne comprend que le chiffre 1 (voir exercice précédent). Le but de cet exercice est de trouver tous les rep-units qui sont des carrés parfaits. Soit n un entier naturel. On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1. Quel peut être le chiffre des unités de n ? En remarquant qu'un entier se terminant par 1 ou 9 peut s'écrire $10k+1$ ou $10k-1$ avec k entier, montrer que $n^2 \equiv 1[20]$. En déduire tous les rep-units qui sont des carrés parfaits.

Nombres de Fermat

On appelle nombres de Fermat les entiers $F_n = 2^{2^n} + 1$ avec n un entier naturel. Calculer F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4. En 1640, Pierre de Fermat annonce qu'il est persuadé que les nombres F_n sont premiers. A l'aide de la calculatrice, vérifier que 641 divise F_5. Quelle question peut-on se poser ? Montrer que pour tout entier naturel n, $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$. En déduire par un raisonnement par récurrence que pour $n \geq 2$, l'écriture décimale de F_n se termine toujours par un 7.