Des probabilités sous condition

Une dame nourrit son chat Gédéon avec des aliments en boîte.

Chaque jour elle choisit une boîte au hasard parmi les trois variétés : volaille, bœuf ou lapin.

Cette dame a remarqué que :

- Si on lui sert de la volaille, Gédéon finit toujours sa gamelle.
- Si on lui sert du bœuf, Gédéon finit sa gamelle une fois sur deux.
- Si on lui sert du lapin, Gédéon finit sa gamelle une fois sur trois seulement.

Calculer la probabilité pour que, un jour donné, Gédéon finisse sa gamelle.

Aujourd'hui, Gédéon a fini sa gamelle. Calculer la probabilité pour qu'il ait mangé du lapin.

1	volaille	finit
2	boeuf	finit
3	lapin	finit
2	boeuf	ne finit pas
3	lapin	ne finit pas
2	boeuf	finit
3	lapin	finit
3	lapin	finit
2	boeuf	finit
1	volaille	finit
3	lapin	ne finit pas
2	boeuf	finit
3	lapin	finit
2	boeuf	finit
2	boeuf	ne finit pas
2	boeuf	ne finit pas
1	volaille	finit
3	lapin	ne finit pas
2	boeuf	ne finit pas
1	volaille	finit
2	boeuf	ne finit pas
2	boeuf	finit
3	lapin	ne finit pas
1	volaille	finit
1	volaille	finit

Test anti-dopage

Une agence de lutte contre le dopage a mis au point un test pour détecter un nouveau produit dopant. On estime que :

- 2% des sportifs utilisent ce produit dopant,
- Si un sportif a ingéré ce produit, le test est positif dans 99% des cas,
- Si un sportif n'a pas ingéré ce produit, le test est positif dans 1,5% des cas.

1. Un sportif est testé positif. Peut-on prendre le risque de dire qu'il s'est dopé ?
2. Un sportif est testé négatif. Peut-on prendre le risque de dire qu'il ne s'est pas dopé ?

Logiciel anti-virus

Chaque jour, 3% des mails reçus par Benjamin sont indésirables. Parmi les mails indésirables seulement 95% sont supprimés par son logiciel anti-virus. Parmi les mails qui ne sont pas indésirables l'antivirus en supprime 2% par erreur. On note : I l'événement : « le mail reçu est indésirable », S l'événement : « le mail reçu est supprimé ».

1. Un mail vient d'être supprimé par l'anti-virus : est-on sûr que c'était un mail indésirable ?
2. Un mail n'a pas été supprimé par l'anti-virus : prend-on un risque en l'ouvrant ?

A la recherche de la vérité

Un établissement souhaite mener une enquête permettant de déterminer la proportion d'élèves ayant déjà expérimenté le cannabis. Craignant que les jeunes interrogés ne répondent pas de manière sincère, il met en place le protocole suivant : on place dans un sac trois cartes indiscernables au toucher.

- Sur la première carte est écrite la question : « Avez-vous déjà consommé au moins une fois du cannabis ? »,
- Sur la deuxième carte est représenté un triangle noir et y est inscrit la question : « Y a-t-il un triangle noir sur cette carte ? »,
- Sur la troisième carte ne figure que la question : « Y a-t-il un triangle noir sur cette carte ? »

Chaque élève interrogé plonge sa main dans le sac et prend une carte au hasard sans la montrer. Il répond par « Oui » ou par « Non » à la question qui se trouve sur la carte qu'il a piochée. La personne interrogeant l'élève ignorant la carte qui a été tirée ne sait pas à quoi le « Oui » ou le « Non » se rapporte : ce protocole encourage donc les réponses sincères. Sur les 1200 élèves de l'établissement, 560 ont répondu « Oui » à la question qui leur a été posée. Que peut-on en conclure sur la proportion d'élèves ayant déjà expérimenté le cannabis ?

Remarque : ce type d'enquête a réellement été conduit sur le terrain. Pendant la guerre du Vietnam, les autorités américaines ont souhaité savoir combien de soldats prenaient de la drogue. On disait que la drogue était très répandue, et il était important de vérifier si c'était vrai. Cependant aucun soldat ne voudrait reconnaitre prendre de la drogue, délit puni par la loi.

Formule des probabilités totales et suites numériques

Une personne débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie. On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est 0,6, et si elle perd une partie, la probabilité pour qu'elle perde la partie suivante est 0,7. On note G_n l'événement « Cette personne gagne la nième partie », P_n l'événement « Cette personne perd la nième partie » et on pose, pour $n \geq 1$, $x_n = p(G_n)$ et $y_n = p(P_n)$.

1. Déterminer les probabilités $p(G_2)$ et $p(P_2)$. Justifier de manière précise les réponses.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $\begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n \end{cases}$.

On considère les suites auxiliaires $u_n = x_n + y_n$ et $v_n = 4x_n - 3y_n$.

3. Montrer que la suite (u_n) est constante et que la suite (v_n) est géométrique.
   En déduire les expressions de x_n et de y_n en fonction de n.

4. Déterminer le comportement asymptotique de ces deux suites et interpréter ces deux résultats dans le cadre de l'exercice.

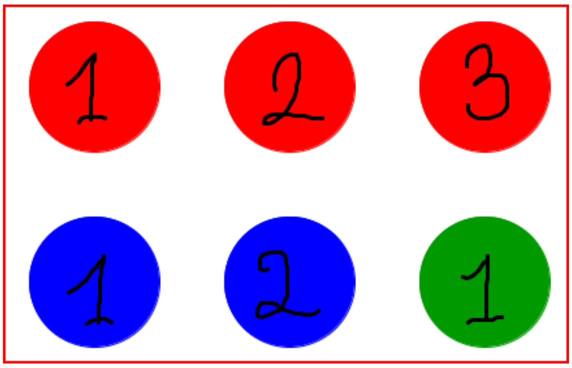
Définition et propriété

Les deux événements A et B sont **indépendants** lorsque $\boxed{p_A(B)=p(B)}$ ou $\boxed{p_B(A)=p(A)}$.

Les deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si $\boxed{p(A\cap B)=p(A)\times p(B)}$.

Dépendance, indépendance

On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant les six jetons représentés ci-contre. On considère les trois événements suivants :

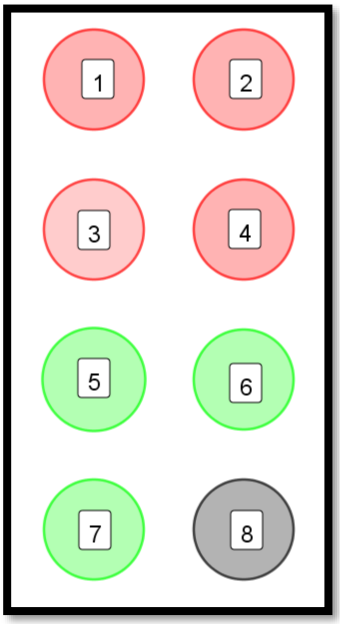


- R = « le jeton est Rouge »,
- U = « le numéro est Un »,
- D = « le numéro est Deux ».

Les événements R et U sont-ils indépendants ?
Les événements R et D sont-ils indépendants ?

Dépendance, indépendance, encore…

Une urne contient quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4, trois jetons verts numérotés de 5 à 7 et un jeton noir numéroté 8. On tire au hasard un jeton de l'urne et on s'intéresse aux événements :



- A = « obtenir un numéro pair »,
- B = « obtenir un jeton rouge »,
- C = « obtenir un jeton vert ».

Donner <u>sans justification</u> les probabilités simples $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, les probabilités conditionnelles $p_B(A)$, $p_A(B)$, $p_C(A)$, $p_A(C)$ et les probabilités d'intersection $p(A\cap B)$ et $p(A\cap C)$.

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

2. Les événements A et C sont-ils indépendants ? Justifier.

Dépendance, indépendance, toujours…

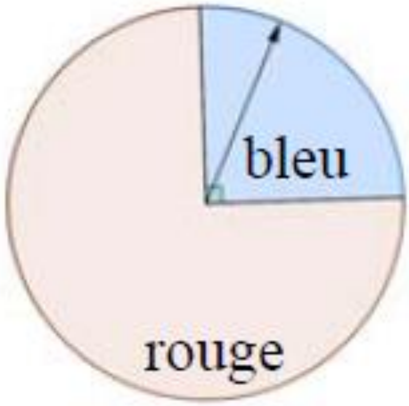
On donne ci-contre la répartition de 150 étudiants selon la langue étudiée et l'activité sportive choisie.

	Tennis	**Equitation**	**Voile**
Anglais	45	18	27
Allemand	33	9	18

Les événements A = « étudier l'anglais » et T = « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ?
Les événements D = « étudier l'allemand » et V = « pratiquer la voile » sont-ils indépendants ?

Approche de la loi binomiale

On fait tourner la roue de loterie présentée ci-contre : on obtient la couleur « rouge » avec la probabilité 0,75 et la couleur « bleu » avec la probabilité 0,25. Le joueur est gagnant lorsque la flèche s'arrête sur la zone bleue comme sur la figure ci-contre.



On décide de noter S (comme succès) cette éventualité et de noter E (comme échec) l'éventualité contraire c'est-à-dire « la flèche tombe sur la zone rouge ».

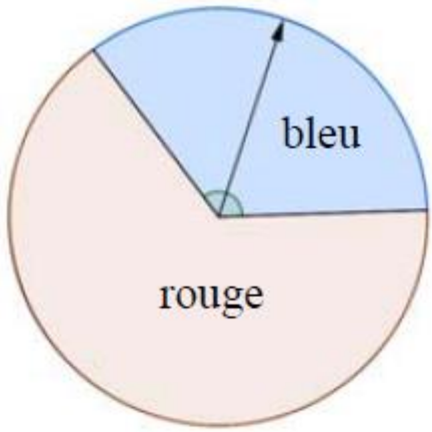
Déterminer la **loi de probabilité** de la **variable aléatoire** X qui compte le **nombre de succès** obtenus lorsque l'on fait tourner **de manière indépendante** 4 roues **identiques** à celle proposée ci-dessus. Déterminer **l'espérance mathématique** de cette variable aléatoire.

Vocabulaire

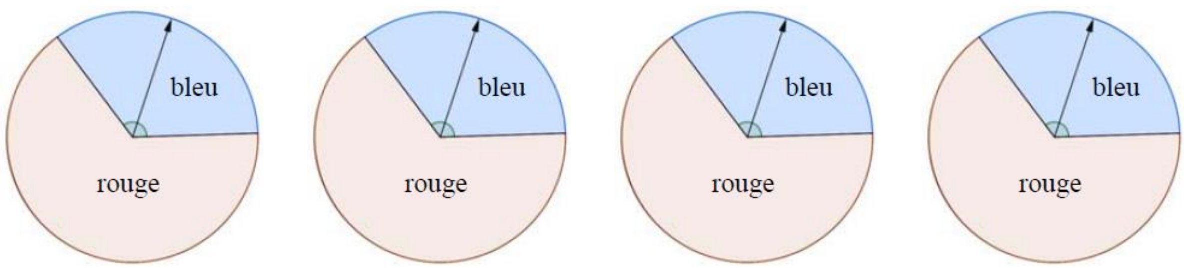
Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui ne comporte que **deux issues possibles** appelées « succès » noté S ou « échec » noté $E = \overline{S}$ de probabilités respectives p et $q = 1 - p$. Un **schéma de Bernoulli** est la **répétition** d'épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes** (c'est-à-dire que l'issue d'une épreuve **ne dépend pas** des épreuves précédentes).

Etude d'un schéma de Bernouilli – Cas n=4

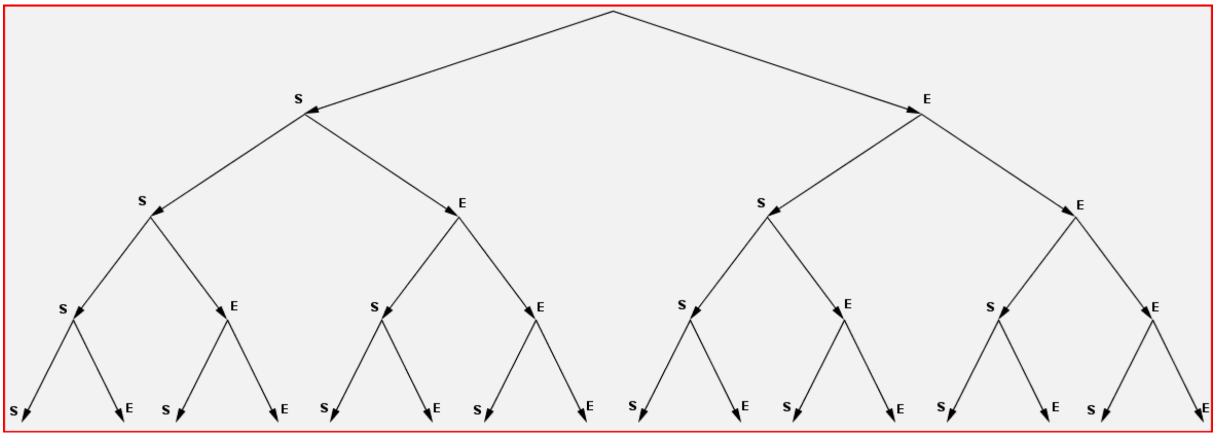
On fait maintenant tourner la roue de loterie présentée ci-contre : on obtient la couleur « Bleu » avec une probabilité qui dépend de l'angle indiqué sur la figure et qui est notée p.



On décide de noter S (comme succès) l'éventualité « la flèche tombe sur la zone bleue » et de noter E (comme échec) l'éventualité contraire c'est-à-dire « la flèche tombe sur la zone rouge ».



En faisant tourner ces quatre roues on se place dans le cadre d'un schéma de Bernoulli puisque l'on répète 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On dira que ce schéma de Bernoulli a pour paramètres n et p. Sauriez-vous préciser à quoi correspond le paramètre n ?



On considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenus à l'issue des 4 répétitions. A l'aide du schéma de Bernouilli présenté ci-dessus répondre aux questions :

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X en fonction de p et $q=1-p$.

2. La loi de probabilité ainsi construite présente cinq coefficients. A quoi correspondent-ils ?

3. Vérifier que $\sum_{k=0}^{4} p(X=k)=1$. On pourra pour cela utiliser le fait que $q=1-p$.

4. A quoi correspond la quantité $\sum_{k=0}^{4} k\times p(X=k)$? Montrer que $\sum_{k=0}^{4} k\times p(X=k)=4p$.

Définition

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Un schéma de Bernoulli associé à n répétitions indépendantes de cette épreuve peut être représenté par un arbre pondéré qui comporte n générations. Par définition, la loi binomiale de paramètres n et p, notée $B(n,p)$ est la loi de la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès au cours des n répétitions.

Quelques cas particuliers

Calcul de $p(X=0)$ et de $p(X=n)$:

- L'événement $\{X=0\}$ est réalisé sur l'unique chemin de l'arbre qui ne comporte que des échecs, c'est-à-dire le dernier chemin de l'arbre qui est constitué de n branches qui ont toutes la même probabilité égale à $q=1-p$. D'où le résultat : $\boxed{p(X=0)=q^n}$.

- L'événement $\{X=n\}$ est réalisé sur l'unique chemin de l'arbre qui ne comporte que des succès, c'est-à-dire le premier chemin de l'arbre qui est constitué de n branches qui ont toutes la même probabilité égale p. D'où le résultat : $\boxed{p(X=n)=p^n}$.

Calcul de $p(X=1)$ et de $p(X=n-1)$:

- L'événement $\{X=1\}$ est réalisé sur les chemins de l'arbre qui comportent un unique succès et $n-1$ échecs. La probabilité de chacun de ces chemins est $p\times q^{n-1}$. Il reste à déterminer combien de chemins de ce type figurent dans l'arbre pondéré. Cette question est assez simple dans la mesure où il suffit de repérer à quel niveau de l'arbre figure l'unique succès. Il y a n possibilités et ainsi n chemins réalisent l'événement $\{X=1\}$. D'où le résultat $\boxed{p(X=1)=n\times p\times q^{n-1}}$.

- L'événement $\{X=n-1\}$ est réalisé sur les chemins de l'arbre qui comportent $n-1$ succès et un unique échec. La probabilité de chacun de ces chemins est $p^{n-1}\times q$. Il reste à déterminer combien de chemins de ce type figurent dans l'arbre pondéré. Cette question est assez simple dans la mesure où il suffit de repérer à quel niveau de l'arbre figure l'unique échec. Il y a n possibilités et ainsi n chemins réalisent l'événement $\{X=n-1\}$. D'où le résultat $\boxed{p(X=n-1)=n\times p^{n-1}\times q}$.

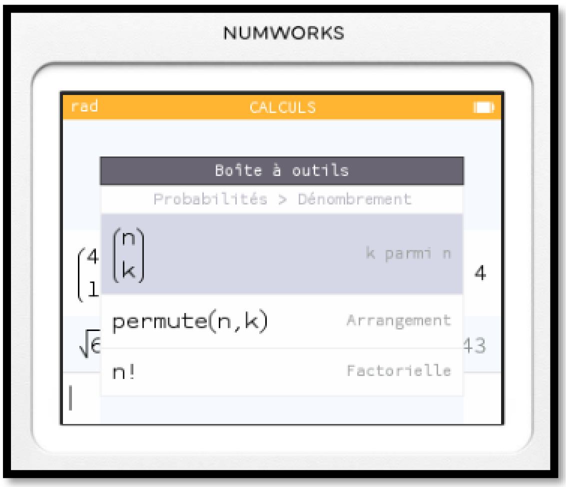
Les coefficients binomiaux

Pour déterminer $p(X=k)$, où k est un entier naturel tel que $0\leq k\leq n$, on procèderait de la même façon : la probabilité de chaque chemin qui réalise exactement k succès (et par conséquent réalise $n-k$ échecs) est $p^k\times q^{n-k}$. Il faut ensuite multiplier cette probabilité par le nombre de chemins qui présentent exactement k succès et $n-k$ échecs dans l'arbre pondéré.

Soit n un entier naturel et k un entier tel que $0\leq k\leq n$.

On note $\binom{n}{k}$, et on lit « k parmi n » le nombre de chemins qui réalisent exactement k succès (et par conséquent $n-k$ échecs) dans l'arbre à n générations associé à un schéma de Bernoulli.

La calculatrice Numworks (affichage proposé ci-contre) calcule les coefficients binomiaux : pour cela aller dans « Boite à outils », puis « Dénombrement », puis « Binomial(n,k) ».



Deux cas particuliers sont à connaitre :

$$\boxed{\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1} \text{ et } \boxed{\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n}$$

La symétrie des coefficients s'exprime ainsi :

$$\boxed{\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}}$$

Retour sur la loi binomiale

On répète n fois de manière **indépendante** une **même** expérience aléatoire présentant **deux issues** S et $\overline{S}$ de probabilités respectives p et $q = 1 - p$. On considère la variable aléatoire X égale au **nombre de succès** S obtenus au cours de ces n expériences. La loi de probabilité de la variable aléatoire X s'appelle alors **loi binomiale** de paramètres n et p, notée $\mathrm{B}(n, p)$.

k	0	1	2	$\ldots$	$n-1$	n
$p(X = k)$	$\binom{n}{0} q^n$	$\binom{n}{1} pq^{n-1}$	$\binom{n}{2} p^2 q^{n-2}$	$\ldots$	$\binom{n}{n-1} p^{n-1} q$	$\binom{n}{n} p^n$

On retrouve dans la loi binomiale **les coefficients binomiaux** qui correspondent au nombre de chemins de l'arbre pondéré permettant d'obtenir k « succès » au cours des n générations.

Une formule à retenir

Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$ on a : $\boxed{p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$

Propriétés

Pour une loi binomiale, l'**espérance** est donnée par la formule : $\boxed{E(X) = n \times p}$

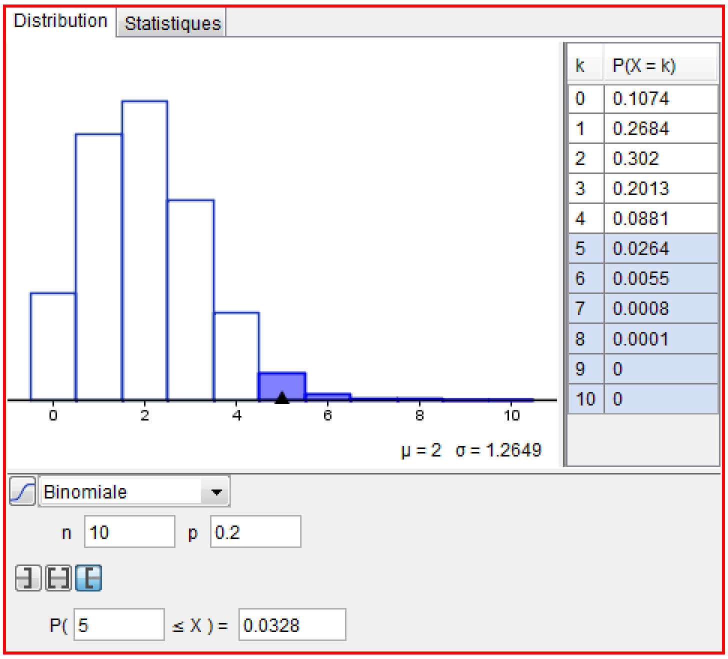
Le QCM

Un élève répond au hasard aux 10 questions d'un QCM. Pour chaque question, cinq réponses sont proposées dont une seule est exacte. X est la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ne rapporte aucun point.

Quelle est la probabilité pour cet élève d'obtenir la moyenne, c'est-à-dire d'avoir au moins 5 bonnes réponses ?

Calculer l'espérance mathématique du nombre de bonnes réponses.

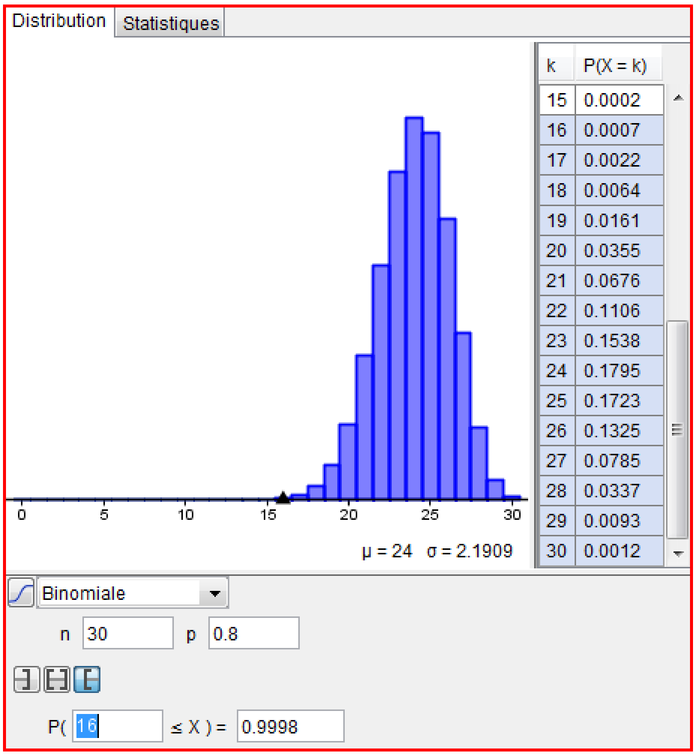


Reprendre l'exercice avec un QCM comportant 10 questions et 4 réponses dont une seule exacte.

Reprendre l'exercice avec un QCM comportant 10 questions et 2 réponses dont une seule exacte.

Quorum atteint ?

Une association comprenant 30 adhérents organise chaque année une assemblée générale. Les statistiques montrent que chaque adhérent assiste à l'assemblée avec la probabilité 80 %. Les décisions prises par l'assemblée n'ont de valeur légale que lorsque plus de la moitié des adhérents assiste à l'assemblée.



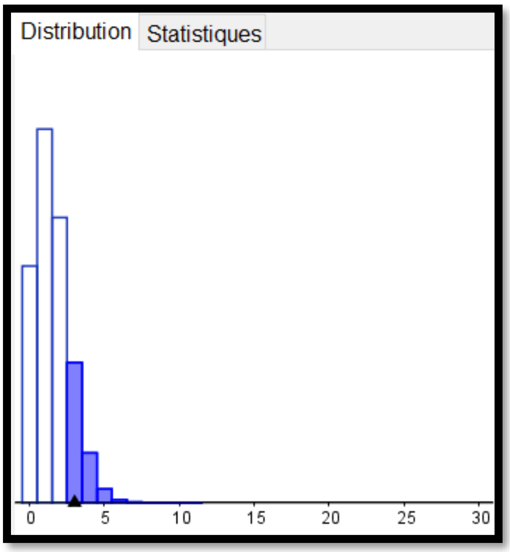
Quelle est la probabilité que, lors de la prochaine assemblée, le quorum soit atteint ?

Calculer l'espérance mathématique du nombre d'adhérents présents lors de la prochaine assemblée.

Reprendre le problème avec une probabilité de présence de chaque adhérent égale à 50%.

Voyage annulé ?

Les 29 élèves d'une classe de terminale et les 3 accompagnateurs doivent se retrouver à la gare Porta Susa de Turin pour prendre le train



Pour chaque personne de ce groupe (élèves et accompagnateurs), la probabilité individuelle d'arriver en retard est estimée à 0,05 (5% de chances d'arriver en retard).

La règle suivante a été décidée : « si 10% ou plus de ce groupe n'est pas présent à 7h36 lors du départ du train, le groupe dans sa totalité reste à Turin et le voyage est annulé ».

1. Calculer, dans les conditions décrites ci-dessus, la probabilité que le voyage soit annulé.

2. En cas de pluie, la probabilité individuelle d'arriver en retard passe à 0,10 (c'est-à-dire 10% de chances d'arriver en retard). Recalculer la probabilité que le voyage soit annulé.

Un paradoxe

Paul affirme : « Avec un dé régulier, on a autant de chance d'obtenir au moins un six en 4 lancers que d'obtenir au moins deux six avec 8 lancers ». Sara objecte : « Pas du tout. Dans le premier cas, la probabilité est supérieure à 0,5, dans le deuxième cas, elle est inférieure à 0,5 ». Qui a raison ?

Parier avec avantage

Avec un seul dé

On joue dans un premier temps avec un dé à six faces bien équilibré. On note X le nombre de six obtenus au cours des n lancers. Quel type de loi suit la variable aléatoire X ? Déterminer, en fonction de n, la probabilité d'obtenir au moins un six au cours des n lancers. Déterminer la valeur de n à partir de laquelle on pourra « parier avec avantage » sur l'obtention d'un six.

Avec deux dés

On joue maintenant avec deux dés à six faces bien équilibrés. On note X le nombre de double six obtenus au cours des n lancers. Quel type de loi suit la variable aléatoire X ? Déterminer, en fonction de n, la probabilité d'obtenir au moins un double six au cours des n lancers. Déterminer la valeur n à partir de laquelle on pourra « parier avec avantage » sur l'obtention d'un double six.

Note historique

En 1654, le Chevalier de Méré a posé à Pascal le problème suivant : « supposons qu'on joue plusieurs fois de suite avec deux dés, combien faut-il de coups pour qu'on puisse parier avec avantage que, après avoir joué ces coups on aura amené **« sonnez ! »** ?

On précise que **« sonnez ! »** correspond à l'obtention d'un double six et que **« parier avec avantage »** correspond à une probabilité supérieure à une chance sur deux, plus grande que 0,5.

Naissances

Un couple souhaite avoir une fille. En partant du principe que, pour ce couple, la probabilité d'avoir une fille est identique à celle d'avoir un garçon, on se pose la question suivante : combien d'enfants ce couple doit-il prévoir de faire pour être sûr à 99% d'avoir au moins une fille ?

On note n le nombre de naissances. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de filles nées au cours des n naissances. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Exprimer en fonction de n la probabilité $p\left(X \geq 1\right)$ puis conclure en obtenant la réponse par la programmation d'un algorithme de seuil et/ou par la programmation des cellules d'un tableur.

Gauchers

On estime que dans la population une personne sur dix est gauchère (c'est-à-dire « écrit avec la main gauche »). Combien de personnes doit-on réunir pour être sûr à 99% d'avoir au moins un gaucher dans l'assemblée ainsi réunie ?

Tir sur cible

Lorsque je joue aux fléchettes, mon taux de réussite pour atteindre le centre de la cible est de 60%. Combien de lancers dois-je envisager de faire pour être sûr à 99% d'avoir au moins un tir qui atteint le centre de la cible ?

Pour revoir la notion d'espérance

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est essayé sur un échantillon d'animaux dont 1% est porteur de la maladie. On sait que :

- Si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85% des cas,
- Si un animal est sain, le test est négatif dans 95% des cas.

Lorsque cela sera nécessaire, les résultats seront arrondis au millième. On notera :

- M l'événement « l'animal est porteur de la maladie »,
- T l'événement « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
   Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est de 0,058.
3. Un animal est choisi parmi ceux dont le test est positif.
   Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie ?

On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

4. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier la réponse apportée.
5. Quelle est la probabilité qu'au moins un des cinq animaux choisis ait un test positif.
6. Quelle taille minimale d'échantillon devrait-on prélever dans le troupeau pour être sûr à 99% d'avoir au moins un animal ayant un test positif ? Justifier la réponse apportée.

Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros. Le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1000 euros. On suppose que le test est gratuit.

7. Déterminer en complétant le tableau ci-dessous la loi de probabilité de la variable aléatoire exprimant le coût à engager par animal subissant le test. Calculer son espérance.
8. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir ?

Coût	0	100	1000
Probabilité			

Pour revoir la notion d'espérance, encore…

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord. Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 80 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose. Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

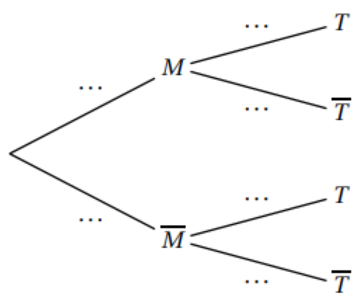
- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose. On considère les évènements M « le coyote est malade » et T « le test du coyote est positif ». On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les évènements contraires de M et T.

1. Compléter l'arbre pondéré ci-contre.

2. Démontrer que $p(T) = 0,786$.

3. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif. Calculer la valeur prédictive positive du test. Arrondir au millième.



4. Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur en arrondissant au millième.

5. Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test. Interpréter succinctement.

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif dans ce contexte est égale à 0,786. Lorsqu'on capture au hasard dix coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à un échantillon de dix coyotes capturés au hasard, associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.

6. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

7. Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins huit coyotes sur dix aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

8. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à 99,99% ?

Partie C

Une campagne de test est mise en place. 100 coyotes sont capturés. Ceux dont le test est négatif sont immédiatement relâchés et aucune dépense n'est engagée. Ceux dont le test est positif sont examinés de plus près et cet examen médical engendre une dépense de 200 euros. Ceux qui s'avèrent ne pas être malades sont relâchés tandis que ceux qui s'avèrent être réellement malades sont abattus et cela engendre une dépense supplémentaire de 300 euros. A l'aide du tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire « Coût », prévoir la dépense occasionnée…

Pour revoir la notion d'espérance, toujours…

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement 1 jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie. Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- Si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6,
- Si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac. On note B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ». L'évènement contraire d'un évènement E sera noté $\overline{E}$. La probabilité d'un évènement E sera notée $p(E)$.

Partie A

1. Montrer que $p(G)=\dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée au millième près.
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99 ? Détailler le raisonnement.

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent. Chaque joueur paie 1 euro (par partie).

- Si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 euros,
- Si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie. Attention : la mise initiale de 1 euro est immédiatement perdue par le joueur.

5. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance $E(X)$.
6. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur lorsque $E(X)<0$.
   Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

Partie C

L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. A partir de quelle valeur de n le jeu sera favorable à l'organisateur ?