

Le calcul intégral

Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive

Soient f une fonction continue sur I et a et b deux réels appartenant à I :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur I .

Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I et soient a et b deux réels appartenant à I .

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Calculer une intégrale à l'aide de propriétés

Soient f une fonction continue sur I ; a, b et c trois réels appartenant à I et λ un réel.

- $\int_a^a f(x) dx = 0$

- $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$

- **Relation de Chasles :**

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

- **Linéarité :**

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

- **Positivité :**

si $f \geq 0$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

- **Ordre :**

si $f \leq g$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$.

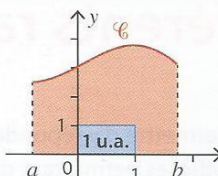
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx$.

Le calcul des aires

Calculer des aires

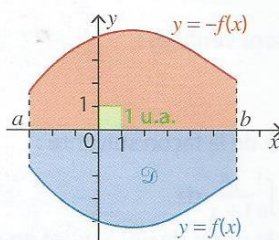
- f continue et positive sur $[a ; b]$.

L'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b f(x) dx$.



- f continue et négative $[a ; b]$.

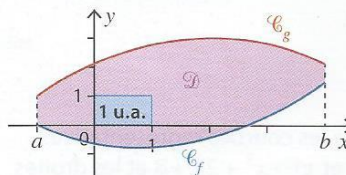
L'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b (-f(x)) dx$.



- $g \geq f$ sur $[a ; b]$.

L'aire du domaine délimité par les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

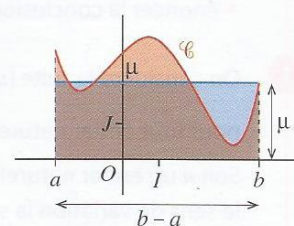
$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$



Calculer la valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a ; b]$ ($a < b$). On appelle **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $[a ; b]$ le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$



Si $f \geq 0$, l'aire du rectangle bleu est égale à $\mu(b-a) = \int_a^b f(x) dx$.