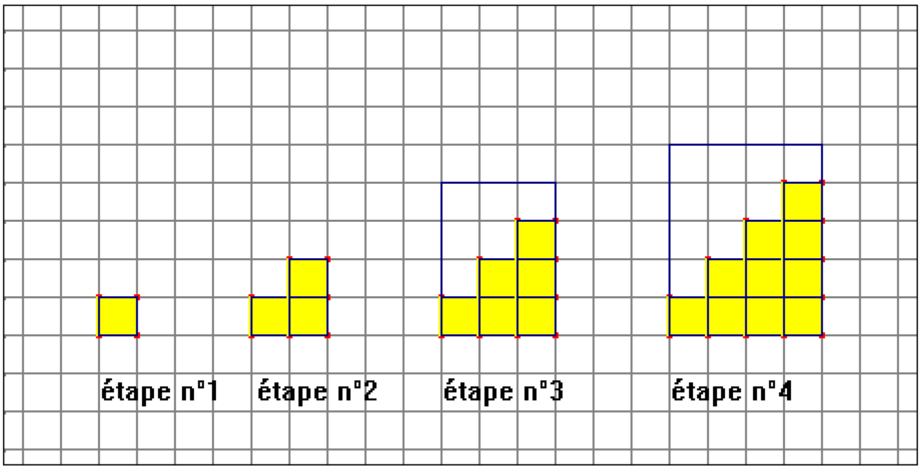
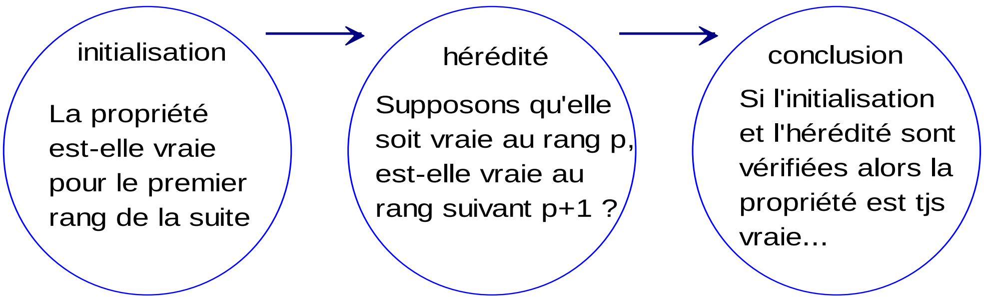
Nous définissons une **suite numérique** de la manière suivante :
« A chaque étape n, on associe, u_n le nombre de carrés nécessaires à la fabrication de l'escalier. »



Déterminer les nombres u_1, u_2, u_3, u_4, u_5. Que pensez-vous de l'affirmation $u_n = \dfrac{n \times (n+1)}{2}$?

Axiome de récurrence

Si une propriété est vraie au **premier rang** et s'il est prouvé que **lorsqu'elle est vraie** au rang p **elle est vraie aussi** au rang **suivant** $p+1$, alors elle est **toujours vraie**, quelque soit le rang.



Raisonnement par récurrence

Démontrons par récurrence que la relation $u_n = \dfrac{n \times (n+1)}{2}$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

1. Initialisation
   La propriété est-elle vraie pour $n = 1$?

2. Hérédité

   Supposons que la propriété $u_p = \dfrac{p(p+1)}{2}$ soit vraie, est-elle est vraie au rang $p+1$?

3. Conclusion
   Conclure à l'aide de l'axiome de récurrence.

Principe du raisonnement par récurrence

C'est au mathématicien italien **Giuseppe Peano** (1858 ; 1932) que l'on attribue le principe du raisonnement par récurrence. Le nom a été donné par Henri Poincaré (1854 ; 1912). On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. La règle veut que lorsqu'un domino tombe, il fasse tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file. Alors, si le premier domino tombe, on est assuré que tous les dominos de la file tombent aussi.

Exercice d'application 1

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous la forme irréductible.
2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n on a $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Exercice d'application 2

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3. On exprimera chacun de ces termes sous la forme irréductible.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $v_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Exercice d'application 3

On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} w_{n+1} = w_n + 2n + 3 \\ w_0 = 1 \end{cases}$.

1. Calculer w_1, w_2 et w_3.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n $w_n = (n+1)^2$.

Exercice d'application 4

On considère la suite définie pour tout entier naturel n par $z_{n+1} = z_n + 2n - 11$ et $z_0 = 0$. A l'aide d'un tableur, calculer et représenter les 20 premiers termes de la suite. Le nuage de points obtenu a-t-il une particularité ? Laquelle ? A l'aide des observations faîtes, conjecturer une formule explicite de la suite. Démontrer le résultat conjecturé à l'aide d'un raisonnement par récurrence…

Somme des entiers

On pose $\theta_n = 1+2+3+...+n$ avec $n \geq 1$ la somme des entiers consécutifs.

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ on a $\theta_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Somme des carrés

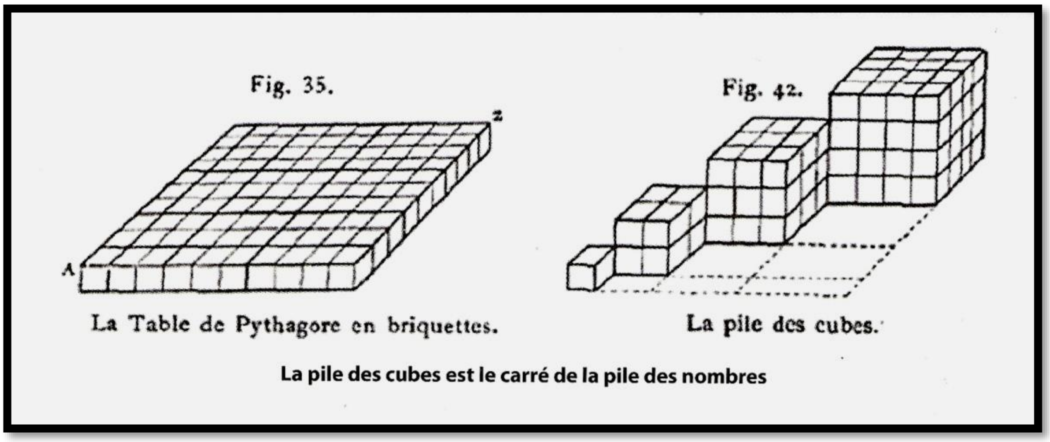
On pose $\sigma_n = 1^2+2^2+3^2+...+n^2$ avec $n \geq 1$ la somme des carrés des entiers consécutifs.

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ on a $\sigma_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Somme des cubes

On considère la suite S_n définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $S_n = 1^3+2^3+...+n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

On note T_n la somme des n premiers entiers naturels, c'est-à-dire $T_n = 1+2+...+n = \sum_{k=1}^{n} k$.



La pile des cubes est le carré de la pile des nombres

A l'aide d'un tableur, calculer les valeurs de T_n et de S_n pour $1 \leq n \leq 20$. L'ensemble des valeurs obtenues présente-t-il une particularité ? Laquelle ? En déduire une conjecture sur la formule explicite de S_n. Démontrer le résultat conjecturé à l'aide d'un raisonnement par récurrence…

L'inégalité de Bernoulli

Soit un nombre réel a strictement positif. Démontrer que pour tout n on a $(1+a)^n \geq 1+na$.

Attention l'initialisation est indispensable !

Démontrons par exemple que la propriété « 2^n est divisible par 3 » est héréditaire. Supposons qu'il existe un entier k tel que 2^k est divisible par 3. $2^{k+1} = 2^k \times 2 = 3p \times 2 = 6p$. Donc 2^{k+1} est divisible par 3. L'hérédité est vérifiée et pourtant la propriété n'est jamais vraie car non initialisée !

Exercice 1

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
   Compétence calculer.

2. Conjecturer une forme explicite pour u_n.
   Compétence modéliser.

3. Démontrer par récurrence la validité de la conjecture.
   Compétence raisonner.

Exercice 2

Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 10v_n - 9n - 8$.

1. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.
   Compétence calculer.

2. Conjecturer une forme explicite pour v_n.
   Compétence modéliser.

3. Démontrer par récurrence la validité de la conjecture.
   Compétence raisonner.

Exercice 3

Le principe de récurrence forte est le suivant :

> Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n. On suppose que :
> • $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
> • Pour un entier naturel $n \geqslant 1$ fixé, $P(n-1)$ et $P(n)$ vraies impliquent $P(n+1)$ vraie.
> Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

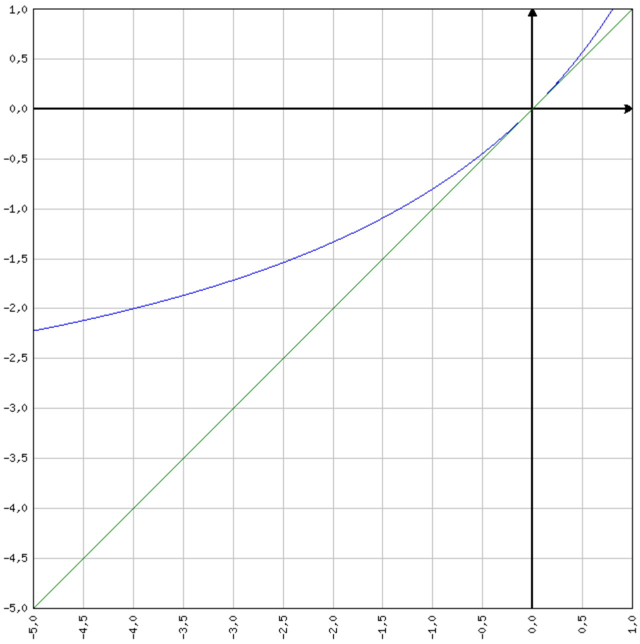
Soit (w_n) la suite numérique définie par $w_0 = 1$, $w_1 = 3$ et $w_{n+1} = 2 \times w_n - w_{n-1}$.

1. Calculer w_2, w_3, w_4 et w_5.
   Compétence calculer.

2. Démontrer par application du principe de récurrence forte que $w_n = 2n + 1$ pour tout n.
   Compétences raisonner et chercher.

Une suite définie par récurrence

On a tracé dans un repère la représentation graphique de $f(x)=\dfrac{4x}{4-x}$ et la droite d'équation $y=x$.



On considère la suite (u_n) définie par :

- $\begin{cases} u_0=-4 \\ u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{4-u_n} \end{cases}$

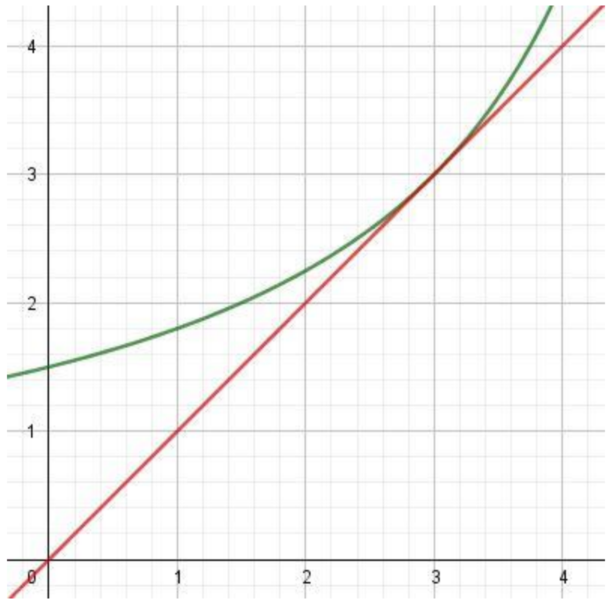
et la suite auxiliaire (v_n) définie par :

- $v_n=\dfrac{3u_n+2}{u_n}$.

1. Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les premiers termes u_0, u_1 et u_2.
2. Démontrer que (v_n) est **arithmétique**. Exprimer le terme général v_n en fonction de n. En déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Une suite définie par récurrence, encore…

On a tracé dans un repère la représentation graphique de $g(x)=\dfrac{9}{6-x}$ et la droite d'équation $y=x$.



On considère la suite (u_n) définie par :

- $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$

et la suite auxiliaire (v_n) définie par :

- $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n on a $0<u_n<3$ et que $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(3-u_n)^2}{6-u_n}$.

   Que peut-on en déduire pour la suite ?
2. Démontrer que (v_n) est **arithmétique**. Exprimer le terme général v_n en fonction de n. En déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Deux suites définies par récurrence

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $\boxed{\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4} \end{cases}}$ et $\boxed{\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + \frac{1}{4} \end{cases}}$.

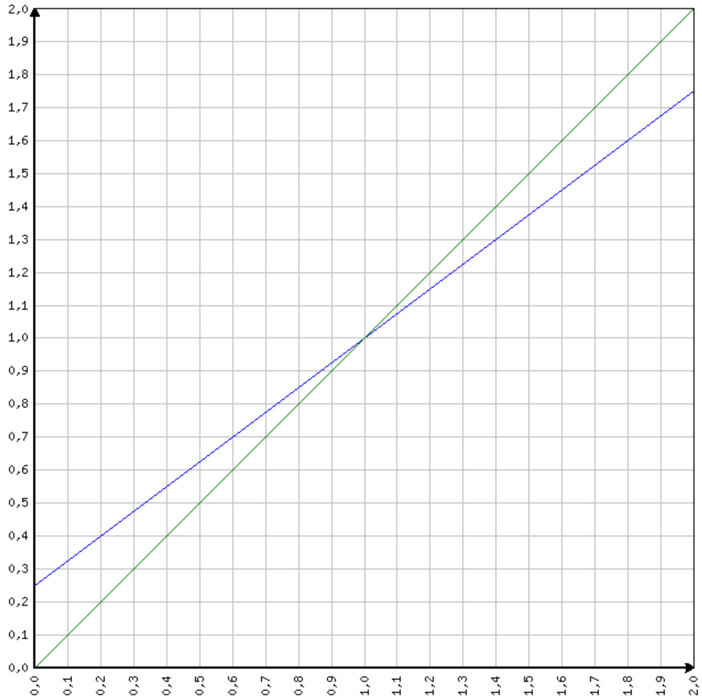
Premiers termes et représentation graphique

Calculer u_1, u_2 et u_3 d'une part et v_1, v_2 et v_3 d'autre part. Dans un repère construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et les points B_1, B_2, B_3 d'abscisses respectives v_1, v_2, v_3.

Deux suites auxiliaires

On considère la suite auxiliaire définie pour tout entier naturel n par $\boxed{s_n = u_n + v_n}$. Montrer par récurrence sur n que $s_n = 2$ quelque soit n.

On considère la suite auxiliaire définie pour tout entier naturel n par $\boxed{d_n = v_n - u_n}$. Démontrer que la suite (d_n) est **géométrique** et en déduire l'expression de d_n en fonction de n.



Expression du terme général

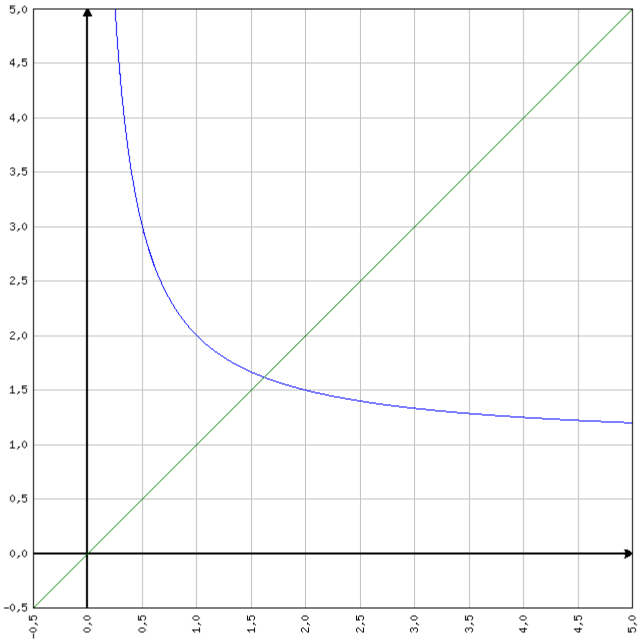
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, puis l'expression de v_n en fonction de n. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) **convergent** vers une limite unique.

Luci d'artista a Torino

« Una sequenza di numeri, logicamente combinata dal matematico Leonardo Fibonnacci, crea una lunga stricia di luci rosse che di note brilla sulla cupola della Mole Antoniellana. Un'installazione concettuale brillantissima. »

Une courbe et une droite

On considère la fonction f définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On a tracé dans un repère orthonormé la courbe (C) représentative de la fonction f ainsi que la droite (D) d'équation $y = x$. Résoudre algébriquement l'équation $1 + \frac{1}{x} = x$. On pourra se ramener à une équation du second degré. En déduire la valeur exacte de l'abscisse du point d'intersection de la courbe (C) et de la droite (D). Dans la suite de l'étude on notera ϕ cette valeur.



Une suite de nombres entiers

On considère la suite (v_n) définie pour par $\begin{cases} v_0 = v_1 = 1 \\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \end{cases}$. Déterminer les douze premiers termes de la suite.

Une suite de quotients

On considère la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Calculer les onze premiers termes. Démontrer que $w_{n+1} = 1 + \frac{1}{w_n}$.

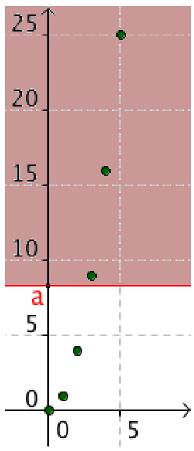
Représentation graphique

Représenter les premiers termes de la suite (w_n) puis conjecturer graphiquement son comportement asymptotique. Déterminer une valeur approchée du nombre ϕ.

Limite infinie d'une suite

Exemple

La suite définie par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$. En effet, les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on souhaite à partir d'un certain rang. Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit que la suite diverge vers $+\infty$.



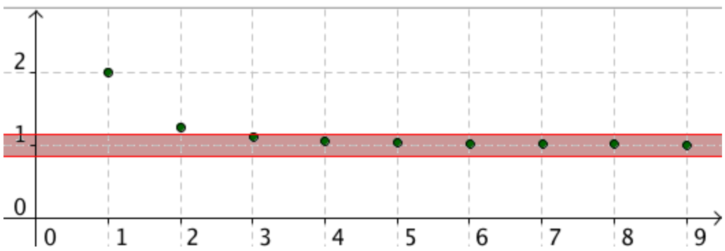
Définition et notation

La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]a;+\infty[$, a réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Limite finie d'une suite

Exemple

La suite par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ a pour limite 1. En effet, les termes de la suite se resserrent autour de la valeur 1 à partir d'un certain rang.

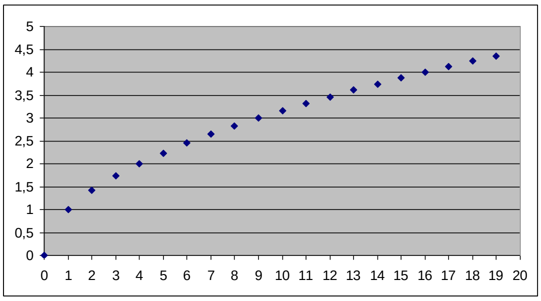


Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant la valeur 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang. On dit que la suite converge vers 1.

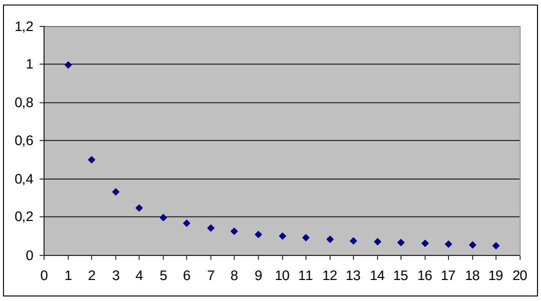
Définition et notation :

La suite (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$. Une telle suite est dite **convergente**. Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

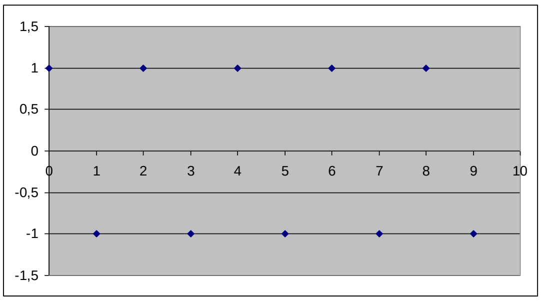
Comportement asymptotique d'une suite



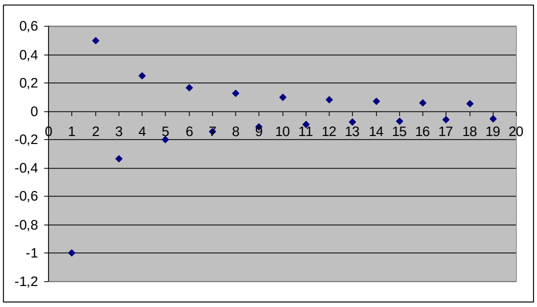
Suite 1



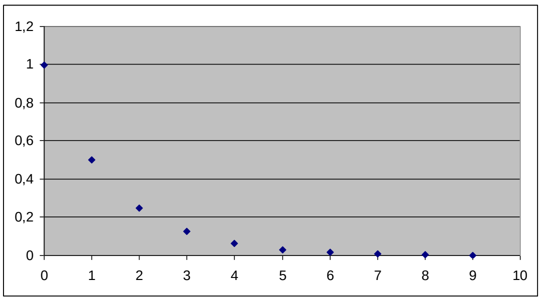
Suite 2



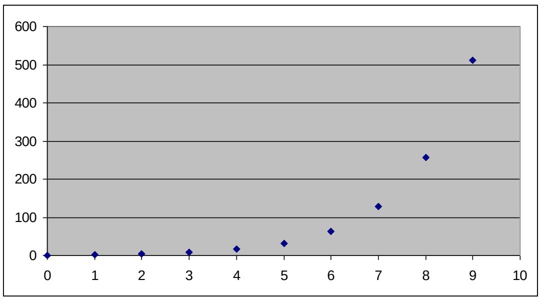
Suite 3



Suite 4



Suite 5



Suite 6

1. Pour chaque suite, déterminer à quelle expression du terme général elle correspond :

$$u_n = \sqrt{n} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad x_n = \frac{1}{n} \qquad y_n = (-1)^n \qquad z_n = 2^n$$

2. Pour chaque suite, déterminer si « la suite diverge » ou si « la suite converge ».

3. Pour chaque suite, déterminer quelle limite on peut lui attribuer.

4. Pour chaque suite, choisir l'une ou l'autre de ces affirmations : « la suite est croissante », « la suite est décroissante », « la suite est ni croissante, ni décroissante elle est alternée ».

Problématique

Connaissant le comportement asymptotique de deux suites (u_n) et (v_n), certaines questions naturelles se posent : quel est le comportement asymptotique de la **somme** des deux suites $\sigma_n = u_n + v_n$? Du **produit** des deux suites $\theta = u_n \times v_n$? Du **quotient** des deux suites $\omega_n = \frac{u_n}{v_n}$?

Les **théorèmes sur les limites** (à apprendre) apportent, dans certains cas, une réponse.
D'autres cas, appelés **cas d'indétermination** (à connaître) nécessitent une étude plus fine.

La somme

$\lim_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

Déterminer la limite des suites définies par $\alpha_n = 2 + \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n^2} - 1$, $\gamma_n = \sqrt{n} + n^2$ et $\delta_n = 3 - n^2$.

Le produit

$\lim_{n\to+\infty} u_n =$	L	L > 0	L < 0	L > 0	L < 0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) =$	L L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

Déterminer la limite des suites définies par $a_n = \alpha_n \times \beta_n$, $b_n = \beta_n \times \gamma_n$, $c_n = \gamma_n \times \delta_n$, $d_n = \beta_n \times \delta_n$

Le quotient

$\lim_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n < 0$	0 avec $v_n < 0$	0	L' > 0	L' < 0	L' > 0	L' < 0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Déterminer la limite des suites définies par $a_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$, $b_n = \frac{\alpha_n}{\gamma_n}$, $c_n = \frac{\alpha_n}{\delta_n}$, $d_n = \frac{\gamma_n}{\alpha_n}$, $e_n = \frac{\gamma_n}{\beta_n}$.

Lever une indétermination

On considère la suite définie par $u_n = n - n^2$.

Rappeler $\lim\limits_{n\to+\infty} n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2$. Conjecturer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

On considère la suite définie par $v_n = n^2 - n$.

Rappeler $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n$. Conjecturer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

- En déduire pourquoi il n'existe pas de théorème donnant le résultat du calcul $(\infty)-(\infty)$.

- Montrer que $u_n = -n^2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$
- Par application des règles sur le produit des limites, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

- Montrer que $v_n = n^2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$
- Par application des règles sur le produit des limites, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice d'application directe

Déterminer la limite de la suite définie par $w_n = n - 3\sqrt{n}$.

Lever un autre type d'indétermination

On considère la suite définie par $u_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$.

Rappeler $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1$. Rappeler $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+1$.

Conjecturer à l'aide d'un tableur $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On considère la suite définie par $v_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$.

Rappeler $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1$. Rappeler $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+1$.

Conjecturer à l'aide d'un tableur $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

- En déduire pourquoi il n'existe pas de théorème donnant le résultat du calcul $\dfrac{(\infty)}{(\infty)}$.

- Montrer que $u_n = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n^2}}$.
- Par application des règles sur le produit et quotient des limites, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

- Montrer que $v_n = n \times \dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}}$.
- Par application des règles sur le produit et quotient des limites, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercices d'application directe

- Conjecturer à l'aide d'un tableur puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+5}{4n+3}$.
- Conjecturer à l'aide d'un tableur puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n^2+2}$.
- Conjecturer à l'aide d'un tableur puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+3n}{5n+7}$.

Des calculs de limites

En utilisant les théorèmes sur les opérations, déterminer la limite de chacune des suites suivantes :

- La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 + 4n + 1$,
- La suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 3n^2 - 5n + 1$,
- La suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 6n - 5\sqrt{n}$.

Des calculs de limites, encore…

- La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -4n^3 - 2n^2 - 3n + 1$,
- La suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 5n^3 - 3n^2 + 4n + 2$,
- La suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 7\sqrt{n} - 8n$.

Des calculs de limites, toujours…

- La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n-2}{n+2}$,
- La suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{3}{n+4}$,
- La suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{2n^2 - 3n - 1}{5n + 4}$.

De la nécessité d'avoir l'expression du terme général

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + n + 1$. Conjecturer la limite de la suite à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n + 1$. Valider ou corriger la conjecture en effectuant un calcul de limite.

De la nécessité d'avoir l'expression du terme général, encore et toujours…

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{2 - v_n}$.

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_0 = 0$ $w_{n+1} = w_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$. Expliciter dans chaque cas le raisonnement mis en place.

Une quantité dite « conjuguée »

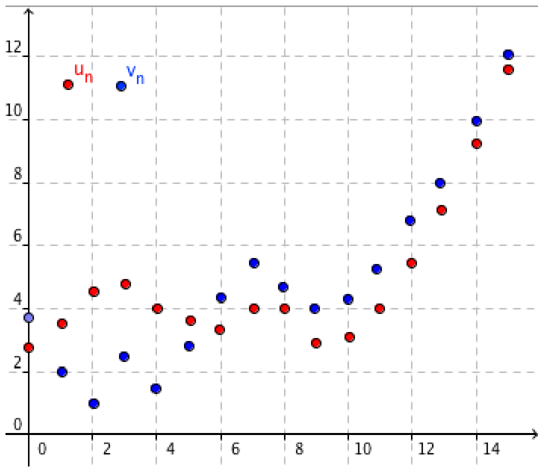
- Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$. Expliciter votre raisonnement.
- Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2-n}\right)$. Expliciter votre raisonnement.

Théorème de comparaison

Si les suites (u_n) et (v_n) vérifient les conditions :

- à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$,
- et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$,

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.



On peut dire que la suite (u_n) pousse la suite (v_n) vers $+\infty$ à partir d'un certain rang.

Démonstration

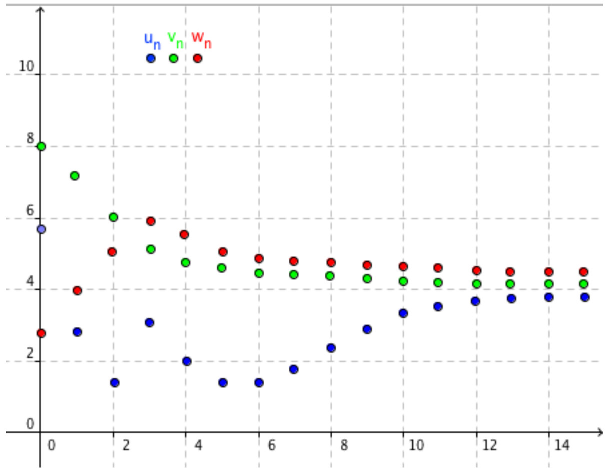
Proposer une démonstration du théorème de comparaison. Proposer une variante.

Théorème des gendarmes

Si les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifient les conditions suivantes :

- à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$,
- et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = L$,

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L$.



On peut dire que les deux suites (u_n) et (w_n) (les gendarmes) se resserrent autour de la suite (w_n) pour la « conduire » vers la même limite.

Démonstration

Proposer une démonstration du théorème des gendarmes.

Plusieurs exercices d'application directe

- Etudier la convergence de la suite définie par $u_n = n^2 + (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Etudier la convergence de la suite définie par $v_n = \sin(n) - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Etudier la convergence de la suite définie par $w_n = 2n - \cos(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Etudier la convergence de la suite définie par $x_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Etudier la convergence de la suite définie par $y_n = \dfrac{n + \sin(n)}{n^2 + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Etudier la convergence de la suite définie par $z_n = \dfrac{n + \cos(n)}{n - \sin(n)}$ pour $n \geq 1$.

Rappels sur les suites géométriques

On considère les suites définies par $u_n = q^n$ où q est un nombre réel quelconque. Le but est de récapituler dans le tableau suivant le comportement d'un tel type de suite en fonction des valeurs de q. La première ligne sera remplie avec les valeurs « 0 ; -1 ; 1 ; $-\infty$ et $+\infty$ ». La seconde ligne sera remplie avec les valeurs « 0 ; $+\infty$; pas une limite mais deux : $\pm\infty$ ». La troisième ligne sera remplie avec les qualificatifs « convergente ; divergente ». La quatrième ligne sera remplie avec les qualificatifs « croissante ; décroissante ; alternée »

q				
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$				
Comportement asymptotique				
Sens de variation				

Une démonstration à savoir faire

Démontrer que toute suite géométrique de raison strictement supérieure à 1 diverge vers $\pm\infty$.

Plusieurs exercices d'application directe

Déterminer la limite de chacune des suites proposées :

$u_n = 1000 \times 2^n$ $\quad v_n = 100 \times 0,9^n$ $\quad w_n = -3 \times \left(\sqrt{2}\right)^n$ $\quad z_n = 5 \times \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

$x_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + 2$ $\quad y_n = -3 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ $\quad s_n = 2^n - 3^n$ $\quad t_n = \dfrac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}$

Rappels (indisdpensables) de vocabulaire

- La suite (u_n) est **majorée** par M si et seulement si $u_n \le M$ pour tout n.
- La suite (u_n) est **minorée** par m si et seulement si $u_n \ge m$ pour tout n.
- Le suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée **et** minorée.
- La suite (u_n) est **croissante** si et seulement si $u_n \le u_{n+1}$ pour tout n.
- La suite (u_n) est **décroissante** si et seulement si $u_n \ge u_{n+1}$ pour tout n.
- On dit que la suite (u_n) est **monotone** lorsqu'elle elle est exclusivement croissante **ou** lorsqu'elle est exclusivement décroissante.

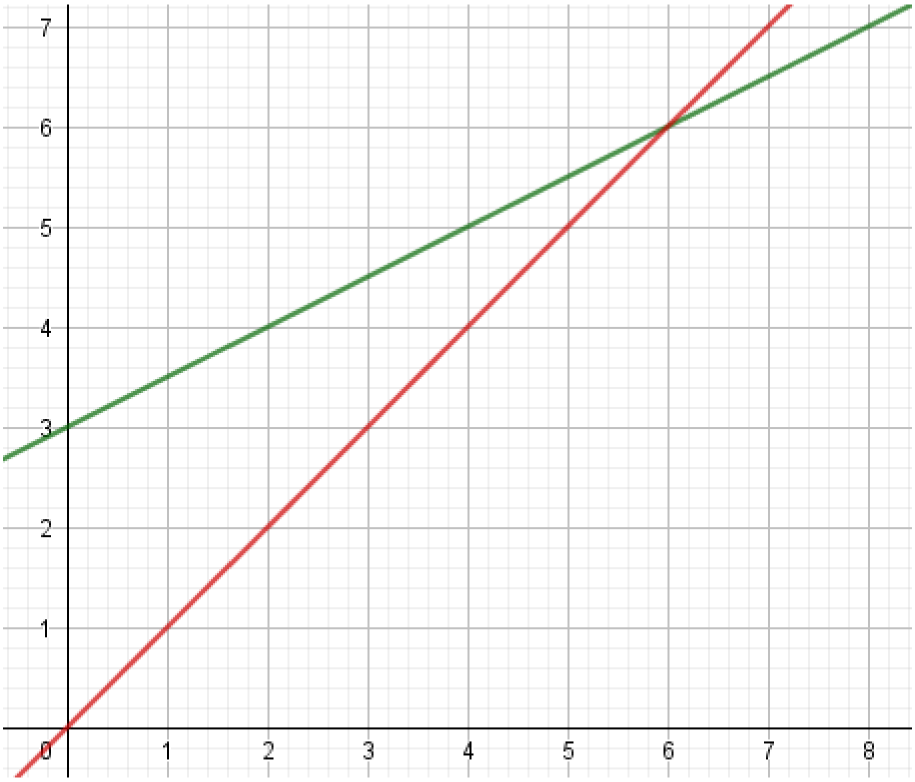
Théorèmes (admis) de convergence monotone

Si une suite est **croissante et majorée**, alors elle est **convergente**.
Si une suite est **décroissante et minorée**, alors elle est **convergente**.

Remarque : attention, les deux versions de ce théorème assurent l'existence de la limite l de la suite mais ne donnent pas la valeur de cette limite. Lorsque la suite est croissante est majorée la limite sera inférieure ou égale (mais pas forcément égale) au majorant. Lorsque la suite est décroissante et minorée la limite sera supérieure ou égale (mais pas forcément égale) au minorant.

Un premier exercice d'application directe

Démontrer que la suite définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ et $u_0 = 0$ est majorée par 6. Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. En déduire la monotonie et la convergence de cette suite. Quelle est sa limite ? Justifier.



Un deuxième exercice d'application directe

Démontrer que la suite défini par $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + 2$ et $v_0 = 6$ est minorée par 3. Etudier le signe de $v_{n+1} - v_n$. En déduire la monotonie et la convergence de cette suite. Quelle est sa limite ? Justifier.