Une marche aléatoire

Monsieur l'indécis a trois amis A, B et C. A chaque étape de sa marche aléatoire :

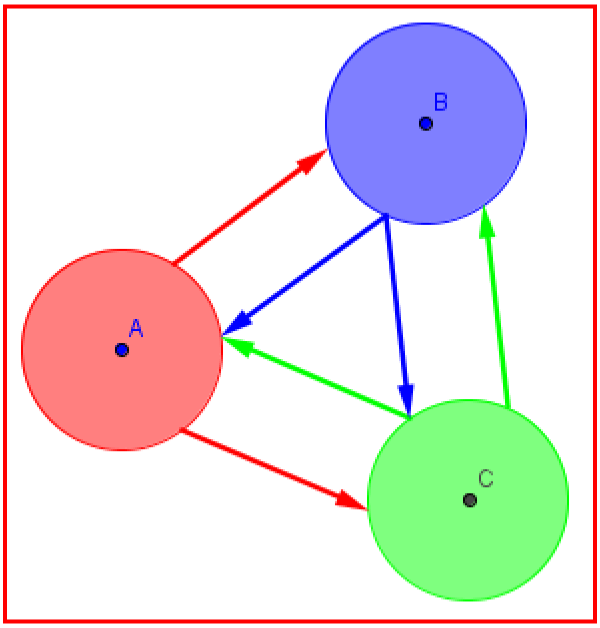
- S'il est chez A, il va chez B ou C avec une probabilité de 1/3 pour B,
- S'il est chez B, il va chez A ou C avec une probabilité de 3/4 pour A,
- S'il est chez C, il va chez A ou B de façon équiprobable.

Une problématique

Il part de chez A, B ou C et arrête sa promenade au bout de 3 étapes. Chez qui a-t-il alors le plus de chance de se trouver ?

Un graphe probabiliste

Recopier et compléter le graphe ci-contre par des probabilités le long des flèches.



A l'aide d'un arbre pondéré

On suppose que l'indécis part de A. Réaliser un arbre des probabilités pour une marche en trois étapes. Calculer les probabilités que l'indécis soit en A, en B, en C en trois étapes ?

Pour répondre à la problématique, il faudrait construire à nouveau deux arbres semblables au premier, selon que l'indécis part de B, ou de C… Cette démarche, vite fastidieuse, trouve ici ses limites… L'utilisation des matrices va nous permettre de résoudre ce problème plus rapidement.

A l'aide d'une matrice

On introduit une matrice T, à 3 lignes et 3 colonnes, appelée matrice de transition, formée par les probabilités de passage en une étape de A, B ou C à A, B ou C comme indiqué ci-dessous :

$$T=\begin{pmatrix} p(A\to A) & p(A\to B) & p(A\to C) \\ p(B\to A) & p(B\to B) & p(B\to C) \\ p(C\to A) & p(C\to B) & p(C\to C) \end{pmatrix}$$

Ecrire la matrice T avec tous ses coefficients. Quelle remarque peut-on faire sur la somme des coefficients d'une ligne de la matrice de transition ? Calculer T^3. Quelles probabilités reconnaît-on dans les coefficients de la première ligne de cette matrice ? A quoi correspondent les coefficients de la seconde ligne, de la troisième ligne ?

Réponse à la problématique

A la fin d'une marche aléatoire en trois étapes, chez quel ami Monsieur l'indécis aurait-il le plus de chance terminer sa marche s'il est parti de A ? Et s'il est parti de B ? Et s'il est parti de C ?

Flotte de caddies

Un supermarché dispose sur son parking de 3 points d'attache des caddies : le point (1), le point (2) et le point (3). On suppose qu'à la fermeture du magasin chaque caddie se trouve attaché à l'un des points (1), (2) ou (3).

	1	2	3
1	0,3	0,3	0,4
2	0,4	0,4	0,2
3	0,5	0,3	0,2

Pour i et j dans {1 ;2 ;3} on note p_{ij} la probabilité conditionnelle qu'un caddie attaché au point (i) soit, le lendemain, attaché au point (j). Les valeurs des p_{ij} sont supposées connues et données par le tableau proposé ci-dessus.

Les pérégrinations d'un caddie

On s'intéresse à un caddie donné qui, ce lundi soir, est attaché au point (1). Quelles sont les probabilités qu'il soit attaché mercredi soir, à chacun des points (1), (2) et (3) ? Utilisez un arbre.

Dans cette question, on suppose connues les probabilités x_1, x_2 et x_3 qu'un caddie soit attaché un soir donné aux points (1), (2) et (3). On s'intéresse aux probabilités d'attache, le lendemain, aux points (1), (2) et (3) que l'on note y_1, y_2 et y_3.

Montrer que $y_1 = 0,3x_1 + 0,4x_2 + 0,5x_3$. Donner une formule analogue pour y_2 et pour y_3. En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ déterminer la matrice T telle que les trois relations précédentes se traduisent par $Y = X \times T$. Que représentent les coefficients de chaque ligne de la matrice T ? Que peut-on dire de leur somme ?

On s'intéresse à nouveau au caddie qui, ce lundi soir, est attaché au point (1). Calculer la probabilité que ce caddie se retrouve à son point d'attache (1) le mercredi soir. Calculer T^2. Comparer son coefficient première ligne et première colonne avec la probabilité calculée auparavant. Comment peut-on interpréter chaque coefficient de la matrice T^2.

On rappelle que la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ donne l'état probabiliste de la situation un soir donné. On considère la matrice $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ tel que $Z = X \times T^2$. Quel état probabiliste de la situation nous donne cette matrice $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$?

L'état de la flotte de caddies

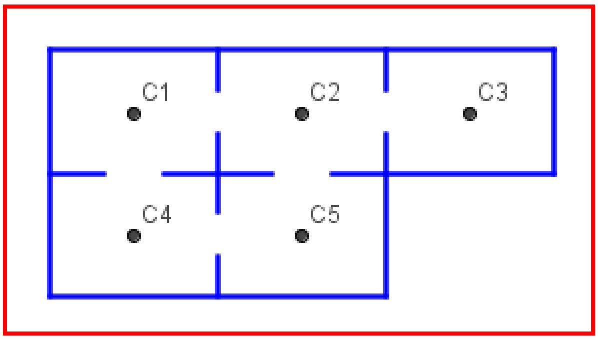
On suppose que le supermarché dispose d'une flotte de 1000 caddies. La répartition organisée le dimanche soir est de 100 caddies au point (1), 700 caddies au point (2) et 200 caddies au point (3). On souhaite connaître l'état de la flotte le vendredi soir.

Déterminer la matrice $D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$ associée à l'état probabiliste du dimanche soir. Exprimer la matrice $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ associé à l'état probabiliste du vendredi soir.

Avec une calculatrice ou un logiciel, déterminer l'état de répartition probabiliste des caddies le vendredi soir. Peut-on déterminer le nombre de caddies en chaque point le vendredi soir ?

Une histoire de labyrinthe

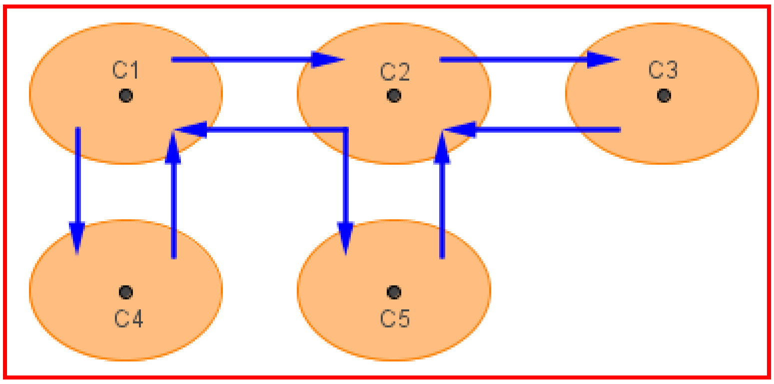
Une souris est lâchée dans le labyrinthe ci-contre. Elle se déplace en changeant de compartiment et pour un déplacement donné, on note n le nombre de franchissements de porte qu'elle a effectué depuis son point de départ. Pour changer de compartiment, on considère que la souris choisit sa porte au hasard parmi celles qui lui sont accessibles, in dépendamment de son parcours antérieur.



Comment prévoir les probabilités de position après quelques changements de compartiment ?

Graphe probabiliste et matrice de transition

On souhaite représenter la situation par un graphe probabiliste. Pour cela vous reproduirez et compléterez le schéma proposé ci-contre.



Déterminer ensuite la matrice de transition T associée au graphe probabiliste.

Puissance quatrième et interprétation

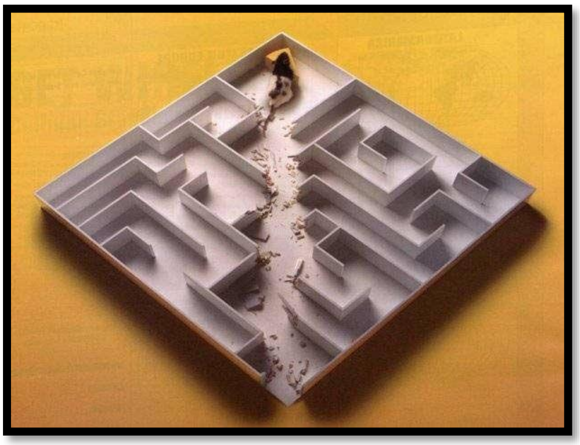
Calculer T^4. On suppose qu'au départ la souris est lâchée dans le compartiment C1. Quelles sont les probabilités qu'à l'issue des quatre étapes elle se situe dans les compartiments C1, C2, C3, C4 et C5. Même question si la souris est lâchée au départ dans le compartiment C4. Est-il possible qu'elle rejoigne, en exactement 4 étapes, le compartiment 5 ?

Un exemple d'état probabiliste stable

La souris est maintenant lâchée au départ de façon aléatoire dans un des 5 compartiments.

K	1	2	3	4	5
P(X=k)	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2

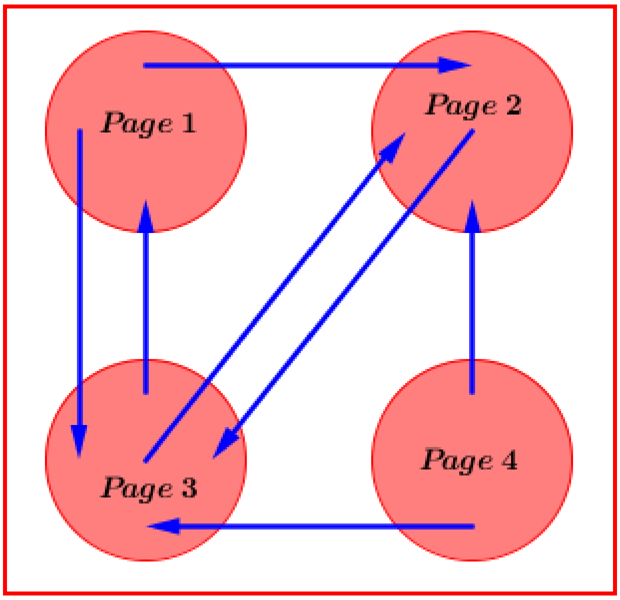
On note X la variable aléatoire qui désigne le numéro de compartiment de départ. On suppose que la loi de probabilité de X est donnée par le tableau proposé ci-dessus.



On note V_0 la matrice ligne définie par $V = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$. Calculer le produit $V_0 \times T$. Quelle remarque faîtes-vous ?

Donner la probabilité de présence de la souris dans chaque compartiment après 2023 étapes.

Mise en place d'un mini-réseau intranet



Une entreprise expérimente la mise en place d'un mini-réseau intranet pour son personnel. Pour l'instant, le réseau ne donne accès qu'à 4 pages numérotées (1), (2), (3) et (4). Ces pages comportent un ou plusieurs liens qui pointent chacun vers l'une des autres pages. L'organisation de cette « toile » miniature peut être visualisée sur le schéma proposé ci-contre.

Comprendre le schéma et émettre une conjecture

Un employé entre sur le réseau par la page (4). Sur quelle(s) page(s) peut-il se rendre en un seul clic ? En exactement deux clics ? Peut-il repasser par la page (4) lors de sa navigation sur le réseau ?

Dans quel ordre rangeriez-vous ces quatre pages, par ordre décroissant de fréquentation ?

Graphe probabiliste et matrice de transition

On suppose dorénavant qu'un employé « distrait » explore le réseau au hasard : une fois qu'il est entré par l'une des pages, il clique au hasard sur un des liens figurant sur cette page et il continue sa navigation de la sorte sans se préoccuper de son parcours antérieur. Reproduire et compléter le graphe probabiliste proposé ci-dessus. Ecrire la matrice de transition T associée à ce graphe probabiliste. A l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, calculer T^3, T^4, T^8. En déduire les probabilités qu'un employé « distrait » se rende en cliquant au hasard : de la page (2) à la page (3) en trois clics ? de la page (3) à la page (4) en quatre clics ? de la page (4) à la page (3) en huit clics ?

Mise en place d'une variable aléatoire

On note Y_n la variable aléatoire qui représente la page sur laquelle l'employé se trouve après n clics et X_n la matrice ligne représentant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_n, c'est-à-dire : $X_n = \begin{pmatrix} p(Y_n=1) & p(Y_n=2) & p(Y_n=3) & p(Y_n=4) \end{pmatrix}$. Justifier que $X_{n+1} = X_n \times T$. Exprimer X_n en fonction de X_0, de T et de n. Justifier votre réponse. Calculer X_8 lorsque $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis lorsque $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis lorsque $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis lorsque $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les probabilités d'atteindre chacune des 4 pages dépendent-elles fortement de la page par laquelle l'employé est entré sur le réseau ?

Remise en cause de la conjecture

Calculer T^{15}, T^{20} et T^{50}. Qu'observe-t-on ? Vérifier que quelle que soit la matrice ligne X_0, la matrice ligne X_n semble se stabiliser quand n devient grand autour de $X = \begin{pmatrix} 2/9 & 1/3 & 4/9 & 0 \end{pmatrix}$ Quel classement, dans l'ordre décroissant des indices de pertinence, obtient-on pour ces quatre pages du mini-réseau intranet ? Reprendre et critiquer si nécessaire la conjecture émise au départ.

Eviter les bouchons

Max va tous les jours à son travail en empruntant le chemin A ou le chemin B. S'il y a des encombrements sur son trajet, il change d'itinéraire le lendemain. La probabilité d'encombrements est égale à $1/4$ sur le trajet A et à $1/2$ sur le trajet B. Peut-on prévoir comment évoluera son trajet dans un grand nombre de jours.

Un graphe probabiliste

Représenter le graphe probabiliste associé à cette situation et écrire la matrice de transition M associée. Soit P_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste du choix d'itinéraire de Max le nième jour ($n \geq 1$). On a donc $P_n = \begin{pmatrix} p_n & 1-p_n \end{pmatrix}$, où p_n est la probabilité que Max choisisse le trajet A le nième jour. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n, puis P_n en fonction de P_1.

Calcul de M puissance n

On considère les deux matrices colonnes $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $MV = \lambda V$ et $MW = \mu W$ où λ et μ sont deux réels à préciser. Soit P la matrice carrée de première colonne V et deuxième colonne W et $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et préciser P^{-1}.

En déduire le calcul de PDP^{-1}. Que constate-t-on ? En déduire le calcul de M^2 puis de M^3. Démontrer par récurrence que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \geq 1$. En déduire les coefficients de M^n en fonction de n.

Retour au problème

On suppose que le premier jour, Max choisit A ou B de manière équiprobable. Donner la matrice P_1 et en déduire la matrice P_n. Montrer que P_n tend vers une matrice L quand n tend vers l'infini et que $LM = L$. Ceci est-il encore vrai si on change l'état initial ?

Diagonalisation d'une matrice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Montrer que $AV = \lambda V$ et $AW = \mu W$ où λ et μ sont deux réels à préciser. Soit P la matrice carrée de première colonne V et deuxième colonne W et $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Vérifier que P est inversible et préciser P^{-1}. En déduire le calcul de PDP^{-1}. Que constate-t-on ? En déduire les coefficients de M^n en fonction de n.

Campagne de communication

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit nommés respectivement Aurore et Boréale. Pour mesurer l'efficacité des campagnes publicitaires, on interroge chaque semaine les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.

Au début de la campagne, 20% des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale. Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10% des personnes préférant Aurore et 15% des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.

La semaine du début de la campagne est notée semaine 0. Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Boréale la semaine n.

Déterminer la matrice ligne $P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix}$ de l'état probabiliste de l'état probabiliste initial. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, A pour Aurore et B pour Boréale. Ecrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets. Montrer que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$. Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de P_0 et de n

On cherche λ réel tel qu'il existe une matrice non nulle $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telle que $MV = \lambda V$. Justifier que $M - \lambda \times Id$ ne doit pas être inversible. En déduire les valeurs λ_1 et λ_2 possibles pour λ. Déterminer deux matrices colonnes V_1 et V_2 non proportionnelles telles que $MV_1 = \lambda_1 V_1$ et $MV_2 = \lambda_2 V_2$. En déduire une matrice carrée P et une matrice diagonale D telle que $M = PDP^{-1}$.

En déduire que $M^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n & \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n & \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}$. Déterminer la limite M_∞.de la suite M^n lorsque n tend vers $+\infty$. Déterminer l'état limite P_∞, limite de P_n lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que $P_\infty M = P_\infty$. Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ?

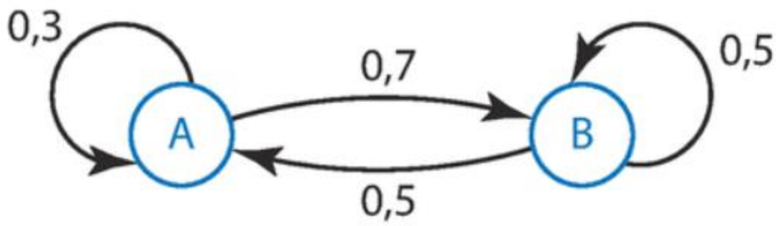
Diagonalisation d'une matrice

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. On cherche λ réel tel qu'il existe une matrice non nulle $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telle que $AV = \lambda V$. Justifier que $A - \lambda \times Id$ ne doit pas être inversible. En déduire les valeurs λ_1 et λ_2 possibles pour λ. Déterminer deux matrices colonnes V_1 et V_2 non proportionnelles telles que $AV_1 = \lambda_1 V_1$ et $AV_2 = \lambda_2 V_2$. En déduire une matrice carrée P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$. En déduire l'expressions des coefficients de la matrice A^n en fonction de n.

Pour revoir les matrices de transition

Partie A

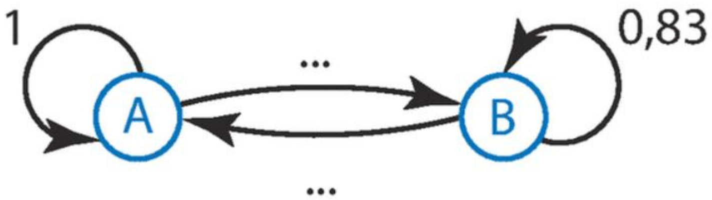
On propose ci-contre un graphe probabiliste entre deux états A et B. On appelle Q la matrice de transition associée.



1. Déterminer la matrice de transition de format (2 ;2) associée au graphe probabiliste.

Partie B

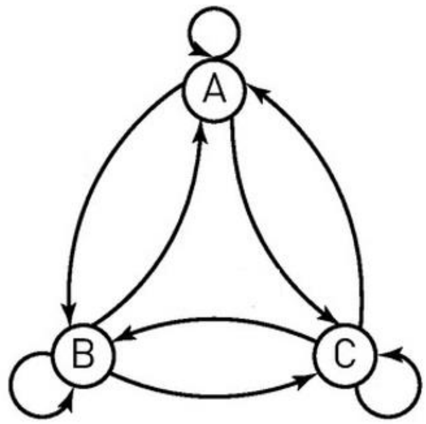
2. Compléter le graphe probabiliste incomplet ci-contre et proposer la matrice de transition associée.



Partie C

On propose ci-dessous la matrice de transition entre trois états A, B et C. On propose ci-contre le graphe probabiliste correspondant.

$$Q = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}$$



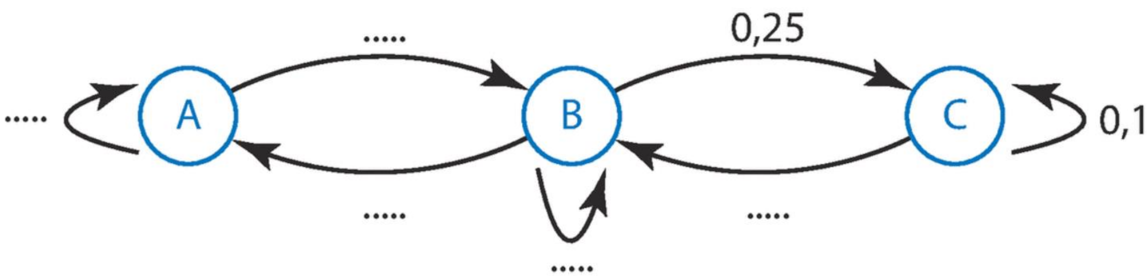
3. Compéter le graphe probabiliste à partir de la matrice de transition.

Partie D

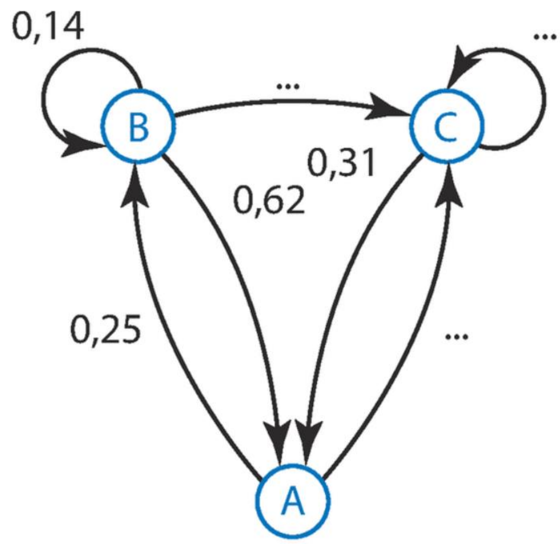
On propose ci-contre une matrice de transition (incomplète) entre trois états A, B et C. On propose ci-dessous le graphe probabiliste (incomplet lui aussi) associée à la matrice.

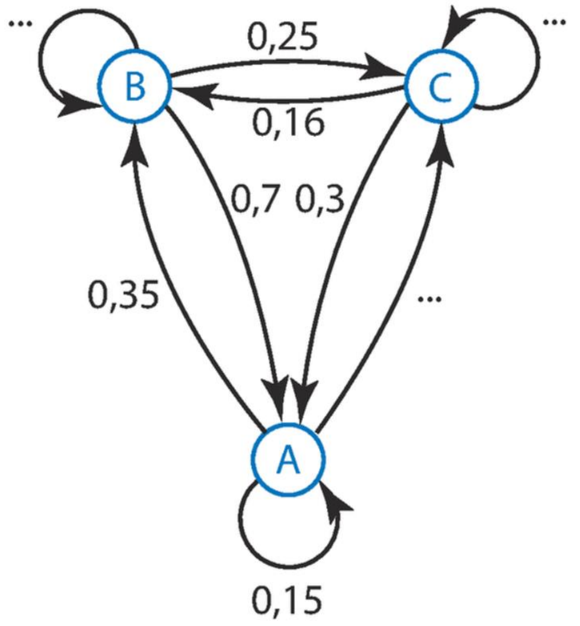
$$Q = \begin{pmatrix} \dots & 0,4 & \dots \\ \dots & 0,2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

4. Compléter la matrice <u>et</u> le graphe.



Partie E – Facultatif



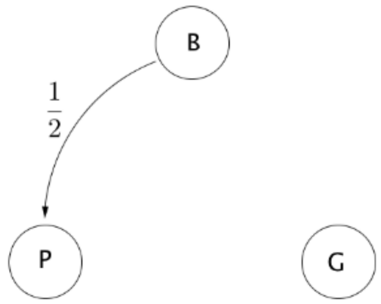


5. Compléter les deux graphes probabilistes et proposer les matrices de transition associées.

Pour prévoir le temps qu'il fera dans deux jours

Au Pays Maudit, la météo est assez simple : soit il fait beau (état noté B), soit il pleut (état noté P), soit il grêle (état noté G). Le temps passe d'un état à un autre en respectant les règles suivantes :

- S'il fait beau un jour, il ne fera pas beau le lendemain et il y a autant de chances qu'il pleuve ou qu'il grêle.
- S'il pleut (respectivement s'il grêle), il y a une chance sur deux qu'il fasse le même temps, une chance sur quatre qu'il fasse beau et une chance sur quatre qu'il grêle (respectivement qu'il pleuve) le lendemain.



1. Recopier et compléter le graphe probabiliste ci-contre.
2. Proposer la matrice de transition de format (3 ;3) associée à ce graphe probabiliste. On écrira les coefficients de la matrice en respectant l'ordre suivant : B, P, G.

On note $J_n = \begin{pmatrix} b_n & p_n & g_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste du temps au jour n.

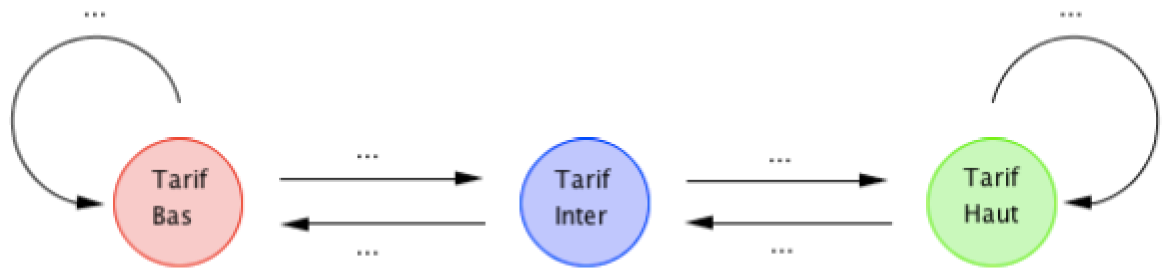
3. Aujourd'hui il fait beau, prévoir par un calcul matriciel simple que vous mentionnerez sur votre copie et effectuerez à l'aide de la calculatrice l'état probabiliste du surlendemain.
4. Aujourd'hui il pleut, prévoir par un calcul matriciel simple que vous mentionnerez sur votre copie et effectuerez à l'aide de la calculatrice l'état probabiliste du surlendemain.
5. Aujourd'hui il grêle, prévoir par un calcul matriciel simple que vous mentionnerez sur votre copie et effectuerez à l'aide de la calculatrice l'état probabiliste du surlendemain.

Pour prévoir le tarif de son assurance automobile

Une assurance automobile propose à ses clients un contrat dont les tarifs dépendent des accidents déclarés « responsables ». Il existe trois catégories de tarifs : Bas (état B), Intermédiaire (état I) et Haut (état H). La réglementation est la suivante :

- La première année, l'assuré paie le tarif Intermédiaire,
- Sans accident déclaré pendant une année, il passe au tarif inférieur (sauf dans le cas où il est déjà au tarif le plus bas puisque dans ce cas il y reste),
- Si l'assuré déclare au moins un accident responsable durant une année, il passe au tarif supérieur (sauf dans le cas où il est déjà au tarif le plus haut puisque dans ce cas il y reste).

Une étude récente réalisée par l'assurance montre qu'un assuré pris au hasard a une probabilité de 10% d'être responsable d'au moins un accident au cours d'une année.

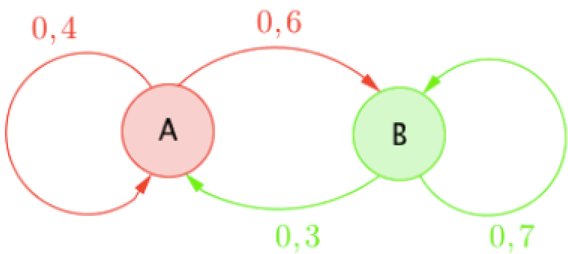


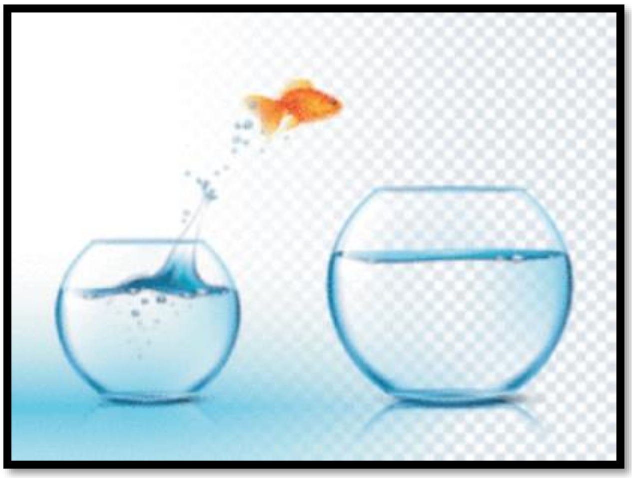
1. Le graphe probabiliste proposé ci-dessus traduit l'évolution du tarif payé par un assuré. Recopier et compléter ce graphe par les probabilités de passer d'un tarif à l'autre.
2. Proposer la matrice de transition de format (3 ;3) associée à ce graphe probabiliste. On écrira les coefficients de la matrice en respectant l'ordre suivant : B, I, H.

On note $A_n = \begin{pmatrix} b_n & i_n & h_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste du tarif d'un assuré l'année n.

3. Cette année l'assuré paye le tarif le plus Bas, prévoir par un calcul matriciel simple que vous mentionnerez sur votre copie et effectuerez à l'aide de la calculatrice l'état probabiliste du tarif de cet assuré <u>dans trois ans</u>. Arrondir au centième près.
4. Cette année l'assuré paye le tarif Intermédiaire, prévoir par un calcul matriciel simple que vous mentionnerez sur votre copie et effectuerez à l'aide de la calculatrice l'état probabiliste du tarif de cet assuré <u>dans trois ans</u>. Arrondir au centième près.
5. Cette année l'assuré paye le tarif le plus Haut, prévoir par un calcul matriciel simple que vous mentionnerez sur votre copie et effectuerez à l'aide de la calculatrice l'état probabiliste du tarif de cet assuré <u>dans trois ans</u>. Arrondir au centième près.
6. On note $A_\infty = \begin{pmatrix} \frac{81}{91} & \frac{9}{91} & \frac{1}{91} \end{pmatrix}$ l'état probabiliste limite du tarif quand n devient grand. Expliquer à l'aide d'un calcul matriciel simple que vous mentionner sur votre copie et effectuerez à l'aide de la calculatrice pourquoi cet état probabiliste est appelé état stable…

Pour prévoir où se situera le poisson





Un poisson peut se trouver soit dans l'aquarium A soit dans l'aquarium B. Il passe de l'un à l'autre en sautant selon les règles :

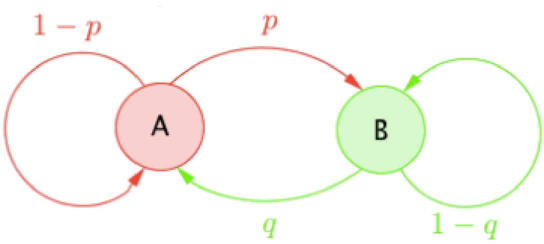
- S'il est dans l'aquarium A, il saute dans l'aquarium B six fois sur dix,
- S'il est dans l'aquarium B, il saute dans l'aquarium A trois fois sur dix.

On appelle T la matrice de transition de format (2 ;2) correspondant au graphe probabiliste.

On considère les matrices $P=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0{,}1\end{pmatrix}$ et on admet que $T=P\times D\times P^{-1}$.

1. A l'aide des informations proposées ci-dessus, exprimer en fonction de n la matrice T^n.
2. A l'étape $n=0$, on sait que le poisson est dans l'aquarium A et on appelle $E_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ l'état probabiliste au bout de n sauts. On a donc $E_0=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$ et $E_n=E_0\times T^n$. A l'aide des informations et du résultat de la question précédente, exprimer E_n en fonction de n.
3. On note E_∞ l'état probabiliste limite quand n devient grand. Déterminer E_∞. Interpréter ce résultat et vérifier si cet état probabiliste peut être qualifié de stable.

Pour généraliser la réflexion sur un graphe à deux états



$$Q=\begin{pmatrix}1-p & p\\ q & 1-q\end{pmatrix}$$

Le graphe probabiliste et la matrice de transition proposés ci-dessus modélisent et généralisent une chaine de Markov à deux états où p et q sont deux réels compris entre 0 et 1 donnant respectivement la probabilité de passer de l'état A à l'état B et celle de passer de l'état B à l'état A.

Montrer que dans une situation de ce type l'état probabiliste $\begin{pmatrix}\dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q}\end{pmatrix}$ est un état stable.