Nombre premier

Dire qu'un entier naturel est **premier** signifie qu'il admet **deux diviseurs** : **un** et **lui-même**.

Zéro est-il un nombre premier ? Un est-il un nombre premier ? Justifier vos deux réponses.

Deux est-il un nombre premier ? Justifier votre réponse. Qu'en est-il des autres nombres pairs ? Citer les sept premiers nombres premiers.

Nombre composé

Tout entier naturel **non premier**, distinct de un, admet au **moins un diviseur premier**.

On propose ci-dessous la **démonstration par l'absurde** de ce résultat :

Considérons un entier $n > 1$ qui ne soit pas premier. Cela signifie que l'ensemble des diviseurs de n contient 1, n et forcément d'autres éléments dont on extrait **le plus petit** que l'on nomme p .

Ainsi $1 < p < n$ et p divise n.

Hypothèse : p **n'est pas** premier.

Il existe alors un entier d tel que $1 < d < p$ et tel que d divise p. A ce moment là, par transitivité (d divise p et p divise n) nous pouvons dire que d divise n. On a donc trouvé un diviseur de n plus petit que p ce qui est en **contradiction** avec le fait que p est **le plus petit** diviseur de n.

On en déduit que **l'hypothèse est fausse** et par conséquent p **est premier**.

Ensemble infini

Il existe **une infinité** de nombres premiers.

On propose ci-dessous la **démonstration par l'absurde** de ce théorème :

Hypothèse : il existe un **nombre fini** de nombres premiers $\{p_1; p_2; ...; p_k\}$.

On considère le nombre $a = p_1 \times p_2 \times ... \times p_k + 1$ qui est un entier strictement supérieur à 1. Par conséquent il admet forcément un diviseur premier p_i pris dans l'ensemble $\{p_1; p_2; ...; p_k\}$.

Evidemment p_i divise $p_1 \times p_2 \times ... \times p_k$ mais il divise aussi $a = p_1 \times p_2 \times ... \times p_k + 1$ par conséquent il divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres donc p_i divise 1. **Ceci est impossible** puisque p_i est premier.

On en déduit que **l'hypothèse est fausse** et par conséquent il existe **une infinité** de nombres premiers.

Le crible d'Eratosthène

Il s'agit d'une méthode permettant de déterminer tous les nombres premiers inférieurs à un nombre donné. On raye tous les multiples de deux supérieurs à deux, puis tous les multiples de trois supérieurs à trois, les multiples de cinq supérieurs à cinq, les multiples de sept supérieurs à sept…

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Critère de primalité

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux.

Si n n'est pas premier alors il existe un nombre premier $p \leq \sqrt{n}$ qui divise n.

Limiter les essais

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. La propriété proposée ci-dessous permet de **limiter le nombre d'opérations** dans la détermination du caractère premier d'un entier.

Si n n'est divisible par aucun nombre premier p inférieur à $\sqrt{n}$ alors n est **premier**.

Décomposition en produit de facteurs premiers

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Ce nombre peut se décomposer sous la forme $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$.

Dans cette décomposition les nombres p_1, p_2, … , p_k sont des nombres premiers tels que $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ et les nombres α_1, α_2, … , α_k sont des entiers naturels non nuls. Cette décomposition est **unique**.

Ensemble des diviseurs

Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à deux dont la décomposition est $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$.

L'ensemble des **diviseurs** de n est l'ensemble des entiers d s'écrivant sous la forme $d = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots \times p_k^{\beta_k}$ où les nombres β_1, β_2, … , β_k sont des entiers naturels tels que $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$, $0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2$, … , $0 \leq \beta_k \leq \alpha_k$.

Le **nombre de diviseurs naturels** de n est $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_k + 1)$ car tout diviseur peut s'écrire sous la forme $d = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots \times p_k^{\beta_k}$ et chaque nombre β_i peut prendre les $(\alpha_i + 1)$ valeurs entières de 0 à βi.

Plus grand commun diviseur

Soit a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à deux.

Le PGCD de a et b est égal au produit **des facteurs premiers communs** aux décompositions de a et b, chacun d'eux étant affectés **du plus petit exposant** avec lequel il figure dans la décomposition de a et b.

Ainsi, si $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$ et si $b = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots \times p_k^{\beta_k}$ où p_1, p_2, … , p_k sont des nombres premiers, où α_1, α_2, … , α_k ainsi que β_1, β_2, … , β_k sont des entiers naturels **éventuellement nuls**, on a :

$$\boxed{PGCD(a;b) = p_1^{\delta_1} \times p_2^{\delta_2} \times \ldots \times p_k^{\delta_k} \text{ avec } \delta_i = \min(\alpha_i;\beta_i) \text{ pour tout } 1 \le i \le k}$$

Plus petit commun multiple

L'ensemble des multiples strictement positifs communs à deux entiers naturels non nuls **n'est pas vide** puisque leur produit en fait partie. Par conséquent il existe dans cet ensemble un multiple commun à ces deux nombres **plus petits** que les autres. Ce nombre est appelé le plus petit commun multiple de a et de b et sera noté $PPCM(a;b)$.

Le $PPCM(a;b)$ est égal au produit **de tous les facteurs premiers** présents dans **l'une ou l'autre** des décompositions de a et b, chacun d'eux étant affectés **du plus grand exposant** avec lequel il figure dans la décomposition de a et b.

Ainsi, si $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$ et si $b = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots \times p_k^{\beta_k}$ où p_1, p_2, … , p_k sont des nombres premiers, où α_1, α_2, … , α_k ainsi que β_1, β_2, … , β_k sont des entiers naturels **éventuellement nuls**, on a :

$$\boxed{PPCM(a;b) = p_1^{\gamma_1} \times p_2^{\gamma_2} \times \ldots \times p_k^{\gamma_k} \text{ avec } \gamma_i = \max(\alpha_i;\beta_i) \text{ pour tout } 1 \le i \le k}$$

Application directe

Situation 1

Un ouvrier dispose de plaques d'aluminium de 2,20 mètres de longueur et 1,76 mètres de largeur. Il reçoit la consigne suivante : « découper dans ces plaques des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façons à ne pas avoir de perte ». Quel sera la longueur du côté d'un carré ?

Situation 2

Deux cyclistes effectuent des tours de piste. Le premier met 3 min 18 secondes pour effectuer un tour. Le second met 3 min et 45 secondes pour effectuer le même tour. Ils partent ensemble sur la ligne de départ. Au bout de combien de temps se retrouveront-ils sur cette ligne de départ ?

Un nombre gentil est un nombre entier multiple de tous les entiers de 1 à 10. Sauriez-vous trouver le plus petit de tous les nombres gentils ?

Représentation graphique

On considère l'ensemble des nombres $z = 2^x \times 3^y$ où x et y désignent des entiers naturels. Dans le plan orthonormé, on représente le nombre z par le point M de coordonnées $(x;y)$. On dit que M est l'image de z. Où est l'image de 1 ? Où sont les images des nombres 2^x ? Des nombres 3^y ? Des puissances de 6 ? On considère deux entiers naturels $a = 3456$ et $b = 5668704$. Construire dans un repère les images A et B de ces deux nombres. Représenter graphiquement l'ensemble des diviseurs de a. Représenter graphiquement l'ensemble des diviseurs de b. En déduire la position de D image de $d = PGCD(a;b)$. Représenter graphiquement l'ensemble des multiples de a. Représenter graphiquement l'ensemble des multiples de b. En déduire la position du point M image de $m = PPCM(a;b)$.

Homogénéité

Si on multiplie deux entiers naturels non nuls a et b par un **même entier naturel** k non nul alors leur PPCM est lui aussi multiplié par k. On a donc l'égalité suivante :

$\boxed{PPCM(k \times a; k \times b) = k \times PPCM(a;b)}$.

Propriété

Le **produit de deux entiers** naturels non nuls est égal au **produit de leur PGCD et de leur PPCM**. Cette relation s'écrit de la façon suivante : $PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = a \times b$.

Conséquence

Si a et b sont **premiers entre eux** alors $\boxed{PPCM(a;b) = a \times b}$. Cette propriété est immédiate puisque la définition de deux nombres premiers entre eux est $PGCD(a;b) = 1$.

Les nombres parfaits, amicaux et sociaux

On dit qu'un nombre est parfait lorsqu'il est égal à la somme de ses diviseurs (autres que lui-même). Par exemple, 6 est un nombre parfait car $6 = 1 + 2 + 3$.

Que penser de l'affirmation ci-contre ?

On dit que deux nombres sont amicaux lorsque chacun est égal à la somme des diviseurs de l'autre (excepté le nombre lui-même). Les nombres 220 et 284 sont-ils amicaux ? Expliquer.

On choisit un entier « A ». On calcule la somme de ses diviseurs positifs autres que lui-même. C'est un nouveau nombre. On calcule la somme de ses diviseurs positifs autre que lui-même, etc… Si on revient au bout de « n » étapes à l'entier de départ « A », on dit que « A » est sociable d'ordre « n ». Le premier nombre sociable d'ordre 5 fut découvert par Paul Poulet, mathématicien français en 1918. Il s'agit du nombre 12496. Vérifier-le à l'aide d'un algorithme.