Le principe de démonstration par récurrence

Démontrer par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ (en général, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$), on peut utiliser le **raisonnement par récurrence** :

1. Initialisation	**2. Hérédité**
On vérifie que $P(n_0)$ **est vraie.**	Hypothèse de récurrence : on considère un entier quelconque k tel que $k \geqslant n_0$ et on suppose que $P(k)$ est vraie. On démontre l'implication : « $P(k)$ **vraie** » $\Rightarrow$ « $P(k+1)$ **vraie** »

3. Conclusion

$P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Monotonie d'une suite / Suite majorée, suite minorée, suite bornée

Étudier la monotonie d'une suite

- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- Pour démontrer qu'une suite est croissante ou décroissante :
  – on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
  – si $u_n = f(n)$, on peut étudier le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.
  – si $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut démontrer par récurrence qu'une des propriétés $P(n)$: « $u_{n+1} \leqslant u_n$ » ou $P(n)$: « $u_{n+1} \geqslant u_n$ » est vraie pour tout entier naturel n.

Montrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée

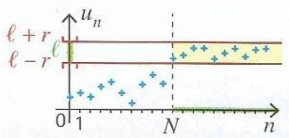
- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
  M est appelé un **majorant** de (u_n). Une suite majorée admet une infinité de majorants
- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.
  m est appelé un **minorant** de (u_n). Une suite minorée admet une infinité de minorants.
- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.
- Pour démontrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée, on raisonne parfois par récurrence.

Comportement asymptotique d'une suite

Suite convergente

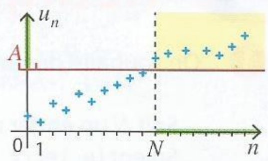
Soit ℓ un réel. (u_n) **converge vers** ℓ lorsque, pour tout $r > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| < r$.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$



Suite divergente

- (u_n) **diverge vers** $+\infty$ lorsque, pour tout réel A, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant A$.



$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

- (u_n) **diverge vers** $-\infty$ lorsque, pour tout réel A, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant A$.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

- Certaines suites n'admettent pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Détermination « par opération » du comportement asymptotique d'une suite

Étudier la convergence de suites de référence

- Soit un entier $k \geqslant 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

- Soit q un réel.

$q \leqslant -1$	(q^n) n'a pas de limite.
$-1 < q < 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
$q = 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
$q > 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Déterminer la limite d'une suite avec les opérations

Si...					
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞	0
alors...					
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	$+\infty$	$-\infty$	FI*	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	FI
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	FI	FI	FI	0	∞**

* forme indéterminée

** (v_n) de signe constant à partir d'un certain rang pour conclure.

Détermination « par comparaison » du comportement asymptotique d'une suite

Comparer pour étudier la convergence d'une suite

- Soit N un entier naturel. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell'$ et, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.
- **Théorème des gendarmes :**

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ et, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors (v_n) converge vers ℓ.

- Si (u_n) est une suite croissante qui converge vers ℓ, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$.
- Si (u_n) est une suite décroissante qui converge vers ℓ, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ell$.
- Si (u_n) est **croissante et majorée** par M, alors (u_n) **converge** et sa limite ℓ est telle que $\ell \leqslant M$.
- Si (u_n) est **décroissante et minorée** par m, alors (u_n) **converge** et sa limite ℓ est telle que $\ell \geqslant m$.