Une matrice

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,p} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Une **matrice** de **format** $(n;p)$ est un tableau rectangulaire formé de n **lignes** et de p **colonnes** de nombres. Elle contient $n\times p$ éléments, appelés **coefficients de la matrice**. Pour repérer un coefficient, on indique son **indice de ligne**, puis son **indice de colonne**, les lignes se comptant du haut vers le bas, les colonnes de la gauche vers la droite.

- Une **matrice ligne** est une matrice formée d'une seule ligne.
- Une **matrice colonne** est une matrice formée d'une seule colonne.
- Une **matrice carrée** d'ordre n est une matrice de n lignes et de n colonnes.
- La **matrice identité** d'ordre n est la matrice carrée constituée de 1 sur la diagonale.

Additions – Multiplication par une constante

Soit $A=(a_{i,j})$, $B=(b_{i,j})$, $C=(c_{i,j})$ et $D=(d_{i,j})$ pour $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq p$ quatre matrices de format $(n;p)$. Soit $k\in IR$ un nombre réel quelconque.

- $C=A+B$ si et seulement si pour $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq p$.

- $D=k\times A$ si et seulement si $d_{i,j}=k\times a_{i,j}$ pour $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq p$.

Multiplication d'une matrice par une matrice colonne

Soit $A=(a_{i,j})$ pour $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq p$ une matrice de format $(n;p)$.
Soit $Q=(q_j)$ pour $1\leq j\leq p$ une matrice colonne de format $(p;1)$.

$P=A\times Q$ est la matrice colonne de format $(n;1)$ définie par $p_i=\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}\times q_j$ pour $1\leq i\leq n$.

Multiplication d'une matrice ligne par une matrice

Soit $A=(a_{i,j})$ pour $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq p$ une matrice de format $(n;p)$.
Soit $M=(m_i)$ pour $1\leq i\leq n$ une matrice ligne de format $(1;n)$.

$P=M\times A$ est la matrice ligne de format $(1;p)$ définie par $p_j=\sum_{i=1}^{n}m_i\times a_{i,j}$ pour $1\leq j\leq p$.

Multiplication de deux matrices

Soit $A=\left(a_{i,j}\right)$ pour $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq p$ une matrice de format $(n;p)$.
Soit $B=\left(b_{i,j}\right)$ pour $1\leq i\leq p$ et $1\leq j\leq q$ une matrice de format $(p;q)$.

Le produit de la matrice A par la matrice B, noté $A\times B$, est la matrice C de format $(n;q)$ telle que pour tout $1\leq i\leq n$ et tout $1\leq j\leq q$, le coefficient $c_{i,j}$ soit égal au produit de la $i$ème ligne de la matrice A par la $j$ème colonne de la matrice B.

C'est-à-dire : $\boxed{c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}\times b_{k,j}}$

Attention ! le produit de deux matrice **n'est pas commutatif**, c'est-à-dire : $A\times B\neq B\times A$.

Remarques : le produit de matrices **est associatif**, c'est-à-dire : $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$. Le produit de matrices **est distributif**, c'est-à-dire : $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$ pour à l'addition.

Cas particuliers : on appelle matrice carrée, toute matrice de format $(p;p)$. La puissance $n$ème d'une matrice carrée A est définie pour tout $n\in IN$ comme le produit $A^n=\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{\text{n fois}}$.

Par convention : on pose $A^0=Id_p$ où Id_p est la matrice de format $(p;p)$ dans laquelle tous les coefficients sont nuls, exceptés ceux situés sur la diagonale principale et appelée matrice identité.

Matrice inversible

Soit $A=\left(a_{i,j}\right)$ pour $1\leq i\leq p$ et $1\leq j\leq p$ une matrice carrée de format $(p;p)$.
S'il existe une matrice A' de format $(p;p)$ telle que $A\times A'=A'\times A=Id_p$ alors on dit que la matrice A est **inversible** et la matrice A' est appelée **matrice inverse** de A. Elle est notée A^{-1}.

Remarque : à part dans des cas simples (voir situation développée à l'activité 4), l'étude de « l'inversibilité » et le calcul « à la main » de l'inverse d'une matrice carré, en résolvant un système linéaire, est difficile et long à mettre en œuvre. On aura souvent recours à la calculatrice.

Cas particulier : si $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ est une matrice carrée de format $(2;2)$ et si $ad-bc\neq 0$, alors la matrice A est inversible et la matrice inverse est la matrice : $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\times\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

Vocabulaire : soit (S) un système dont une écriture matricielle est $A\times X=B$ où A est une matrice carré de format $(p;p)$ inversible. Ce système est appelé **système de Cramer**. Un tel système admet une unique solution donnée par $X=A^{-1}\times B$ où A^{-1} est la matrice inverse de A.