Des probabilités sous condition

Une dame nourrit son chat Gédéon avec des aliments en boîte.

Chaque jour elle choisit une boîte au hasard parmi les trois variétés : volaille, bœuf ou lapin.

Cette dame a remarqué que :

- Si on lui sert de la volaille, Gédéon finit toujours sa gamelle.
- Si on lui sert du bœuf, Gédéon finit sa gamelle une fois sur deux.
- Si on lui sert du lapin, Gédéon finit sa gamelle une fois sur trois seulement.

Calculer la probabilité pour que, un jour donné, Gédéon finisse sa gamelle.

Aujourd'hui, Gédéon a fini sa gamelle. Calculer la probabilité pour qu'il ait mangé du lapin.

1	volaille	finit
2	boeuf	finit
3	lapin	finit
2	boeuf	ne finit pas
3	lapin	ne finit pas
2	boeuf	finit
3	lapin	finit
3	lapin	finit
2	boeuf	finit
1	volaille	finit
3	lapin	ne finit pas
2	boeuf	finit
3	lapin	finit
2	boeuf	finit
2	boeuf	ne finit pas
2	boeuf	ne finit pas
1	volaille	finit
3	lapin	ne finit pas
2	boeuf	ne finit pas
1	volaille	finit
2	boeuf	ne finit pas
2	boeuf	finit
3	lapin	ne finit pas
1	volaille	finit
1	volaille	finit

Test anti-dopage

Une agence de lutte contre le dopage a mis au point un test pour détecter un nouveau produit dopant. On estime que :

- 2% des sportifs utilisent ce produit dopant,
- Si un sportif a ingéré ce produit, le test est positif dans 99% des cas,
- Si un sportif n'a pas ingéré ce produit, le test est positif dans 1,5% des cas.

1. Un sportif est testé positif. Peut-on prendre le risque de dire qu'il s'est dopé ?
2. Un sportif est testé négatif. Peut-on prendre le risque de dire qu'il ne s'est pas dopé ?

Logiciel anti-virus

Chaque jour, 3% des mails reçus par Benjamin sont indésirables. Parmi les mails indésirables seulement 95% sont supprimés par son logiciel anti-virus. Parmi les mails qui ne sont pas indésirables l'antivirus en supprime 2% par erreur. On note : I l'événement : « le mail reçu est indésirable », S l'événement : « le mail reçu est supprimé ».

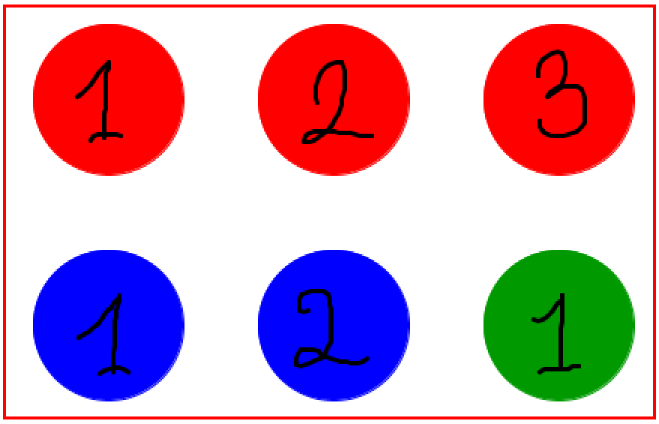
1. Un mail vient d'être supprimé par l'anti-virus : est-on sûr que c'était un mail indésirable ?
2. Un mail n'a pas été supprimé par l'anti-virus : prend-on un risque en l'ouvrant ?

Définition et propriété

Les deux événements A et B sont **indépendants** lorsque $\boxed{p_A(B) = p(B)}$ ou $\boxed{p_B(A) = p(A)}$.

Les deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si $\boxed{p(A \cap B) = p(A) \times p(B)}$.

Dépendance, indépendance



On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant les six jetons représentés ci-contre. On considère trois événements :

- R = « le jeton est Rouge »,
- U = « le numéro est Un »,
- D = « le numéro est Deux ».

Les événements R et U sont-ils indépendants ? Les événements R et D sont-ils indépendants ?

Commentaire

Si l'indépendance de deux événements repose par définition sur un calcul de probabilités et n'est pas toujours prévisible, on peut dans l'exemple proposé au, départ « pressentir l'indépendance de R et D.

En effet, en remarquant que la proportion des « 2 » dans l'ensemble des « rouges » est la même que celle des « 2 » dans l'ensemble des six boules, on s'attend à ce que la réalisation de « rouge » n'influence pas la probabilité d'obtenir un « 2 » et donc que les événements R et D soient indépendants.

De manière analogue, la proportion des « 1 » dans l'ensemble des « rouges » étant différente de celle des « 1 » dans l'ensemble des six boules, on peut prévoir la non-indépendance des événements R et U.

Sport et langue

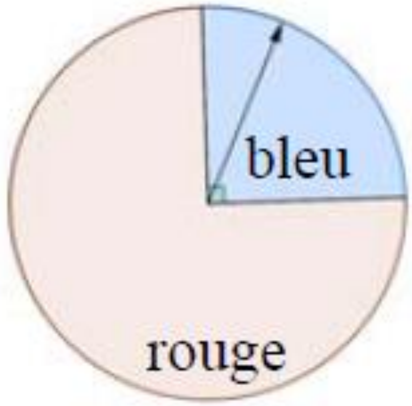
On donne ci-contre la répartition de 150 étudiants selon la langue étudiée et l'activité sportive choisie.

	Tennis	Equitation	Voile
Anglais	45	18	27
Allemand	33	9	18

Les événements A = « étudier l'anglais » et T = « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ?
Les événements D = « étudier l'allemand » et V = « pratiquer la voile » sont-ils indépendants ?

Approche de la loi binomiale

On fait tourner la roue de loterie présentée ci-contre : on obtient la couleur « rouge » avec la probabilité 0,75 et la couleur « bleu » avec la probabilité 0,25. Le joueur est gagnant lorsque la flèche s'arrête sur la zone bleue comme sur la figure ci-contre.



On décide de noter S (comme succès) cette éventualité et de noter E (comme échec) l'éventualité contraire c'est-à-dire « la flèche tombe sur la zone rouge ».

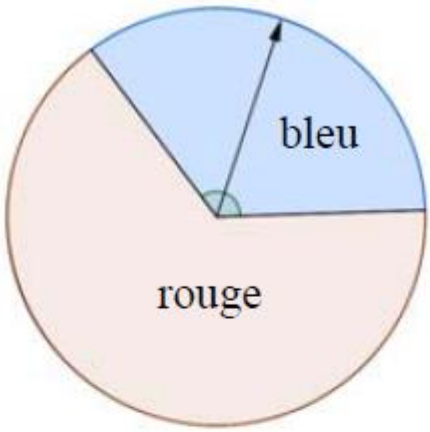
Déterminer la **loi de probabilité** de la **variable aléatoire** X qui compte le **nombre de succès** obtenus lorsque l'on fait tourner **de manière indépendante** 4 roues **identiques** à celle proposée ci-dessus. Déterminer **l'espérance mathématique** de cette variable aléatoire.

Vocabulaire

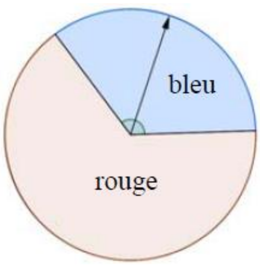
Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui ne comporte que **deux issues possibles** appelées « succès » noté S ou « échec » noté $E=\overline{S}$ de probabilités respectives p et $q=1-p$. Un **schéma de Bernoulli** est la **répétition** d'épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes** (c'est-à-dire que l'issue d'une épreuve **ne dépend pas** des épreuves précédentes).

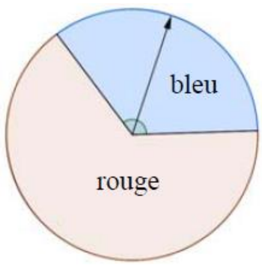
Etude d'un schéma de Bernouilli – Cas n=4

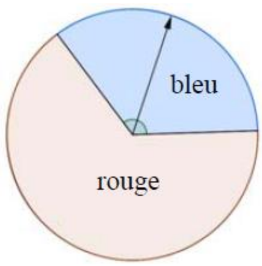
On fait maintenant tourner la roue de loterie présentée ci-contre : on obtient la couleur « Bleu » avec une probabilité qui dépend de l'angle indiqué sur la figure et qui est notée p.

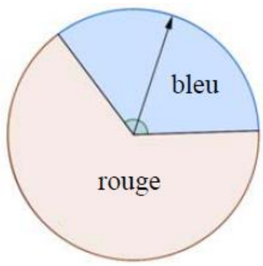


On décide de noter S (comme succès) l'éventualité « la flèche tombe sur la zone bleue » et de noter E (comme échec) l'éventualité contraire c'est-à-dire « la flèche tombe sur la zone rouge ».

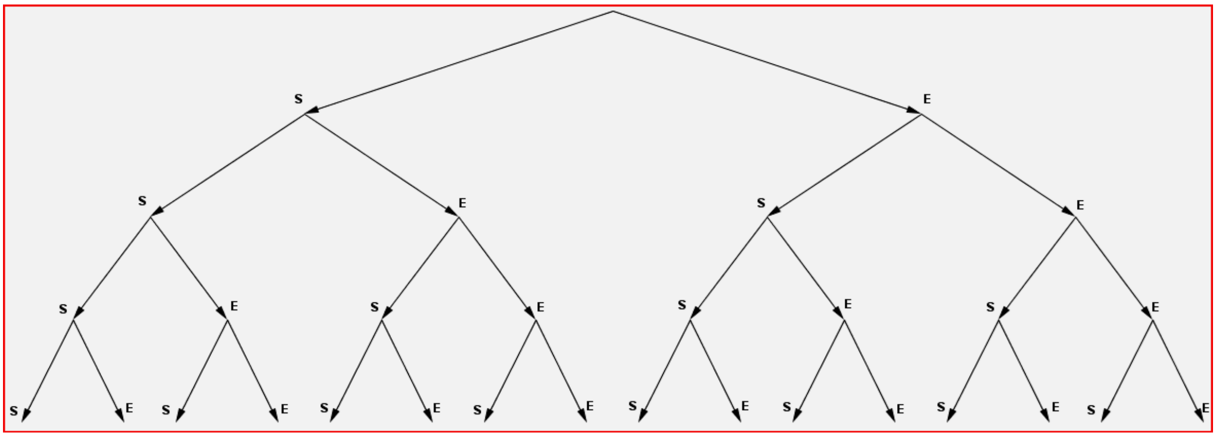








En faisant tourner ces quatre roues on se place dans le cadre d'un schéma de Bernoulli puisque l'on répète 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On dira que ce schéma de Bernoulli a pour paramètres n et p. Sauriez-vous préciser à quoi correspond le paramètre n ?



On considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenus à l'issue des 4 répétitions. A l'aide du schéma de Bernouilli présenté ci-dessus répondre aux questions :

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X en fonction de p et $q = 1 - p$.

2. La loi de probabilité ainsi construite présente cinq coefficients. A quoi correspondent-ils ?

3. Vérifier que $\sum_{k=0}^{4} p(X = k) = 1$. On pourra pour cela utiliser le fait que $q = 1 - p$.

4. A quoi correspond la quantité $\sum_{k=0}^{4} k \times p(X = k)$? Montrer que $\sum_{k=0}^{4} k \times p(X = k) = 4p$.

5. A quoi correspond la quantité $E(X^2) - E(X)^2$? Montrer que $E(X^2) - E(X)^2 = 4pq$.

Définition

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Un schéma de Bernoulli associé à n répétitions indépendantes de cette épreuve peut être représenté par un arbre pondéré qui comporte n générations. Par définition, la loi binomiale de paramètres n et p, notée $B(n, p)$ est la loi de la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès au cours des n répétitions.

Quelques cas particuliers

Calcul de $p(X = 0)$ et de $p(X = n)$:

- L'événement $\{X = 0\}$ est réalisé sur l'unique chemin de l'arbre qui ne comporte que des échecs, c'est-à-dire le dernier chemin de l'arbre qui est constitué de n branches qui ont toutes la même probabilité égale à $q = 1 - p$. D'où le résultat : $\boxed{p(X = 0) = q^n}$.

- L'événement $\{X = n\}$ est réalisé sur l'unique chemin de l'arbre qui ne comporte que des succès, c'est-à-dire le premier chemin de l'arbre qui est constitué de n branches qui ont toutes la même probabilité égale p. D'où le résultat : $\boxed{p(X = 0) = p^n}$.

Calcul de $p(X=1)$ et de $p(X=n-1)$:

- L'événement $\{X=1\}$ est réalisé sur les chemins de l'arbre qui comportent un unique succès et $n-1$ échecs. La probabilité de chacun de ces chemins est $p\times q^{n-1}$. Il reste à déterminer combien de chemins de ce type figurent dans l'arbre pondéré. Cette question est assez simple dans la mesure où il suffit de repérer à quel niveau de l'arbre figure l'unique succès. Il y a n possibilités et ainsi n chemins réalisent l'événement $\{X=1\}$. D'où le résultat $\boxed{p(X=1)=n\times p\times q^{n-1}}$.

- L'événement $\{X=n-1\}$ est réalisé sur les chemins de l'arbre qui comportent $n-1$ succès et un unique échec. La probabilité de chacun de ces chemins est $p^{n-1}\times q$. Il reste à déterminer combien de chemins de ce type figurent dans l'arbre pondéré. Cette question est assez simple dans la mesure où il suffit de repérer à quel niveau de l'arbre figure l'unique échec. Il y a n possibilités et ainsi n chemins réalisent l'événement $\{X=n-1\}$. D'où le résultat $\boxed{p(X=n-1)=n\times p^{n-1}\times q}$.

Les coefficients binomiaux

Pour déterminer $p(X=k)$, où k est un entier naturel tel que $0\leq k\leq n$, on procèderait de la même façon : la probabilité de chaque chemin qui réalise exactement k succès (et par conséquent réalise $n-k$ échecs est : $p(X=k)=p^k\times q^{n-k}$. Il faut ensuite multiplier cette probabilité par le nombre de chemins qui présentent exactement k succès et $n-k$ échecs dans l'arbre pondéré.

Soit n un entier naturel et k un entier tel que $0\leq k\leq n$.

On note $\binom{n}{k}$, et on lit « k parmi n » le nombre de chemins qui réalisent exactement k succès (et par conséquent $n-k$ échecs) dans l'arbre à n générations associé à un schéma de Bernoulli.

Ces nombres sont appelés coefficients binomiaux et correspondent au nombre de combinaisons possibles de k éléments pris dans un ensemble à n éléments (cf chapitre sur le dénombrement).

Cas particuliers

- $\boxed{\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1}$
- $\boxed{\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n}$

Symétrie

- $\boxed{\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}}$

Formule de Pascal

Si n est un entier naturel et si k est un entier tel que $0\leq k\leq n-1$ alors $\boxed{\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}}$

Cette relation (dite de « récurrence » permet de déterminer « pas à pas » la valeur des coefficients binomiaux. Pour cela on peut s'organiser dans un tableau triangulaire appelé « triangle de Pascal ».

Comprendre la formule de Pascal

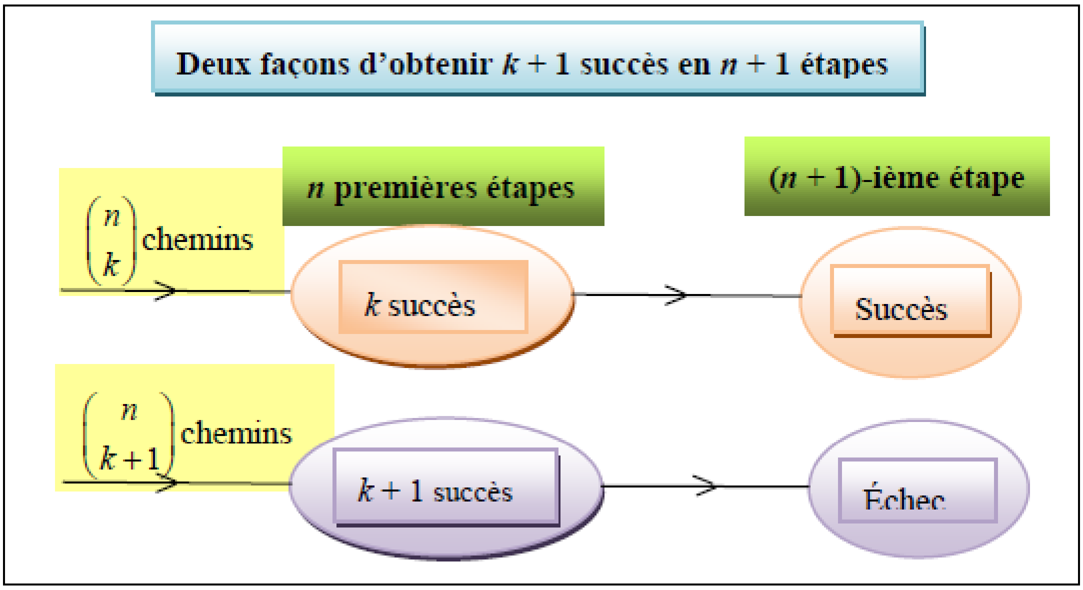
Par définition, le coefficient binomial $\binom{n+1}{k+1}$ donne le nombre de chemins qui réalisent exactement $k+1$ succès dans un arbre à $n+1$ générations associé à un schéma de Bernouilli.

Il y a deux façons d'obtenir $k+1$ succès suivant qu'à la dernière étape on obtient un succès ou bien un échec. Etudions ces deux cas de figure :

- Si la dernière étape donne un échec, il faut compter les chemins qui à la génération précédente conduisaient déjà à $k+1$ succès : $\binom{n}{k+1}$ chemins sont dans ce cas.
- Si la dernière étape donne un succès, il faut compter les chemins qui à la génération précédente conduisaient à exactement à k succès : $\binom{n}{k}$ chemins sont dans ce cas.

De cette façon on obtient l'égalité suivante : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. C'est la formule de Pascal.

Un schéma pour mieux comprendre



Somme des coefficients binomiaux

En ajoutant tous les coefficients binomiaux obtenus sur un arbre de n générations, on obtient le nombre total de chemins de l'arbre. Or cet arbre comporte n générations et à chaque génération on multiplie le nombre de chemins déjà existants par 2. Le nombre total de chemins est donc 2^n.

D'où la relation suivante : $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n}$

Retour sur la loi binomiale

On répète n fois de manière **indépendante** une **même** expérience aléatoire présentant **deux issues** S et $\overline{S}$ de probabilités respectives p et $q=1-p$. On considère la variable aléatoire X égale au **nombre de succès** S obtenus au cours de ces n expériences. La loi de probabilité de la variable aléatoire X s'appelle alors **loi binomiale** de paramètres n et p, notée $\mathrm{B}(n,p)$.

k	0	1	2	$\dots$	$n-1$	n
$p(X=k)$	$\binom{n}{0}q^n$	$\binom{n}{1}pq^{n-1}$	$\binom{n}{2}p^2q^{n-2}$	$\dots$	$\binom{n}{n-1}p^{n-1}q$	$\binom{n}{n}p^n$

On retrouve dans la loi binomiale **les coefficients binomiaux** qui correspondent au nombre de chemins de l'arbre pondéré permettant d'obtenir k « succès » au cours des n générations.

Une formule à retenir

Pour tout entier k tel que $0\le k\le n$ on a : $\boxed{p(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}}$

Propriétés

Pour une loi binomiale, l'**espérance**, la **variance** et l'**écart type** sont donnés par les formules :

$$\boxed{E(X)=n\times p} \qquad \boxed{V(X)=n\times p\times q} \qquad \boxed{\sigma(X)=\sqrt{n\times p\times q}}$$

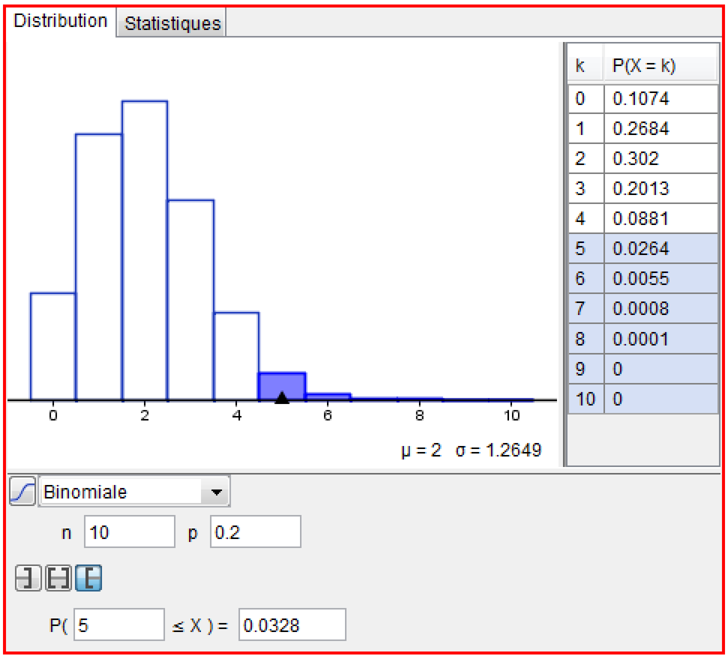
Le QCM

Un élève répond au hasard aux 10 questions d'un QCM. Pour chaque question, cinq réponses sont proposées dont une seule est exacte. X est la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ne rapporte aucun point.

Quelle est la probabilité pour cet élève d'obtenir la moyenne, c'est-à-dire d'avoir au moins 5 bonnes réponses ?

Calculer l'espérance mathématique du nombre de bonnes réponses.



Reprendre l'exercice avec un QCM comportant 10 questions et 3 réponses dont une seule exacte.
Reprendre l'exercice avec un QCM comportant 10 questions et 2 réponses dont une seule exacte.

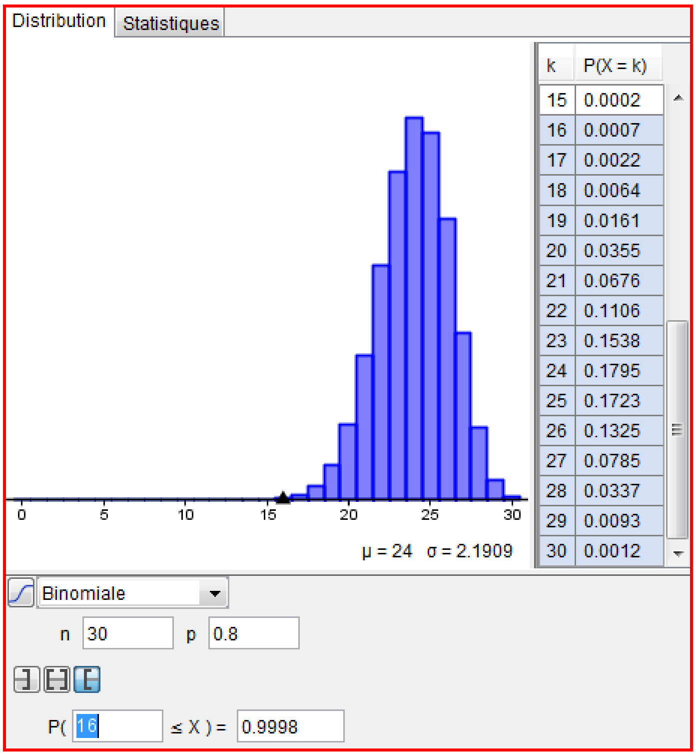
Le quorum

Une association comprenant 30 adhérents organise chaque année une assemblée générale. Les statistiques montrent que chaque adhérent assiste à l'assemblée avec la probabilité 80 %. Les décisions prises par l'assemblée n'ont de valeur légale que lorsque plus de la moitié des adhérents assiste à l'assemblée.

Quelle est la probabilité que, lors de la prochaine assemblée, le quorum soit atteint ?

Calculer l'espérance mathématique du nombre d'adhérents présents lors de la prochaine assemblée.

Reprendre le problème avec une probabilité de présence de chaque adhérent égale à 50%.

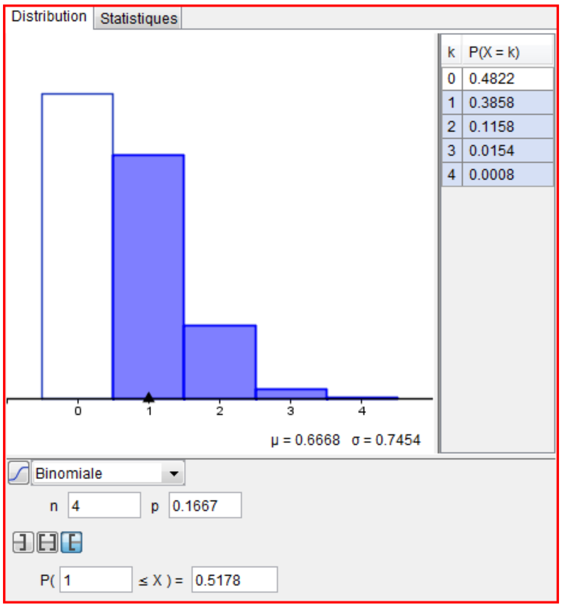


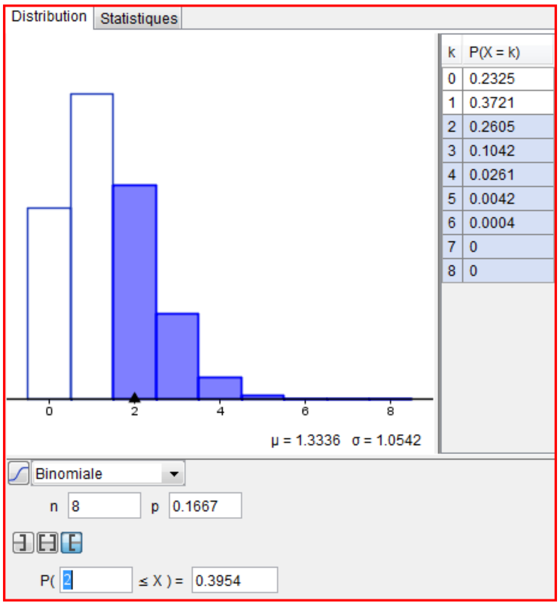
Un paradoxe

Paul affirme : « Avec un dé régulier, on a autant de chance d'obtenir au moins un six en 4 lancers que d'obtenir au moins deux six avec 8 lancers ».

Sara objecte : « Pas du tout. Dans le premier cas, la probabilité est supérieure à 0,5, dans le deuxième cas, elle est inférieure à 0,5 ».

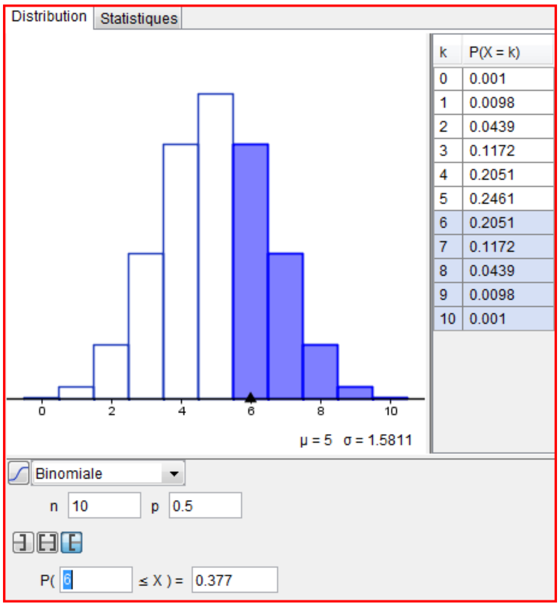
Qui a raison ?

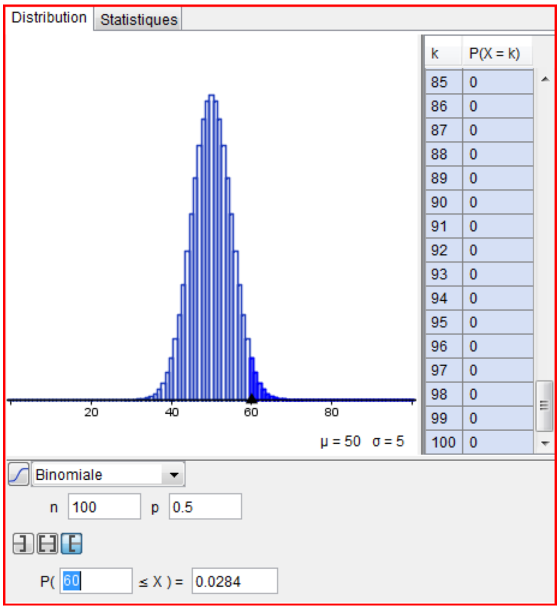




Lancers de pièce

On lance une pièce équilibrée n fois. On s'intéresse à la probabilité d'obtenir « face » dans 60 % des cas ou plus. Envisager les cas $n=10$, puis le cas $n=100$.

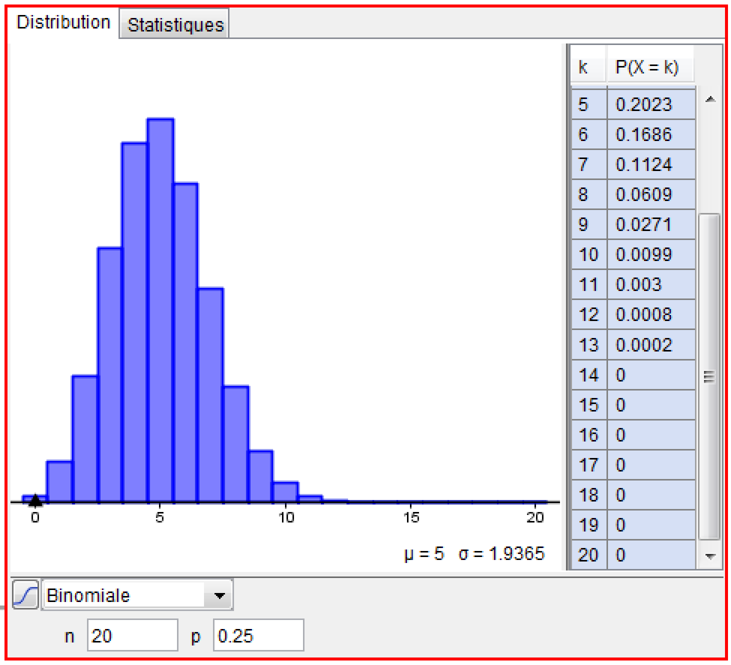




Un autre QCM

Un QCM comporte 20 questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est juste. Chaque réponse juste rapporte un point et il n'y a pas de pénalité pour une réponse fausse. Un candidat répond au hasard à chaque question. Quel nombre total de points peut-il espérer ?

Quelle pénalité doit-on attribuer à une réponse fausse pour que le total espéré, en répondant entièrement au hasard, soit égal à 2 sur 20 ?



Parier avec avantage

Avec un seul dé

On joue dans un premier temps avec un dé à six faces bien équilibré. On note X le nombre de six obtenus au cours des n lancers. Quel type de loi suit la variable aléatoire X ? Déterminer, en fonction de n, la probabilité d'obtenir au moins un six au cours des n lancers. Déterminer la valeur de n à partir de laquelle on pourra « parier avec avantage » sur l'obtention d'un six.

Avec deux dés

On joue maintenant avec deux dés à six faces bien équilibrés. On note X le nombre de double six obtenus au cours des n lancers. Quel type de loi suit la variable aléatoire X ? Déterminer, en fonction de n, la probabilité d'obtenir au moins un double six au cours des n lancers. Déterminer la valeur n à partir de laquelle on pourra « parier avec avantage » sur l'obtention d'un double six.

Note historique

En 1654, le Chevalier de Méré a posé à Pascal le problème suivant :

Supposons qu'on joue plusieurs fois de suite avec deux dés, combien faut-il de coups pour qu'on puisse parier avec avantage que, après avoir joué ces coups on aura amené **« sonnez ! »** ?

On précise que **« sonnez ! »** correspond à l'obtention d'un double six et que **« parier avec avantage »** correspond à une probabilité supérieure à une chance sur deux, plus grande que 0,5.

Extrait du sujet 0

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

- la formation avec conduite accompagnée,
- la formation traditionnelle.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire.

- 75 personnes ont suivi une formation avec conduite accompagnée ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.

- 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation traditionnelle ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré. On considère les évènements suivants : A = « la personne a suivi une formation avec conduite accompagnée »; R1 = « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ; R2 = « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation » ; R3 :=« la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec conduite accompagnée et réussi l'examen à sa deuxième présentation.

3. Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à 1/3.

4. La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec conduite accompagnée ?

On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite. Ainsi, X = 1 correspond à l'évènement R1.

5. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

6. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire.
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe. On admet que la probabilité de l'évènement R3 est égale à 1/6.

7. Dans le contexte de cette question, préciser un évènement dont la probabilité est égale à $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

On considère la fonction Python seuil ci-dessous, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle]0 ; 1[.

```
def seuil(p) :
    n = 1
    while 1-(5/6)**n <= p :
        n = n+1
    return n
```

8. Quelle est la valeur renvoyée par la commande seuil(0,9) ?
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Extrait du sujet 1

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.

- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier »,
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école ».

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.

2. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,24.

3. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à 0,24. On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

4. Quels sont les paramètres de cette loi ? Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième. Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.

Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul. On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

5. Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école. À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à 0,99 ?

Extrait du sujet 2

Une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système permet de reconnaître 97 % des adresses. Le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible, est orienté vers un employé. Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses. On admet que X suit la loi binomiale de paramètres n=9 et p=0,03.

1. La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

   a. 0 **b.** 1 **c.** $0,24$ **d.** $0,76$

2. La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

   a. $\binom{9}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$ **b.** $\binom{7}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$
   c. $\binom{9}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$ **d.** $\binom{7}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$

3. La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :

   a. $P(X < 1)$ **b.** $P(X \leqslant 1)$ **c.** $P(X \geqslant 2)$ **b.** $1 - P(X = 0)$

Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules blanches, indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne. On considère les évènements suivants : V1 = « la première boule tirée est verte », B1 = « la première boule tirée est blanche », V2 = « la seconde boule tirée est verte », B2 = « la seconde boule tirée est blanche ».

4. La probabilité de V2 sachant que V1 est réalisé est égale à :

   a. $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{4}{7}$ **c.** $\frac{5}{14}$ **d.** $\frac{20}{56}$

5. La probabilité de l'évènement V2 est égale à :

   a. $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{5}{7}$ **c.** $\frac{3}{28}$ **d.** $\frac{9}{7}$