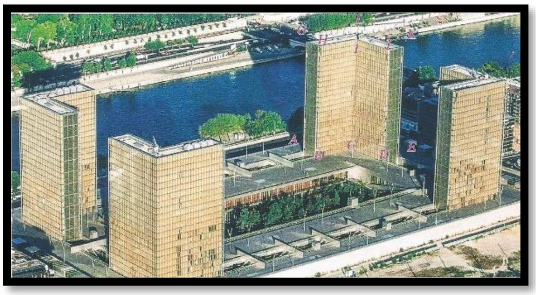
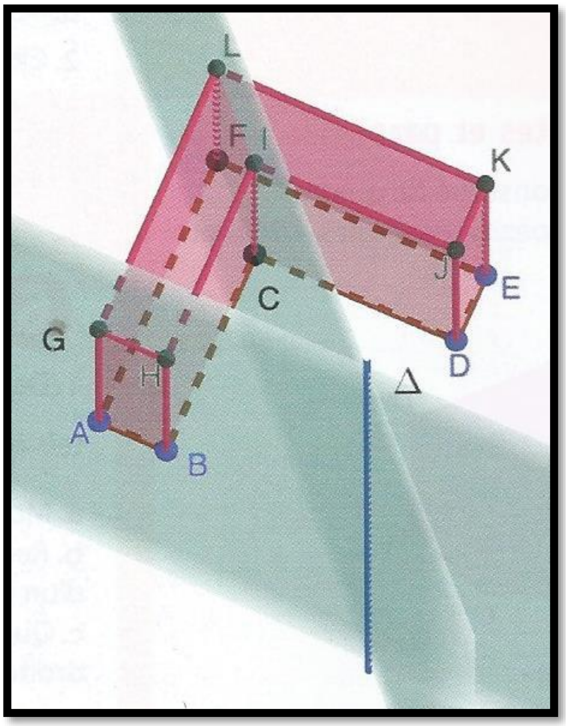
Colinéarité

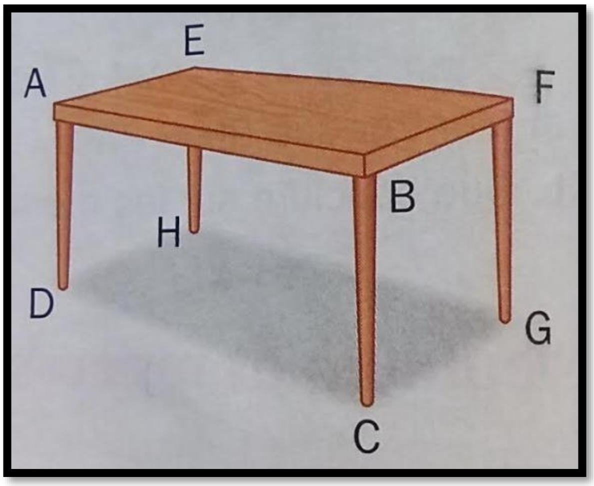




Le site François Mitterrand de la Bibliothèque nationale de France à Paris est constitué de quatre blocs identiques. Seriez-vous capable de faire un dessin en perspective cavalière de l'un des blocs de cette bibliothèque en rappelant et en respectant les règles de ce type de construction ? On notera ABCDEFGHIJKL ce bloc comme indiqué sur la photo ci-dessus et la perspective cavalière ci-contre. Donner cinq vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{AB}$. En déduire plusieurs couples de droites parallèles.

On admet que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FC}$ ne sont pas colinéaires. Que peut-on en dire des droites (AB) et (FC) ? Que peut-on dire des droites (GH) et (LI) ? Que peut-on dire des plan (FCI) et (HBG) ? Matérialiser l'intersection de ces deux plans sur votre dessin en perspective cavalière.

Coplanarité



Construire le pavé droit ABCDEFGH qui modélise la table à quatre pieds ci-contre. Les droites (DA), (HG) et (HF) sont-elles coplanaires ? Tracer les représentants d'origine D des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{HF}$. On appelle M, N et P les extrémités respectives de ces représentants d'origine D Les points D, M, N et P sont-ils coplanaires ? Les trois vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont-ils coplanaires ? Reprendre le raisonnement avec les trois vecteurs $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{EA}$ …

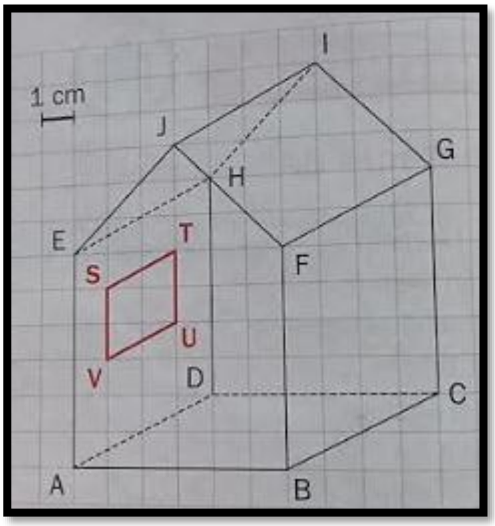
Proposer trois vecteurs non coplanaires de cette figure.

Que vous inspire les propos du chat ?

Relations vectorielles

Un architecte a représenté une maisonnette en perspective cavalière par le prisme droit à base pentagonale ABCDEFGHIJ proposé ci-dessous tel que BC=8 cm. Il souhaite y placer une porte et une fenêtre. Reproduire le prisme droit que l'on appellera « figure 1 ». Tracer en vraie grandeur la face BCGF que l'on appellera « figure 2 ».

Placer le point K tel que $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ dans un premier temps sur la « figure 2 » puis dans un deuxième temps sur la « figure 1 ».



Placer le point L tel que $\overrightarrow{BL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$ dans un premier temps sur la « figure 2 » puis dans un deuxième temps sur la « figure 1 ».

Placer le point M tel que $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$ dans un premier temps sur la « figure 2 » puis dans un deuxième temps sur la « figure 1 ».

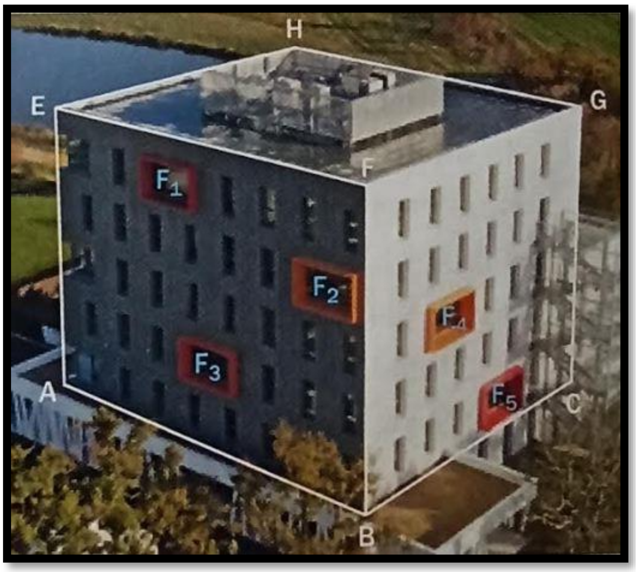
Dans la réalité, quelle est la nature du quadrilatère BLMK représentant la porte ainsi construit ?

Le client souhaite une fenêtre à l'emplacement matérialisé par le quadrilatère STUV. Recopier et compléter les relations vectorielles proposées ci-dessous qui ont permis à l'architecte de placer correctement les points S, T, U et V sur la face ADHE.

$\overrightarrow{AS}=\ldots$ $\overrightarrow{AT}=\ldots$ $\overrightarrow{AU}=\ldots$ $\overrightarrow{AV}=\ldots$

Relations vectorielles, encore…

On modélise l'immeuble ci-contre par un pavé droit ABCDEFGH et les fenêtres sont nommées F1, F2, F3, F4 et F5.



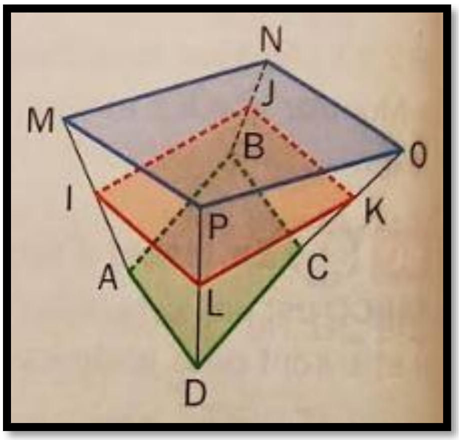
Indiquer (approximativement) dans quelle fenêtre se trouve le point M défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AE}$.

Indiquer (approximativement) dans quelle fenêtre se trouve le point N défini par la relation $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{EH}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BF}$.

Définir(approximativement) à l'aide d'une relation vectorielle la position des trois autres fenêtres.

Relation de Chasles, rappel…

ABCD et MNOP sont deux parallélogrammes dans l'espace. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AM], [BN], [CO] et [DP]. On s'interroge sur la nature du quadrilatère de l'espace IJKL



- Montrer que $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{IL}$.
- Montrer que $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{NO}=2\overrightarrow{JK}$.
- En déduire la nature de IJKL.

Caractérisation vectorielle d'une droite de l'espace

Définition : Soient A et B deux points distincts de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ où k est un réel quelconque. On dit que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Conséquence : Une droite de l'espace est définie par un point et un vecteur directeur.

Application directe : Soient M, N et P trois points de l'espace non alignés. On considère les points I et J tels que $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NJ}=3\overrightarrow{MP}-2\overrightarrow{MN}$. Faire une figure. Montrer que le point P appartient à la droite (IJ).

Caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace

Définition : Soient A, B et C trois points de l'espace non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ où x et y sont deux réels quelconques. On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC), on dit aussi que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ est une base du plan (ABC), on dit également que $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan (ABC).

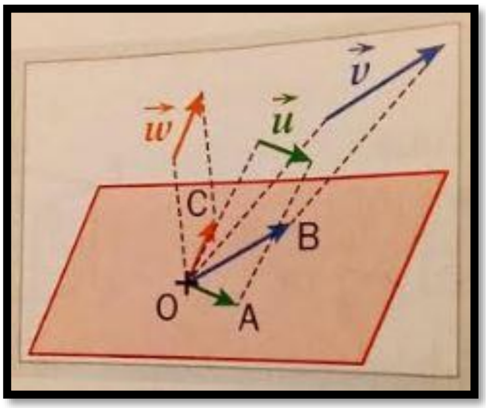
Conséquence : Un plan de l'espace est défini par un point et deux vecteurs non colinéaires.

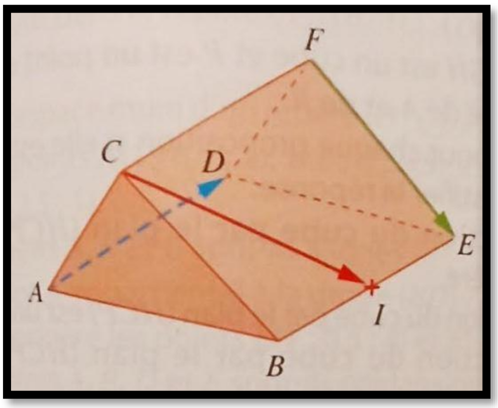
Application directe : On considère un tétraèdre ABCD. Soit M le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}$. Démontrer que le point M appartient au plan (ABC). Soit N le point de l'espace tel que $\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{NC}$. Démontrer que le point N appartient au plan (ABC).

Application non directe : O est un point fixe de l'espace. Un proton de masse m et de charge q se déplace dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$ de l'espace. On sait qu'à chaque instant t, la position du proton est représentée par le point M défini par $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\times\frac{q}{m}\times t^2\vec{E}+t\overrightarrow{V_0}$ où $\overrightarrow{V_0}$ est le vecteur vitesse initiale non colinéaire à $\vec{E}$. Où est-on sûr de trouver le proton ? Pourquoi ?

Vecteurs coplanaires

Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On considère les points O, A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits coplanaires si et seulement si les points O, A, B et C sont coplanaires (c'est-à-dire appartiennent à un même plan).



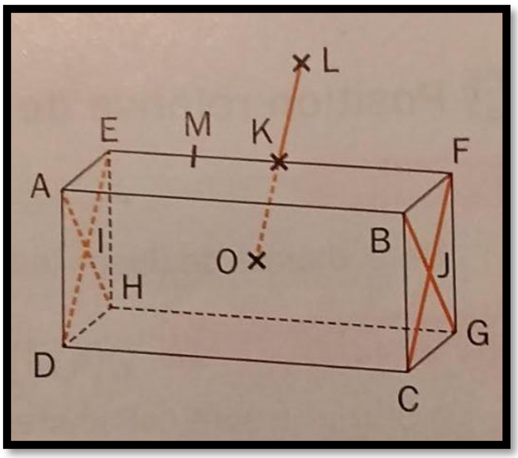


Application directe : Dans le prisme droit à base triangulaire ABCDEF proposé ci-dessus, le point I est le milieu du segment [BE]. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont coplanaires.

Propriété admise : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits coplanaires si et seulement si le vecteur $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (c'est-à-dire si et seulement si il existe deux nombres réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$).

Application directe :

ABCDEFGH est un pavé droit de centre O. Les points I et J sont les centres respectifs des faces AEHD et BFGC. Le point K est le milieu du segment [EF] et le point M est le milieu du segment [EK]. Le point L est le symétrique du point O par rapport à K. Montrer dans un premier temps que que I, M et L sont alignés. Dans un second temps on s'intéresse à la coplanarité des points C, I, L, J. Montrer que $\overrightarrow{CL} = 0,5\overrightarrow{CI} + 2,5\overrightarrow{CJ}$. Conclure.

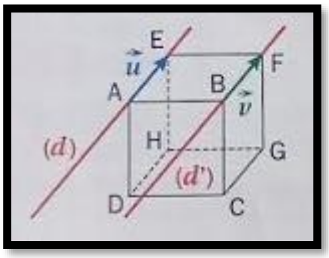
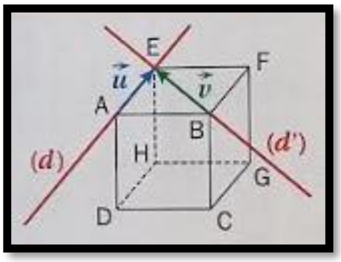
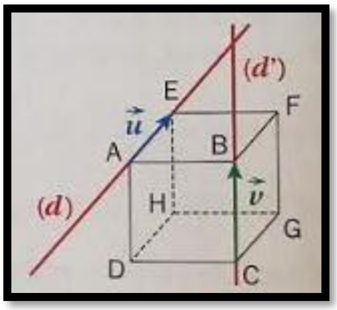


Vrai ou faux ?

- « Trois points coplanaires sont toujours alignés ».
- « Trois points alignés sont toujours coplanaires ».
- « Quatre points non alignés forment toujours un plan ».
- « Deux vecteurs quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Trois vecteurs quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Trois vecteurs dont la somme est égale au vecteur nul sont coplanaires ».

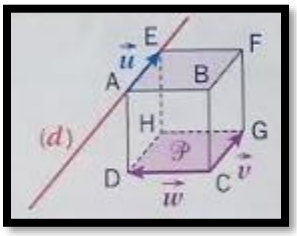
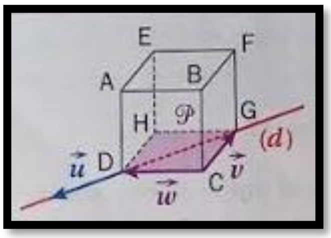
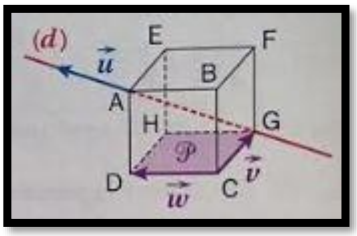
Position relative de deux droites

<u>Définitions et propriétés :</u> Deux droites de l’espace sont coplanaires si elles appartiennent à un même plan. d et d' sont deux droites de l’espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors d et d' sont parallèles. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors d et d' sont sécantes lorsqu’elles ont un point en commun, sinon elles sont non coplanaires.

<table>
<tr><td colspan="2">Droites coplanaires</td><td rowspan="2">Droites non coplanaires</td></tr>
<tr><td>Droites parallèles</td><td>Droites sécantes</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinaires</td><td colspan="2">$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinaires</td></tr>
</table>

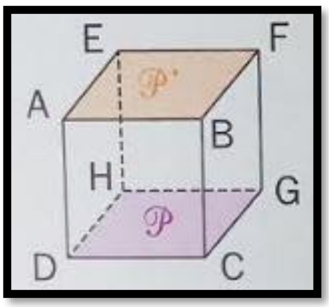
Position relative d’une droite et d’un plan

<u>Définitions et propriétés :</u> Une droite de l’espace de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan de l’espace de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont parallèles si les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. Si en plus elles ont un point commun, alors on dit que la droite est incluse dans le plan. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires alors droite plan sont sécants en un point.

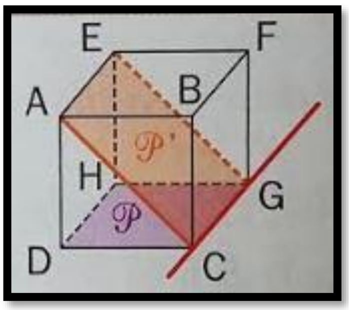
<table>
<tr><td colspan="2">Droite et plan parallèles</td><td>Droite et plan sécants</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires</td><td>$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non coplanaires</td></tr>
</table>

Position relative de deux plans de l’espace

<u>Définitions et propriétés :</u> Deux plans de l’espace sont parallèles si deux vecteurs directeurs de l’un peuvent être deux vecteurs directeurs de l’autre. Si deux plans de l’espace ne sont pas parallèles alors ils sont sécants. Leur intersection est une droite.



Plans parallèles



Plans sécants

Vrai ou faux ?

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

- « Une droite et un plan ont nécessairement un point en commun ».
- « Si deux points A et B appartiennent à un plan P alors la droite (AB) est incluse dans P ».
- « Deux droites définissent toujours un plan ».
- « Si une droite est parallèle à un plan, alors elle est parallèle à toute droite de ce plan ».
- « Si deux plans sont parallèles alors il existe une droite de l'un parallèle à une droite de l'autre ».

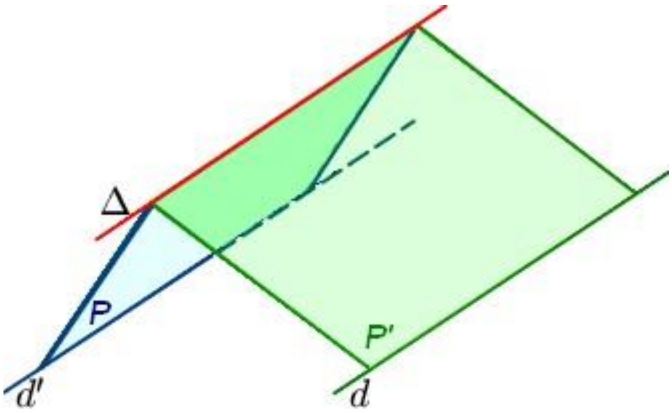
Vrai ou faux ? Encore…

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

- « Par un point, on ne peut mener qu'une seule droite parallèle à une droite donnée ».
- « Si 2 plans sont parallèles alors toute droite de l'un est parallèle à toute droite de l'autre ».
- « Si deux plans sont parallèles, alors toute droite de l'un est parallèle à l'autre plan ».
- « Deux droites parallèles à un même plan sont parallèles entre elles ».
- « Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan coupant l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles ».

Vrai ou faux ? Toujours…

Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « Soient P et P' deux plans. Soient (d) une droite incluse dans P et (d') une droite incluse dans P' telles que (d) et (d') soient parallèles. Si P et P' sont sécants en une droite (Δ) alors (Δ) est parallèle à (d) et à (d') ».



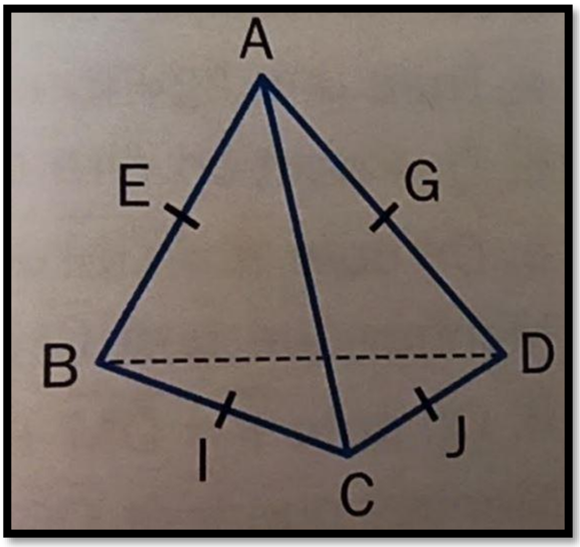
Relation de Chasles, encore et toujours…

ABCD est un tétraèdre. Les points E, G, I et J sont les milieux respectifs des segments [AB], [AD], [BC] et [CD].

- Montrer que $2\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AC}$,
- Montrer que $2\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{AC}$.

En déduire la nature du quadrilatère EIJG.

Le point O est le milieu du segment [EJ]. Démontrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. On dit que O est l'isobarycentre du tétraèdre…



Base et repère de l'espace

Définitions : Une base de l'espace est formée d'un triplet $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ de vecteurs non coplanaires. Les vecteurs d'une base sont tous non nuls et non colinéaires deux à deux. Un repère de l'espace est formé d'un point O, origine du repère et d'une base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On le note $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

Propriété et définition : Soit $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de nombres réels tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Ce triplet est appelé « coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ». On note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

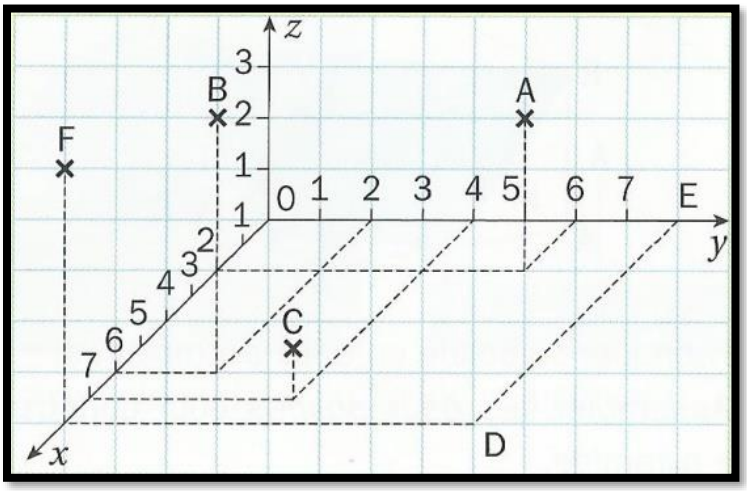
Propriété et définition : Soit $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ un repère de l'espace. Pour tout vecteur M de l'espace il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de nombres réels tels que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Ce triplet est appelé « coordonnées du point M dans la base $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ». On note $M(x;y;z)$ et on appelle x « l'abscisse », y « l'ordonnée » et z « la côte » du point M dans ce repère.

Exemples :

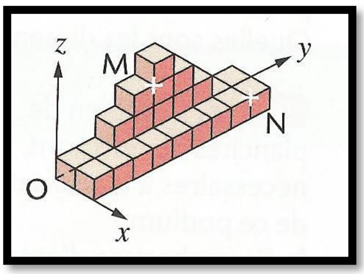
On considère un repère de l'espace constitué d'une origine et de trois axes :

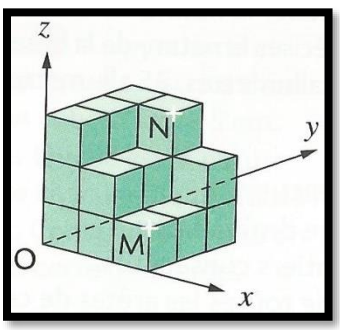
- Les abscisses sont sur l'axe (Ox),
- Les ordonnées sont sur l'axe (Oy),
- Les altitudes sont sur l'axe (Oz).

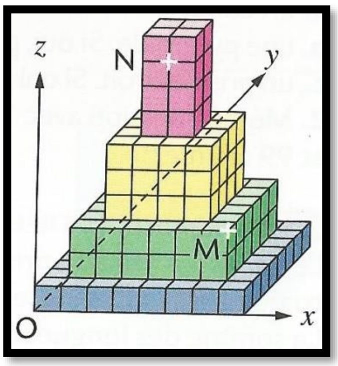
Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E et F.



Déterminer dans chaque cas les coordonnées des points M et N.







Coordonnées d'un vecteur, coordonnées d'un milieu, colinéarité

Propriétés : Soit $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ un repère de l'espace. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs. Soient $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$ deux points. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$.

Les coordonnées du milieu du segment [AB] sont $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles, c'est-à-dire si et seulement si il existe un nombre réel α tel que $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\alpha\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\\\alpha z\end{pmatrix}$.

Vecteurs de l'espace colinéaires ?

Compléter la fonction « colinéaires(u,v) » proposée ci-contre qui prend en paramètres les coordonnées entières de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sous la forme de deux listes et qui renvoie un booléen indiquant s'ils sont colinéaires ou non. Puis tester cette fonction sur les couples de vecteurs de l'espace proposés ci-dessous :

```
def colineaires(u,v):
  if u[0]*v[1]!=u[1]*v[0]:
    return False
  if ???:
    return False
  if ???:
    return False
  return True
```

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-3\\12\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ avec $A\left(2;2;-4\right)$ $B\left(5;-4;8\right)$ $C\left(3;-4;12\right)$ $D\left(-2;6;-8\right)$

Points de l'espace alignés ?

Coder une fonction prenant en paramètres les coordonnées entières de trois points de l'espace et renvoyant un booléen indiquant si les trois points sont alignés.

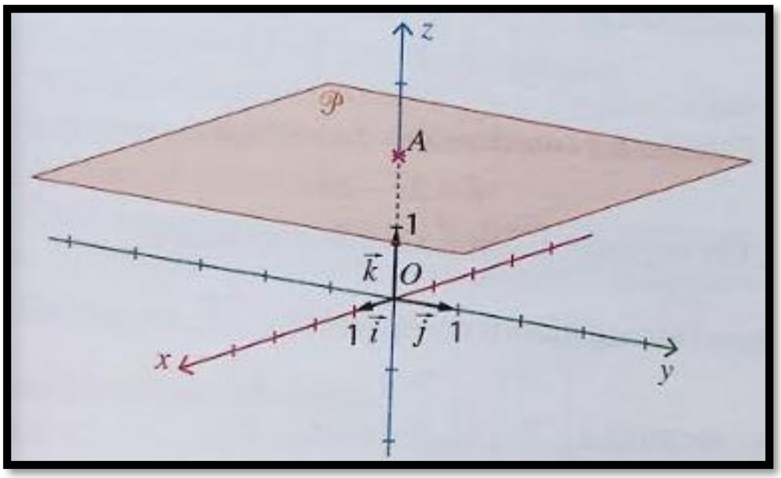
Les points de l'espace $M\left(2;-1;5\right)$, $N\left(-1;2;0\right)$ et $P\left(5;-4;10\right)$ sont-ils alignés ? Justifier. Déterminer les coordonnées du point Q de l'espace tel que MNPQ soit un parallélogramme.
Les points de l'espace $A\left(2;3;-1\right)$, $B\left(1;-2;3\right)$ et $C\left(0;1;-2\right)$ sont-ils alignés ? Justifier. Déterminer les coordonnées du point D de l'espace tel que ABCD soit un parallélogramme.

Existe-t-il des nombres réels x et y tels que les points $A\left(2;4;0\right)$, $B\left(1;y;3\right)$ et $C\left(x;2;-1\right)$ soient alignés ? Existe-t-il une valeur de x pour laquelle $\vec{u}\begin{pmatrix}x-2\\x\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-9\\x\end{pmatrix}$ soient colinéaires ?

Vecteurs ou points de l'espace coplanaires ?

On considère les points de l'espace $A(2;1;5)$, $B(5;1;-6)$, $C(4;2;4)$ et $D(-2;1;-4)$. Existe-t-il des nombres réels x et y tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AB}$? Que peut-on en conclure ?
On considère les points de l'espace $A(2;3;-1)$, $B(-2;5;4)$, $C(5;1;6)$ et $D(2;1;4)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ? Pourquoi ?

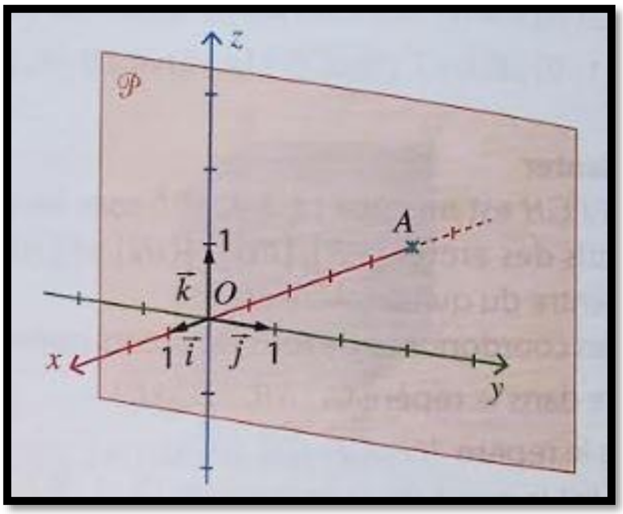
Se repérer dans l'espace



Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ci-contre, on a représenté un plan P passant par le point $A(0;0;2)$ et parallèle au plan passant par O et ayant pour base le couple $(\vec{i};\vec{j})$. Parmi les points proposés ci-dessous, lesquels sont ceux qui appartiennent au plan P ?

$B(1;2;2)$ $C(0;2;0)$ $D(0;2;2)$ $E(-2;0;0)$ $F(50;14;2)$ $G(0;-4;2)$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M(x;y;z)$ appartienne au plan P.



Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ci-contre, on a représenté un plan P passant par le point $A(-5;0;0)$ et parallèle au plan passant par O et ayant pour base le couple $(\vec{j};\vec{k})$. Ce plan représente la façade d'un immeuble que l'on souhaite éclairer par des faisceaux lumineux assimilés à des droites.

Le faisceau lumineux passant par le point $(1;1;0)$ et de vecteur directeur $-\vec{i}$ éclaire-t-il la façade ? Si oui quelles sont les coordonnées du point d'impact ?

Justifier que le faisceau lumineux passant par les points de coordonnées $(1;2;3)$ et $(1;3;5)$ n'éclaire pas la façade, c'est-à-dire qu'il n'a pas de point d'impact avec celle-ci.

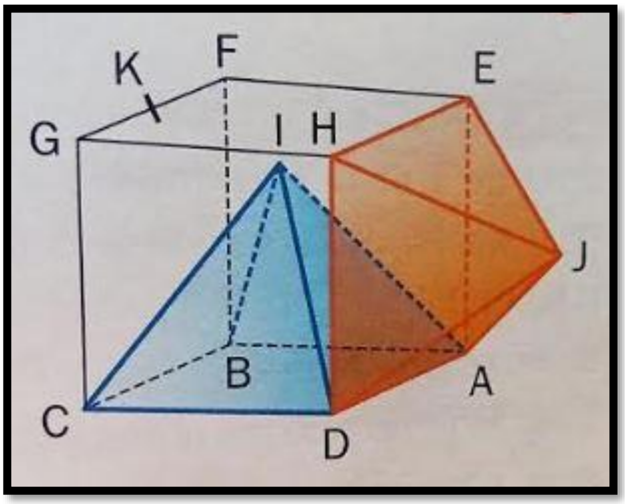
Un faisceau lumineux passe par le point de coordonnées $(-1;-2;1)$ et atteint la façade de l'immeuble au point de coordonnées $(-5;1;6)$. Ce faisceau passe par le point de coordonnées $(7;y;z)$. Déterminer les valeurs des nombres réels y et z.

Aplanir une surface

On fixe un voile d'ombrage aux points A, B et C dont les coordonnées dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ sont respectivement $(0;0;4)$, $(2;1;2,5)$ et $(1;6;3,5)$. On accroche la quatrième extrémité de la voile au point $D(3;7;h)$.

Déterminer à quelle hauteur h on doit accrocher le voile pour qu'il soit plan, c'est-à-dire pour que les quatre points soient dans le même plan.

Aligner trois points

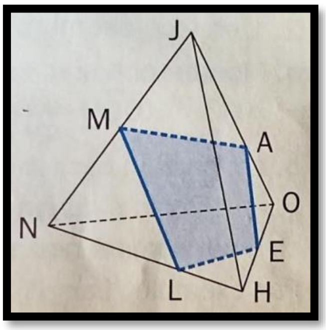


ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur a. On construit à l'intérieur de ce cube une pyramide ABCDI et à l'extérieur de ce cube une pyramide ADHEJ identique à la précédente dont les faces triangulaires sont des triangles isocèles. On place le point K au milieu du segment [GF]. Déterminer la hauteur de la pyramide pour que les points I, J et K soient alignés. En déduire la longueur des arêtes des triangles isocèles pour que cette condition soit réalisée.

Parallèles ? Sécantes ?

Les points $A(2;3;-1)$, $B(-2;5;4)$, $C(5;1;6)$ et $D(2;1;4)$ sont des points de l'espace muni d'un repère. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Sont-elles sécantes ? Justifier…

Coplanaires ?



JOHN est un tétraèdre. Les points M et E sont les milieux respectifs des arêtes [JN] et [OH] et les points A et L sont définis par les relations vectorielles $\overrightarrow{JA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{JO}$ et $\overrightarrow{NL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{NH}$.

Les points M, A, E et L sont-ils coplanaires ? Justifier…

Coplanaires ? Encore…

ABCD est un tétraèdre. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AC] et [BD]. Les points K et L sont les points de l'espace tels que $3\overrightarrow{CK}=2\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{AL}=2\overrightarrow{AB}$. $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)$ est-il un repère de l'espace ? Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ dans ce repère. Démontrer que les quatre points I, J, K et L sont coplanaires.

Coplanaires ? Toujours…

Les points $A(-2;8;9)$, $B(-4;4;5)$, $C(0;4;-3)$, $D(-8;6;7)$ et $E(1;-2;3)$ sont des points de l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD]. Le point L est défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{BL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. Les points A, B et C sont-ils alignés ? Calculer les coordonnées des points I, J et L dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ puis montrer que les quatre points I, J, L et E sont coplanaires.

Quatrième sommet d'un parallélogramme

Les points $A(2;3;-1)$, $B(1;-2;3)$ et $C(0;1;-2)$ sont des points de l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. Montrer que ces trois points ne sont pas alignés puis déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

Fonction vectorielle de Leibniz

On appelle fonction vectorielle de Leibniz la fonction qui, à quatre points pondérés de l'espace $(A;a)$, $(B;b)$, $(C;c)$ et $(D;d)$, associe la somme vectorielle $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}+d\overrightarrow{MD}$. Le point G de l'espace tel que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}+d\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ est appelé barycentre des quatre points pondérés. Montrer que pour tout point M de l'espace on a la relation vectorielle suivante : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}+d\overrightarrow{MD}=(a+b+c+d)\overrightarrow{MG}$. En déduire que si $a+b+c+d\neq 0$ alors $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{a+b+c+d}\left(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}+d\overrightarrow{OD}\right)$. On a la même définition et la même propriété pour deux points, trois points, n points pondérés de l'espace.

La fonction « bary(points,coeff) » proposée ci-contre prend en paramètres une liste de coordonnées de points du plan et la liste des coefficients de pondération associés (de somme non nulle) et renvoie les coordonnées du barycentre de l'ensemble des points pondérés.

Par exemple, « bary([[1,2,3],[4,5,6]],[7,8]) renvoie le barycentre des points $A(1,2,3)$ et $B(4;5;6)$ affectés des coefficients respectifs 7 et 8.

Recopier et compléter le script proposé. On note ensuite $R(2;5;-1)$, $S(0;4;1)$ $T(-1;0;3)$ et $U(-2;8;-2)$ quatre points de l'espace.

```
def bary(points,coeff):
  xg=0
  yg=0
  zg=0
  somme=sum(coeff)
  for p in range(len(points)):
    xg=???
    yg=???
    zg=???
  xg=???
  yg=???
  zg=???
  return[xg,yg,zg]
```

Utiliser la fonction « bary(points,coeff) » pour déterminer les coordonnées du barycentre des points pondérés $(R;5)$, $(S;-3)$ $(T;2)$ et $(U;-1)$.

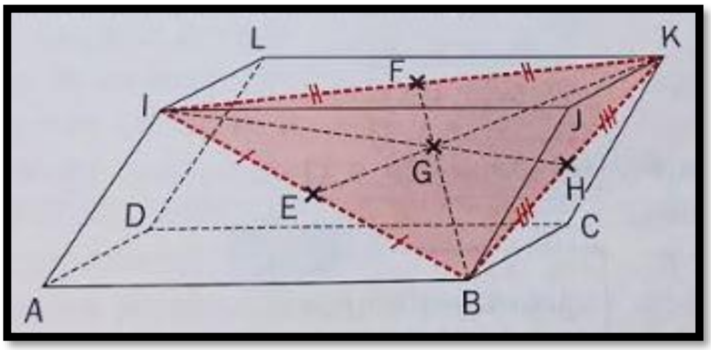
Recopier et compléter les lignes du script proposé ci-contre qui détermine les coordonnées du point V tel que RSTV soit un parallélogramme en définissant le point V comme barycentre de $(R;r)$ $(S;s)$ et $(T;t)$ à l'aide de la fonction « bary(points,coeff) ».

```
R=[2,5,-1]
S=[0,4,1]
T=[-1,0,3]
V=bary([R,S,T],[???,???,???])
print(V)
```

Le point I est le milieu du segment [TU]. Comparer « bary([T,U,S],[1,1,1]) » et « bary([I,S],[2,1]) ». Démontrer ensuite cette observation. Généraliser cette remarque en démontrant que si G est le barycentre des trois points pondérés $(A;a)$ $(B;b)$ et $(C;c)$ avec $a+b+c\neq 0$ et si K est le barycentre des deux points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a+b\neq 0$ alors G est barycentre des deux points pondérés $(K;a+b)$ $(C;c)$. On parle de la propriété d'associativité du barycentre.

Centre de gravité

ABCDIJKL est un parallélépipède et le point G est le centre de gravité du triangle BIK. Déterminer les coordonnées des points D, G et J dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AI}\right)$. En déduire que les trois points D, G et J sont alignés.



Un appartement à Paris

Une agence immobilière souhaite faire un compte rendu sur l'occupation des logements dans le 12e arrondissement de Paris. Suite à un sondage, les données recueillies permettent d'obtenir les listes A, B, C et D proposées ci-dessous.

Liste	A	B	C	D
Nombre de pièces	1	2	3	4
Nombre moyen d'occupants	1,2	1,6	2,2	4
Superficie moyenne en mètres carrés	14	30	52	70
Nombre de foyers interrogés	200	150	100	50

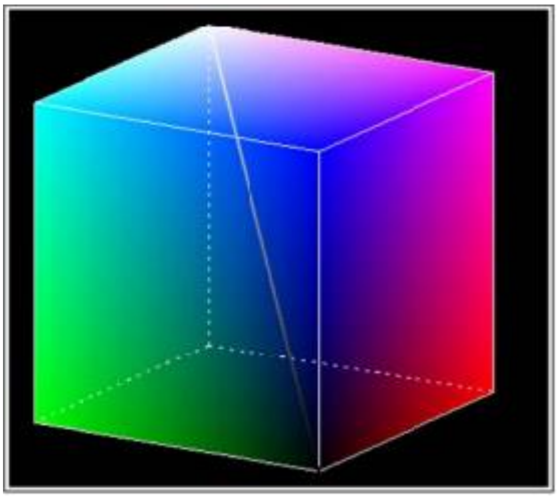
Ces listes sont représentées par des points de coordonnées $(x;y;z)$ dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. Par exemple les coordonnées du point A associées à la liste A sont $(1;1,2;14)$. Calculer les coordonnées du point $G\left(\overline{x};\overline{y};\overline{z}\right)$ où $\overline{x}$ est le nombre moyen de pièces, où $\overline{y}$ est le nombre moyen de pièces, où $\overline{z}$ est la superficie moyenne par foyer. Pour effectuer ce travail, on pourra (devra) réinvestir la fonction « bary(points,coeff) » élaborée dans la situation précédente…

Afin d'avoir une vision plus globale de la situation, on souhaite réunir les listes A et B dans une liste K qui représente la majorité des personnes seules et les couples, les listes C et D dans une liste F qui représente les foyers de trois personnes ou plus. Déterminer les coordonnées des points K et F puis démontrer que le point G appartient à (KF).

On souhaite à présent avoir une autre vision de ces données. On réunit les listes A, B et C dans une liste I qui représente les appartements les plus répandus, la liste D représente les appartements de grande superficie. Déterminer les coordonnées des points I et D puis démontrer que le point G appartient à (ID).

Déterminer une troisième droite (d) telle que les droites (d), (ID) et (KF) soient concourantes. Interpréter votre choix de droite (d) en lien avec les données de l'énoncé.

Le cube colorimétrique

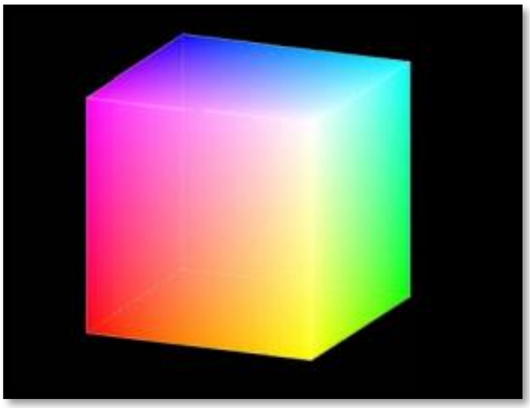


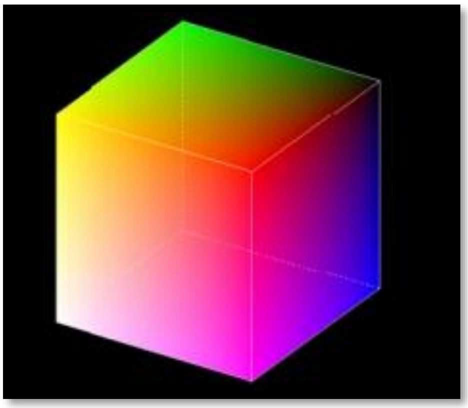
Sur les écrans, toutes les couleurs s'obtiennent à partir des trois couleurs suivantes : rouge, vert et bleu. Pour coder une couleur, il suffit donc de trois nombres mesurant la quantité de rouge, de vert et de bleu. Ainsi on attribue à chaque couleur un triplet $(r;g;b)$ qui sont les coordonnées de points d'un cube dans l'espace muni du repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ dont les trois axes représentent les intensités du rouge, du vert et du bleu. Chaque nombre du triplet ainsi constitué est compris entre 0 et 255.

Justifier que l'on peut coder ainsi plus de 16 millions de couleurs. Citer des couleurs du plan $P_1\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. Citer des couleurs du plan $P_2\left(O;\vec{i};\vec{k}\right)$. Citer des couleurs du plan $P\left(O;\vec{j};\vec{k}\right)$.

Déterminer les coordonnées des points codant la couleur noire, la couleur rouge, la couleur verte, la couleur bleue, la couleur jaune, la couleur cyan, la couleur magenta et la couleur blanche.

On donne ci-dessous deux autres vues du cube. Retrouver dans chaque cas le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.





Un peu de technique pour finir

SABC est un tétraèdre. Au plan de quelle face le point M tel que $\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ appartient-il ? ABCDEFGH est un cube. Les points U et V sont tels que $\overrightarrow{UF}=\overrightarrow{GF}/4$ et $\overrightarrow{BV}=\overrightarrow{BA}/4$. Montrer que les trois vecteurs $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{GA}$ sont coplanaires.