Généralités et rappels sur les probabilités

Probabilité conditionnelle

P est une loi de probabilité définie sur un univers Ω.

Définition

Soient A et B deux évènements avec $P(\mathrm{A}) \neq 0$

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$$

$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ se lit « P de B sachant A ».

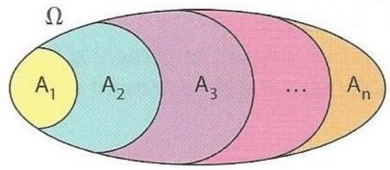
Propriétés

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.

- $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$
  $= P(\mathrm{B}) \times P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$
- $P_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$

Partition de l'univers

On dit que des évènements non vides $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ de Ω constituent une **partition** de Ω lorsque ces évènements sont deux à deux disjoints et que leur réunion constitue Ω.



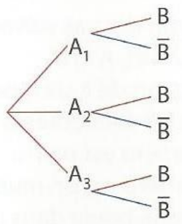
Formule des probabilités totales

P est une loi de probabilité définie sur un univers Ω.

Soient B un évènement et $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ des évènements formant une partition de Ω.

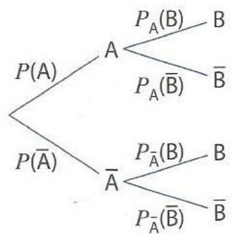
$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}) + P(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}) + \ldots + P(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{B})$$

Dans un arbre, la probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des chemins correspondant à cet évènement.



Arbre pondéré

P est une loi de probabilité définie sur un univers Ω.



Propriétés

- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur ce chemin.

Généralités et rappels sur l'indépendance d'événements

Indépendance

P est une loi de probabilité définie sur un univers Ω.

Définitions

- Deux **évènements A et B sont indépendants** lorsque $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B})$.
- Lorsque deux expériences aléatoires se succèdent et que les résultats de la première expérience n'ont aucune influence sur les résultats de la seconde, on dit que c'est une succession **d'épreuves indépendantes**.

Propriétés

A et B deux évènements de probabilités non nulles.

- A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A})$
  $\Leftrightarrow P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B})$
- Si A et B sont deux évènements indépendants, alors $\overline{\mathrm{A}}$ et B le sont également.

Succession d'épreuves indépendantes

Représenter une succession d'épreuves indépendantes

- Si l'expérience aléatoire est une succession de n épreuves indépendantes E_i d'univers respectifs $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$, l'univers des issues possibles est :

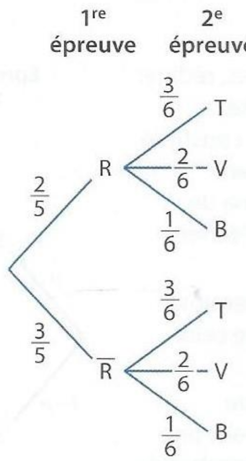
$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n.$$

- Une issue de l'expérience est un n-uplet $(i_1 ; i_2 ; i_3 ; \ldots ; i_n)$, où i_p est une issue de l'épreuve E_p.

Calculer la probabilité d'une issue $(i_1 ; i_2 ; i_3 ; \ldots ; i_n)$

Lors d'une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(i_1 ; i_2 ; i_3 ; \ldots ; i_n)$ est égale au produit des probabilités de chacune des issues du n-uplet.

Exemple :



$(R ; T) \longrightarrow P((R ; T)) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

$(R ; V) \longrightarrow P((R ; V)) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

$(R ; B) \longrightarrow P((R ; B)) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

$(\overline{R} ; T) \longrightarrow P((\overline{R} ; T)) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

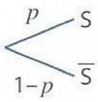
$(\overline{R} ; V) \longrightarrow P((\overline{R} ; V)) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

$(\overline{R} ; B) \longrightarrow P((\overline{R} ; B)) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Reconnaître un schéma de Bernoulli

- Une **épreuve de Bernoulli de paramètre** p est une expérience aléatoire ayant deux issues : l'une nommée « succès » (noté S) de probabilité p, et l'autre nommé « échec » (noté $\overline{S}$) de probabilité $1 - p$.



- Lorsqu'on répète n fois, de façon indépendante, cette épreuve de Bernoulli, on obtient un **schéma de Bernoulli de paramètres** n **et** p.

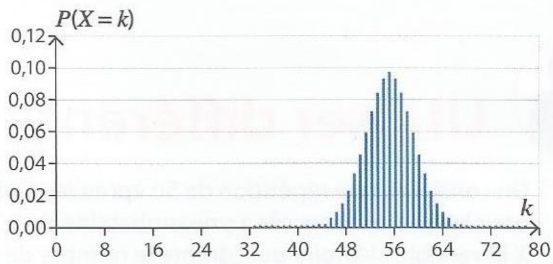
Calculer la probabilité de k succès avec la loi binomiale

- Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, la variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus au cours des n répétitions suit la **loi binomiale de paramètres** n **et** p, notée $\mathscr{B}(n ; p)$.

Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Exemple : $\mathscr{B}(80 ; 0{,}7)$



- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$