Deux tableaux de nombres

Voici les productions (exprimées en milliers) de deux usines de cycles appartenant à une même enseigne pour le premier semestre de l'année 2010 :

	VTT adultes	Vélos enfants	VTC	BMX	Vélos de course
Usine 1	12,99	13,20	5,58	1,53	1,95
Usine 2	4,62	4,98	2,16	0,51	0,78

Voici les productions (exprimées en milliers) de deux usines de cycles appartenant à une même enseigne pour le deuxième semestre de l'année 2010 :

	VTT adultes	Vélos enfants	VTC	BMX	Vélos de course
Usine 1	11,79	15,84	4,38	1,29	1,59
Usine 2	3,78	4,14	2,40	0,51	0,66

Deux matrices

$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} & b_{1,5} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & b_{2,5} \end{pmatrix}$ sont deux matrices.

Ces deux matrices ont 2 lignes et 5 colonnes. On dit que ce sont des matrices de **format** $(2;5)$.

Elles contiennent chacune dix éléments, appelés **coefficients de la matrice**. Pour repérer un coefficient, on indique son **indice de ligne**, puis son **indice de colonne**, les lignes se comptant du haut vers le bas, les colonnes de la gauche vers la droite.

1. Ecrire la matrice A donnant les productions des deux usines pour le premier semestre.
2. Ecrire la matrice B donnant les productions des deux usines pour le deuxième semestre.
3. Ecrire la matrice C donnant les productions annuelles des deux usines.
4. Ecrire la matrice D donnant les productions moyennes mensuelles des deux usines.
5. Proposer la **matrice ligne** de format $(1;5)$ présentant les productions moyennes mensuelles de l'usine 1. Proposer la **matrice colonne** de format $(2;1)$ présentant les productions moyennes mensuelles de VTT adultes dans les deux usines.

Additions – Multiplication par une constante

- $C=A+B$ si et seulement si $c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$ pour $1\le i\le n$ et $1\le j\le p$.
- $D=k\times A$ si et seulement si $d_{i,j}=k\times a_{i,j}$ pour $1\le i\le n$ et $1\le j\le p$.

Indices de prix

Une association de consommateurs compare les prix de 5 produits distincts dans trois magasins différents. Les observations fournissent les données suivantes :

	Produit P1	**Produit P2**	**Produit P3**	**Produit P4**	**Produit P5**
Magasin 1	1	5	2	3	4
Magasin 2	1,1	4,7	1,8	3,1	3,8
Magasin 3	0,9	5,1	1,9	3,2	4

Prix des produits à l'unité en euros

Prix d'un panier

Pour comparer la dépense d'une ménagère selon les magasins, on considère un « panier » indiquant pour chaque produit la quantité achetée. Un « panier » est ainsi décrit par la donnée de 5 entiers. Par exemple : 2, 1, 3, 3, 2 signifie que la ménagère a acheté deux produits P1, un produit P2, trois produits P3, trois produits P4 et deux produits P5.

1. Déterminer le prix de ce « panier » pour chaque magasin. Comparer. Conclure.

2. Déterminer le prix d'un autre « panier » de votre choix. Comparer. Conclure.

Prix d'un panier quelconque

On note q_1, q_2, q_3, q_4 et q_5 les quantités respectives des produits P1, P2, P3, P4 et P5 achetés. On note Q la matrice colonne de format $(5;1)$ constituée des cinq quantités q_i pour $1 \le i \le 5$. Déterminer P la matrice colonne de format $(3;1)$ présentant les prix p_i du panier pour $1 \le i \le 3$

Multiplication d'une matrice par une matrice colonne

Soit $A = \left(a_{i,j}\right)$ pour $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le p$ une matrice de format $(n;p)$.
Soit $Q = \left(q_j\right)$ pour $1 \le j \le p$ une matrice colonne de format $(p;1)$.

$P = A \times Q$ est la matrice colonne de format $(n;1)$ définie par $p_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \times q_j$ pour $1 \le i \le n$.

Exercice d'application directe

On propose ci-contre les valeurs nutritionnelles des différents aliments qui composent le menu des élèves de la cantine (données pour 100 g pour chaque aliment).

	Melon	**Poulet**	**Riz**	**Yaourt**
Energie	25	140	350	100
Protéine	0,7	21	7	0
Glucides	5	0	78	20
Lipides	0,2	7	0,8	5

Voici trois propositions de repas. Proposition 1 : 50g de melon, 75g de poulet, 125g de riz et 125g de yaourt. Proposition 2 : 60g de melon, 70g de poulet, 125g de riz et 125g de yaourt. Proposition 3 : 40g de melon, 80g de poulet, 100g de riz et 125g de yaourt. Déterminer la valeur énergétique (exprimée en kcal), l'apport en protéines (exprimé en g), l'apport en glucides (exprimé en g) et l'apport en lipides (exprimé en g) pour chaque proposition de repas.

Gestion des admissions et des sorties dans un hôpital

On estime que les patients admis dans un certain service d'un hôpital peuvent se trouver dans l'un des quatre états suivants : soins réguliers (1), chirurgie (2), soins intensifs (3), sortie (4).

Cette estimation est décrite par le tableau ci-contre, dans lequel sont indiquées les probabilités de passage d'un des états à un autre dans un intervalle de 24 heures (probabilités obtenues par modélisation des fréquences observées sur une longue période).

	Sr (1)	**Ch (2)**	**Si (3)**	**So (4)**
Sr (1)	0,6	0,2	0	0,2
Ch (2)	0,1	0	0,8	0,1
Si (3)	0,5	0	0,33	0,17
So (4)	0	0	0	0

Tableau de circulation entre les services

Ce tableau se lit de la manière suivante : un malade se trouvant un jour en soins réguliers a la probabilité 0,6 de se trouver le lendemain en soins réguliers, la probabilité 0,2 de se trouver le lendemain en chirurgie, une probabilité nulle de se trouver en soins intensifs et la probabilité 0,2 de sortir.

Distribution des patients dans les services

Supposons qu'un certain jour, la distribution des patients (exprimée en dizaines) soit la suivante : 12 en soins réguliers, 5 en chirurgie, 6 en soins intensifs et à sortir. Déterminer la nouvelle distribution dans les différents services lendemain. Expliquer votre raisonnement.

Multiplication d'une matrice ligne par une matrice

Soit $A=\left(a_{i,j}\right)$ pour $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq p$ une matrice de format $\left(n;p\right)$.

Soit $M=\left(m_i\right)$ pour $1\leq i\leq n$ une matrice ligne de format $\left(1;n\right)$.

$P=M\times A$ est la matrice ligne de format $\left(1;p\right)$ définie par $p_j=\sum_{i=1}^{n}m_i\times a_{i,j}$ pour $1\leq j\leq p$.

Suite de matrices ligne – Etat des différents services

Supposons qu'au jour 0, 100 patients soient admis en soins réguliers et qu'il n'y ait aucun patient en cours de traitement. On note $M_0=\begin{pmatrix}10 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ la répartition des malades ce jour.

Les jours suivants, on suppose que 100 bouveaux patients soient admis en soins réguliers et on note M_n la répartition des malades dans les différents services le $n$ème jour, $n\in IN$.

- Calculer M_1. Interpréter.
- Calculer M_2. Interpréter.

Carré d'une matrice ?

- Exprimer M_2 en fonction de M_0.
  Sauriez-vous recalculer la répartition des malades dans les différents services le 2ème jour ?

En voie d'extinction

En 1990, aux Etats Unis, une controverse opposa des environnementalistes à des représentants de l'industrie du bois à propos de la possible extinction de l'espèce des chouettes tachetées pour cause de déforestation. Pour trancher la question, un modèle mathématique de démographie de cette population de chouettes fut élaboré sur la base d'observations et de recensements de cette population sur une zone donnée. Les scientifiques qui ont étudié cette espèce estiment que :

- Le nombre de nouveaux bébés à l'année $n+1$ est égal au tiers du nombre d'adultes vivants l'année n,
- Seuls 20% des bébés nés l'année n parviennent au stade jeune à l'année $n+1$,
- 75% des jeunes et 90% des adultes de l'année n survivent pour être comptabilisés comme adultes à l'année $n+1$.

On note x_0, y_0 et z_0 (respectivement x_1, y_1 et z_1) les effectifs de chacune des classes d'âge pour l'année 1990 (respectivement 1991).

On note U_0, respectivement U_1, la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, respectivement $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$.

1. Expliquer pourquoi le calcul des effectifs des 3 classes d'âge de chouettes en 1991 peut se ramener à l'écriture du système linéaire de trois équations suivant :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} z_0 \\ y_1 = \dfrac{1}{5} x_0 \\ z_1 = \dfrac{3}{4} y_0 + \dfrac{9}{10} z_0 \end{cases}$$

2. Ecrire le système précédent sous la forme d'une égalité matricielle $U_1 = A \times U_0$ où A est une matrice carrée de format $(3;3)$ dont on précisera les coefficients.

Réciproquement on souhaite calculer la répartition de la population de chouettes pour l'année 1990, connaissant celle de 1991.

3. Démontrer que l'on a dans ce cas : $\begin{cases} x_0 = 5y_1 \\ y_0 = -\dfrac{18}{5} x_1 + \dfrac{4}{3} z_1 \\ z_0 = 3x_1 \end{cases}$

4. Ecrire le système précédent sous la forme d'une égalité matricielle $U_0 = A' \times U_1$ où A' est une matrice carrée de format $(3;3)$ dont on précisera les coefficients.

5. Calculer les produits matriciels $A \times A'$ et $A' \times A$. Que remarque-t-on ?

En voie d'extinction – Suite…

On reprend les données de l'activité précédente dans le but d'étudier le comportement à long terme de la population de chouettes. On note x_n, y_n et z_n les effectifs de chacune des classes d'âge de cette population pour l'année 1990 + n.

On rappelle que l'on a $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$. On suppose que $U_0=\begin{pmatrix} 1020 \\ 380 \\ 3120 \end{pmatrix}$. On note $U_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer U_1. Déterminer U_2. Déterminer U_3 (arrondir à l'unité).

2. Démontrer par récurrence que $U_n=\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{\text{n fois}}\times U_0$, c'est-à-dire $U_n=A^n\times U_0$.

3. Déterminer la répartition de la population de chouettes tachetées après 5, 10, 15, 20, 25, 30 ans. Que peut-on envisager pour l'évolution à long terme de la population des chouettes tachetées dans cette région ?

Un point d'étape théorique

Soit $A=\left(a_{i,j}\right)$ pour $1\le i\le n$ et $1\le j\le p$ une matrice de format $(n;p)$.
Soit $B=\left(b_{i,j}\right)$ pour $1\le i\le p$ et $1\le j\le q$ une matrice de format $(p;q)$.

Le produit de la matrice A par la matrice B, noté $A\times B$, est la matrice C de format $(n;q)$ telle que pour tout $1\le i\le n$ et tout $1\le j\le q$, le coefficient $c_{i,j}$ soit égal au produit de la i ème ligne de la matrice A par la j ème colonne de la matrice B.

C'est-à-dire : $\boxed{c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\times b_{k,j}}$

Attention ! le produit de deux matrice **n'est pas commutatif**, c'est-à-dire : $A\times B\neq B\times A$.

Remarques : le produit de matrices **est associatif**, c'est-à-dire : $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$. Le produit de matrices **est distributif**, c'est-à-dire : $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$ pour à l'addition.

Cas particuliers : on appelle matrice carrée, toute matrice de format $(p;p)$. La puissance $n$ème d'une matrice carrée A est définie pour tout $n\in IN$ comme le produit $A^n=\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{\text{n fois}}$.

Par convention : on pose $A^0=Id_p$ où Id_p est la matrice de format $(p;p)$ dans laquelle tous les coefficients sont nuls, exceptés ceux situés sur la diagonale principale et appelée matrice identité.

Raymond Queneau

Célèbe romancier (1903/1976) il est connu pour son livre « Zazie dans le métro » paru en 1959. Il était également mathématicien à ses heures. Il a fondé avec François Le Lionnais, éminent mathématicien français du XXème siècle un groupe littéraire resté célèbre et toujours actif : l'OuLiPo (Ouvroir de Littérature Potentielle). L'un des buts de ce groupe est de construire des textes littéraires sous contraintes, ces contraintes étant souvent de nature mathématique.

$$\begin{pmatrix} \text{le} & \text{a} & \text{le} \\ \text{un} & \text{a} & \text{un} \\ \text{le} & \text{avait} & \text{un} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{chat} & \text{rat} & \text{lion} \\ \text{mangé} & \text{dévoré} & \text{dégusté} \\ \text{poisson} & \text{fromage} & \text{touriste} \end{pmatrix}$$

Matrice inversible

Soit $A=\left(a_{i,j}\right)$ pour $1\leq i\leq p$ et $1\leq j\leq p$ une matrice carrée de format $\left(p;p\right)$.

S'il existe une matrice A' de format $\left(p;p\right)$ telle que $A\times A'=A'\times A=Id_p$ alors on dit que la matrice A est **inversible** et la matrice A' est appelée **matrice inverse** de A. Elle est notée A^{-1}.

Remarque : à part dans des cas simples (voir situation développée à l'activité 4), l'étude de « l'inversibilité » et le calcul « à la main » de l'inverse d'une matrice carré, en résolvant un système linéaire, est difficile et long à mettre en œuvre. On aura souvent recours à la calculatrice.

Cas particulier : si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de format $\left(2;2\right)$ et si $ad-bc\neq 0$, alors la matrice A est inversible et la matrice inverse est la matrice : $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\times\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Vocabulaire : soit $\left(S\right)$ un système dont une écriture matricielle est $A\times X=B$ où A est une matrice carré de format $\left(p;p\right)$ inversible. Ce système est appelé **système de Cramer**. Un tel système admet une unique solution donnée par $X=A^{-1}\times B$ où A^{-1} est la matrice inverse de A.

Démonstration

Proposer une démonstration de la propriété énoncée dans le « cas particulier ».

Exercice d'application directe

On considère le système linéaire suivant : $\left(S\right)\begin{cases} 2x-3y=5 \\ -3x+5y=-2 \end{cases}$

1. Ecrire ce système sous la forme d'une égalité matricielle $A\times X=B$.
2. La matrice A est-elle inversible ? Si oui calculer A^{-1}.
3. Résoudre le système en utilisant le calcul matriciel.

Système de Cramer

On considère les systèmes linéaires suivant :

$$(S_1)\begin{cases} x+2y-z=-1 \\ 2x+3z=10 \\ x-y+z=1 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} x+2y-z=7 \\ 2x+3z=-3 \\ x-y+z=-4 \end{cases} \quad (S_3)\begin{cases} 2x-3z=0 \\ x-2y+z=5 \\ x-y+2z=7 \end{cases} \quad (S_4)\begin{cases} 5x-3z=-4 \\ 3x+4y+z=2 \\ x-y-z=2 \end{cases}$$

1. Ecrire chaque système sous la forme d'une égalité matricielle du type $A\times X=B$.
2. A l'aide de votre calculatrice déterminer l'inverse de la matrice A (si elle existe). Résoudre le système.

Inversion à la main

Il est possible de calculer « à la main » l'inverse d'une matrice carrée de format $(3;3)$.

Soit par exemple la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Considérons le système : $(1)\begin{cases} y-z=a \\ x+3z=b \\ x+y+z=c \end{cases}$.

1. Ecrire le système (1) sous la forme d'une égalité matricielle du type $A\times X=B$.
2. Par méthode de substitution démontrer que l'on a $(2)\begin{cases} x=-3a-2b+3c \\ y=2a+b-c \\ z=a+b-c \end{cases}$.
3. Ecrire le système (2) sous la forme d'une égalité matricielle du type $X=A'\times B$.
4. Calculer $A\times A'$. Calculer $A'\times A$. Conclure.
5. Vérifier ce résultat à l'aide de votre calculatrice.

Exercice d'application directe

1. Calculer « à la main » l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $k\in IR$.
2. Calculer « à la main » l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ où $a,b,c\in IR-\{0\}$.

Intersection de plans

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé trois plans d'équations respectives $(P_1): 2x-y+z-7=0$, $(P_2): x+2y-z+7=0$ et $(P_3): 2x+y-6=0$. Quelle est l'intersection de ces trois plans ?

Intersection de plans – suite

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé trois plans d'équations respectives $(P_1): x-2y+3z-3=0$, $(P_2): 2x+3y-2z-6=0$ et $(P_3): 4x+y+4z-12=0$. Quelle est l'intersection de ces trois plans ?

Décomposition d'un vecteur dans une base

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé trois vecteurs de coordonnées respectives : $\vec{u}(2;3;2)$, $\vec{v}(1;3;4)$ et $\vec{w}(-1;-1;2)$. Décomposer le vecteur $\vec{n}(2;1;-1)$ dans cette nouvelle base, c'est-à-dire trouver trois réels α, β et γ tels que $\vec{n}=\alpha\times\vec{u}+\beta\times\vec{v}+\gamma\times\vec{w}$.

Cercle circonscrit à un triangle

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé les points de coordonnées respectives : $A(5;2)$, $B(4;3)$ et $C(1;0)$. Déterminer les coefficients a, b et c pour que le cercle d'équation $x^2+y^2+ax+by+c=0$ soit le cercle circonscrit du triangle ABC.

Parabole passant par trois points

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé les points de coordonnées respectives : $A(3;11)$, $B(1;3)$ et $C(6;-2)$. Déterminer les coefficients a, b et c pour que la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ passe par les points A, B et C.

Equation différentielle

On cherche une fonction polynôme f telle que pour tout réel x on ait l'égalité suivante : $(x^2-2)f''(x)+(1-3x)f'(x)+f(x)=x^3+6x^2-2x+4$. De quel degré doit être le polynôme ? Déterminer la fonction polynôme f cherchée.

Savoir discuter

Pour chacun des systèmes proposés ci-dessous, déterminer, selon les valeurs du paramètre m, les solutions du système (S_m). Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

$(S_m)\begin{cases}2x+my=4\\mx+y=5\end{cases}$	$(S_m)\begin{cases}2mx+y=3\\3x-3y=5\end{cases}$	$(S_m)\begin{cases}2mx+my=3\\3m-y=5\end{cases}$

Puissances successives d'une matrice carrée

On considère la matrice de format $(2;2)$ suivante : $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$. Calculer A^2. Calculer A^3.

Nous allons déterminer une forme explicite de la matrice A^n pour tout entier $n \in IN$.

1. Soit $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Démontrer que l'on a $A \times P = P \times D$.

2. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

3. Montrer que $A = P \times D \times P^{-1}$.

4. Montrer que $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ pour tout $n \in IN$.
   En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in IN$.

Exercice d'application directe

On considère la matrice de format $(2;2)$ suivante : $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Posons $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2. Calculer A^3. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Démontrer que la matrice $D = P^{-1} \times A \times P$ est une matrice diagonale. Démontrer que l'on a $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ pour tout $n \in IN$ et en déduire A^n « en fonction de n ».. Vérifier la cohérence de ce résultat.

Exercice d'application directe

On considère la matrice de format $(3;3)$: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$. Posons $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans cet exercice vous utiliserez votre calculatrice.

A l'aide de la calculatrice calculer A^2, A^3 et P^{-1} l'inverse de la matrice P. Démontrer que la matrice $D = P^{-1} \times A \times P$ est une matrice diagonale. Démontrer que l'on a $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ pour tout $n \in IN$ et en déduire A^n « en fonction de n ». Vérifier la cohérence de ce résultat.

Application dans le cadre d'un exercice

Pour tout entier n on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en milliers, présent dans cette population au bout du nième jour. Au début la colonie compte 5000 fourmis et au bout d'un jour elle compte 5100 fourmis. On a donc $u_0 = 5$ et $u_1 = 5,1$.

On suppose ensuite que l'accroissement de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10% chaque jour. Ainsi on a la relation de récurrence : $u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9(u_{n+1} - u_n)$.

1. En posant $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ montrer que $V_{n+1} = A \times V_n$ et $V_n = A^n \times V_0$.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice D telle que $D = P^{-1}AP$ et en déduire l'expression de A^n en fonction de n. En déduire que pour tout n on a $u_n = 6 - 0,9^n$.

3. Déterminer la taille (arrondie à l'unité près) de la colonie au bout d'un mois.

Puissances successives d'une matrice carrée, démonstration par récurrence

Partie 1

On considère la matrice A proposée ci-dessous dans laquelle a est un réel quelconque :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ la puissance n de la matrice A est donnée par :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie 2

On considère la matrice A proposée ci-dessous dans laquelle a, b et c sont trois réels tels que $a \neq b$:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ la puissance n de la matrice A est donnée par :

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & c\dfrac{a^n - b^n}{a - b} \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

Inverse d'une matrice carrée, exploitation d'une relation

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Id_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 2. Calculer A^2.

Montrer que $A^2 = 2A + Id_2$. En déduire que la matrice est inversible. Déterminer son inverse.

Ecrire le système proposé ci-contre sous forme matricielle du type $A \times X = B$. Montrer que $A^2 = 3A - 2Id_3$. En decuire que la matrice est inversible. Déterminer son inverse. En déduire la solution du système.

$$(S)\begin{cases} -3y - z = 2 \\ x + 4y + z = 6 \\ -x - 3y = 10 \end{cases}$$

Exercice 1

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où où a et b sont deux nombres réels quelconques.

1. Calculer à la main A^2 en fonction de a et b.
2. Montrer par récurrence que $A^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geq 1$.
3. Sauriez-vous en déduire le cube de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

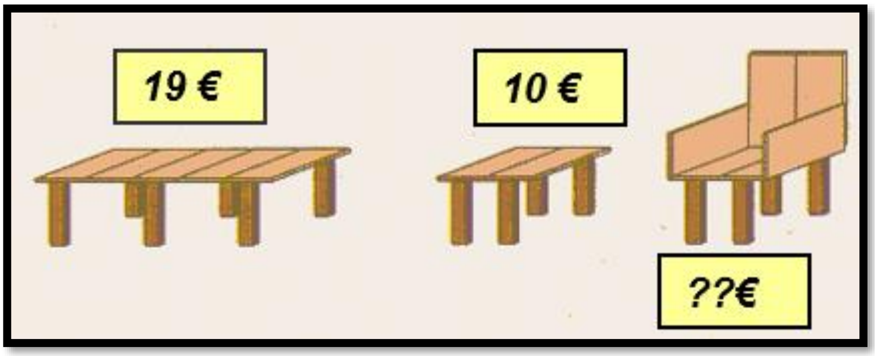
On considère la matrice $B=\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux nombres réels quelconques.

1. Calculer à la main B^2 en fonction de a et b.
2. Montrer par récurrence que $B^n=\begin{pmatrix} a^n & a^n-b^n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geq 1$.
3. Sauriez-vous en déduire la puissance 4 de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Exercice 2

On appelle x le prix d'une planche et y le prix d'un pied.

On note $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la matrice colonne contenant ces deux valeurs inconnues.

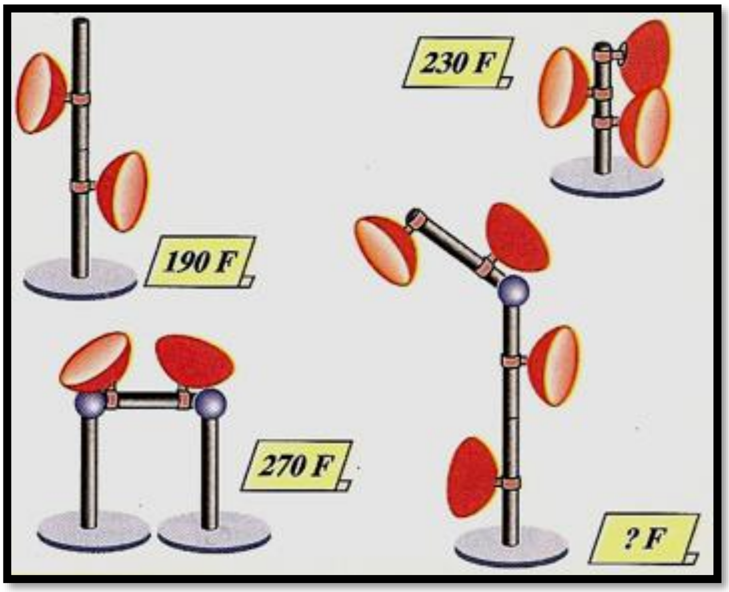


1. A l'aide des deux premiers dessins proposés ci-dessus, déterminer la matrice carrée A et la matrice colonne B telles que la relation matricielle $AX = B$ modélise la situation.
2. La matrice A est-elle inversible ? Quelle est son inverse que vous la calculerez à la main ?
3. A l'aide de la résolution d'un système de Cramer (pour mémoire $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$), déterminer à l'aide de votre calculatrice les valeurs respectives de x et de y.
4. En déduire le prix du meuble décrit par le troisième dessin proposé ci-dessus.

Sur le dessin ci-contre on observe les prix exprimés en francs suisses de plusieurs luminaires constitués de lampes, supports et socle(s).

On appelle x le prix d'une lampe, y le prix d'un support (tige métallique) et z le prix d'un socle (disque métallique).

On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice colonne contenant ces trois valeurs inconnues.



1. A l'aide des trois premiers dessins proposés ci-dessus, déterminer la matrice carrée A et la matrice colonne B telles que la relation matricielle $AX = B$ modélise la situation.

2. En utilisant votre calculatrice, déterminer l'inverse de la matrice A.

3. A l'aide de la résolution d'un système de Cramer (pour mémoire $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$), déterminer, à l'aide de votre calculatrice les valeurs respectives de x, de y et de z.

4. En déduire le prix du luminaire décrit par le quatrième dessin proposé ci-dessus.

Exercice 3

Pour tout entier n on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en milliers, présent dans cette population au bout du nième jour. Au début, la colonie compte 10000 fourmis et au bout d'un jour elle compte 11000 fourmis. On a donc $u_0 = 10$ et $u_1 = 11$.

On suppose ensuite que l'accroissement de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 20% chaque jour. Ainsi on a la relation de récurrence : $u_{n+2} - u_{n+1} = 0{,}8\left(u_{n+1} - u_n\right)$.

4. En posant $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1{,}8 & -0{,}8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ montrer que $V_{n+1} = A \times V_n$ et $V_n = A^n \times V_0$.

5. On pose $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'inverse de la matrice P puis la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$. En remarquant que la matrice D est une matrice diagonale et que $A^n = PD^nP^{-1}$, déterminer l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

6. En utilisant le fait que $V_n = A^n \times V_0$, en déduire que pour tout n on a $u_n = 15 - 5 \times 0{,}8^n$. Vers quelle valeur le nombre de fourmis de cette colonie va-t-il se stabiliser ?