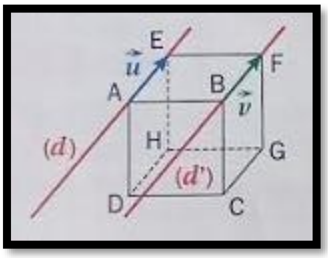
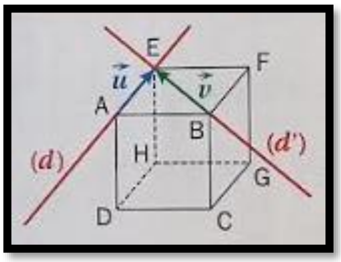
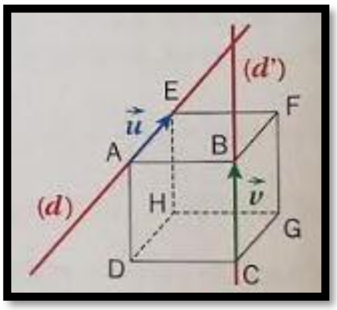
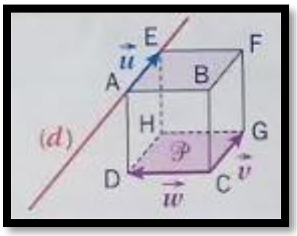
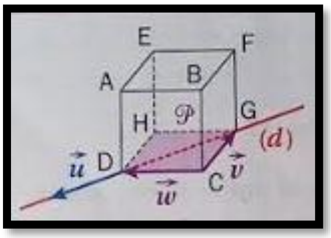
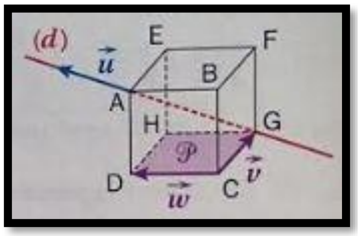
Position relative de deux droites

<u>Définitions et propriétés :</u> Deux droites de l'espace sont coplanaires si elles appartiennent à un même plan. d et d' sont deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors d et d' sont parallèles. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors d et d' sont sécantes lorsqu'elles ont un point en commun, sinon elles sont non coplanaires.

Droites coplanaires		Droites non coplanaires
Droites parallèles	Droites sécantes	
		
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinaires	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinaires	

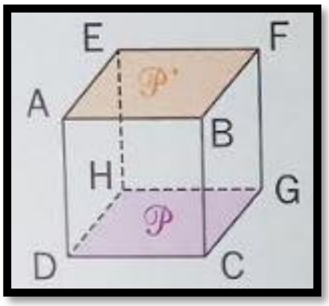
Position relative d'une droite et d'un plan

<u>Définitions et propriétés :</u> Une droite de l'espace de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan de l'espace de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont parallèles si les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. Si en plus elles ont un point commun, alors on dit que la droite est incluse dans le plan. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires alors droite plan sont sécants en un point.

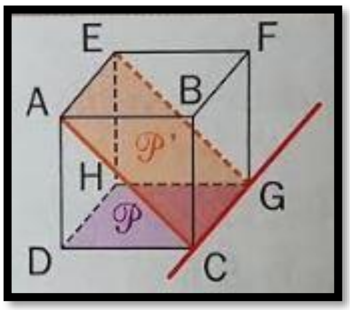
Droite et plan parallèles		Droite et plan sécants
		
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires		$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non coplanaires

Position relative de deux plans de l'espace

<u>Définitions et propriétés :</u> Deux plans de l'espace sont parallèles si deux vecteurs directeurs de l'un peuvent être deux vecteurs directeurs de l'autre. Si deux plans de l'espace ne sont pas parallèles alors ils sont sécants. Leur intersection est une droite.



Plans parallèles



Plans sécants

Vrai ou faux ?

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Il n'est pas demandé de justifier.

- « Deux points quelconques de l'espace sont toujours alignés ».
- « Trois points quelconques de l'espace sont toujours alignés ».
- « Deux vecteurs quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Trois vecteurs quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Trois points quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Quatre points quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Une droite et un point quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Une droite et deux points quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Deux droites sécantes de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Deux droites parallèles de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Deux droites quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan coupant l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles ».

Vrai ou faux ? Encore…

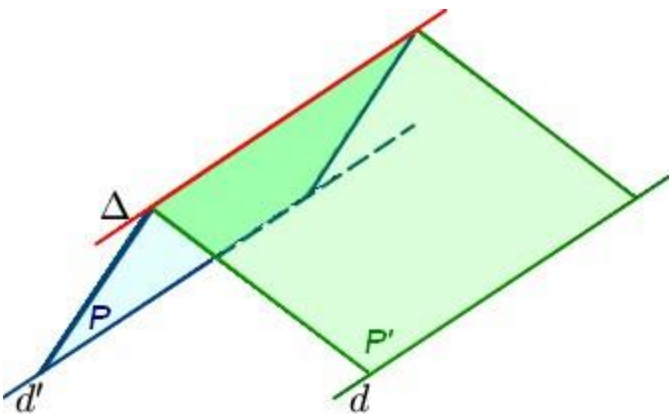
- « Trois points coplanaires sont toujours alignés ».
- « Trois points alignés sont toujours coplanaires ».
- « Quatre points non alignés forment toujours un plan ».
- « Deux vecteurs quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Trois vecteurs quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».

Vrai ou faux ? Toujours…

- « Par un point, on ne peut mener qu'une seule droite parallèle à une droite donnée ».
- « Si 2 plans sont parallèles alors toute droite de l'un est parallèle à toute droite de l'autre ».
- « Si deux plans sont parallèles, alors toute droite de l'un est parallèle à l'autre plan ».
- « Deux droites parallèles à un même plan sont parallèles entre elles ».
- « Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan coupant l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles ».

Vrai ou faux ? Pour finir…

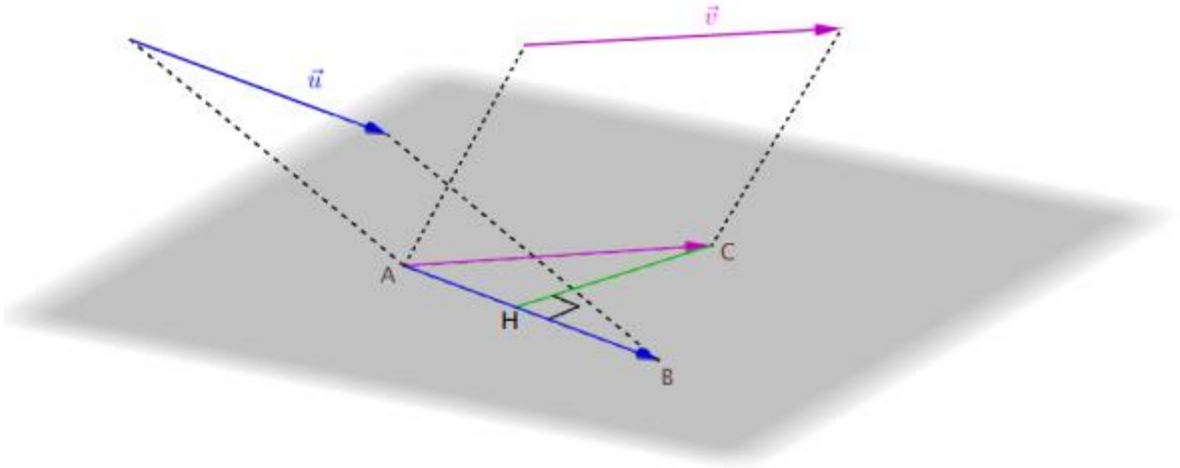
« Soient P et P' deux plans. Soient (d) une droite incluse dans P et (d') une droite incluse dans P' telles que (d) et (d') soient parallèles. Si P et P' sont sécants en une droite (Δ) alors (Δ) est parallèle à (d) et à (d') ».



Que pensez-vous de cette affirmation ?

Produit scalaire dans l'espace

Définition : le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est un nombre réel qui se note « $\vec{u}\cdot\vec{v}$ », se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » et qui est égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant la même origine.



Remarque : on peut donc utiliser dans l'espace les définitions et propriétés du produit scalaire valables dans le plan (ABC) où se situent les représentants des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En particulier on a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\begin{cases}AB\times AH \text{ si l'angle est aigu}\\ -AB\times AH \text{ si l'angle est obtus}\end{cases}$. Avec H projeté orthogonal su point C sur la droite (AB).

Propriétés : soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

$\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|^2$	$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$	$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$	$k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)=\left(k\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right)$
Carré scalaire	*Symétrie*	*Distributivité*	*Associativité*

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2}{2}$	$\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2}{2}$	$\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2}{4}$
Formule de polarisation	*Formule de polarisation*	*Formule de polarisation*

Vecteurs orthogonaux et base orthonormée de l'espace

Définition : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont orthogonaux lorsque $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, on note $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Définition : une base orthonormée de l'espace est une base telle que les trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux et tous de norme 1. C'est-à-dire $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est une base orthonormée de l'espace si et seulement si $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$ et $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=\left\|\vec{k}\right\|=1$.

Propriétés : dans une base orthonormée de l'espace, pour tout vecteur $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ de l'espace on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$. On a aussi $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Orthogonalité de deux droites

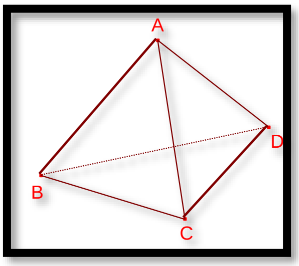
Définition : deux droites (d) et (d') de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le sont aussi, c'est-à-dire si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarques : deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires. Dans l'espace, deux droites sont perpendiculaires si et seulement si elles sont sécantes selon un angle droit. C'est un cas particulier de l'orthogonalité. Ainsi, l'affirmation « si deux droites sont perpendiculaires alors elles sont orthogonales » est vraie. Cependant, l'affirmation réciproque est fausse.

Exercice d'application directe

On considère $ABCD$ **un tétraèdre régulier** de côté a. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. Que peut-on dire des deux droites de l'espace (AB) et (CD) ?



Orthogonalité d'un plan et d'une droite

Définition : un plan (P) de base $(\vec{u};\vec{v})$ et une droite (d) de vecteur directeur $\vec{w}$ sont orthogonaux (ou perpendiculaires) si et seulement si $\vec{w}$ est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

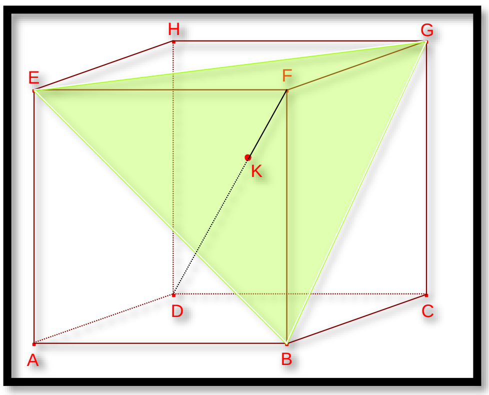
Vocabulaire : on dit dans ce cas-là que le vecteur $\vec{w}$ et normal au plan (P).

Remarques : on peut donc dire qu'une droite est orthogonale (ou perpendiculaire) à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites non parallèles (et donc sécantes) de ce plan. On peut également en déduire que si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale toute droite de ce plan.

Exercice d'application directe

Sans repère

Par décomposition du vecteur $\overrightarrow{FD}$, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{EB}$. Par décomposition du vecteur $\overrightarrow{FD}$, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{EG}$. En déduire que la droite (FD) est orthogonale au plan (BEG).



Avec repère

En se plaçant dans le repère orthonormal $(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH})$ déterminer les coordonnées des trois vecteurs $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$. En déduire que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BEG).

Base et repère de l'espace

Définitions : Une base de l'espace est formée d'un triplet $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ de vecteurs non coplanaires. Les vecteurs d'une base sont tous non nuls et non colinéaires deux à deux. Un repère de l'espace est formé d'un point O, origine du repère et d'une base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On le note $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

Propriété et définition : Soit $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de nombres réels tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Ce triplet est appelé « coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ». On note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

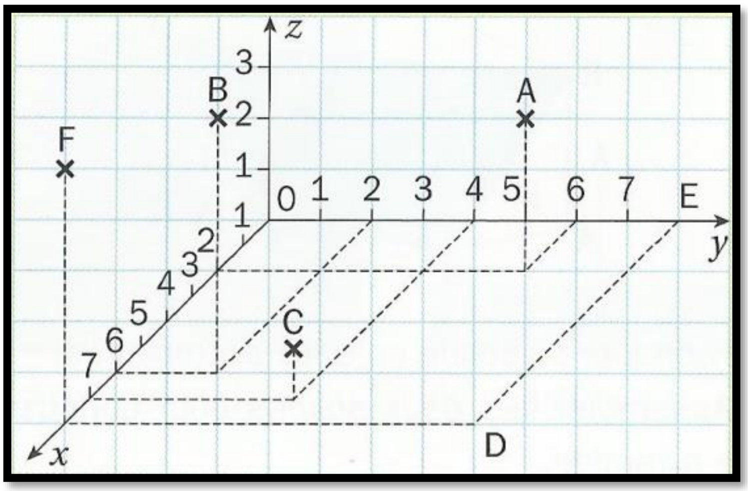
Propriété et définition : Soit $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ un repère de l'espace. Pour tout vecteur M de l'espace il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de nombres réels tels que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Ce triplet est appelé « coordonnées du point M dans la base $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ». On note $M(x;y;z)$ et on appelle x « l'abscisse », y « l'ordonnée » et z « la côte » du point M dans ce repère.

Exemples :

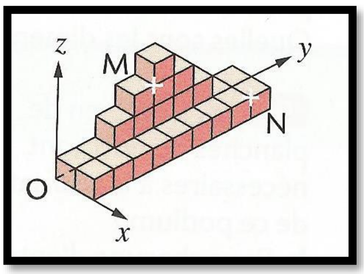
On considère un repère de l'espace constitué d'une origine et de trois axes :

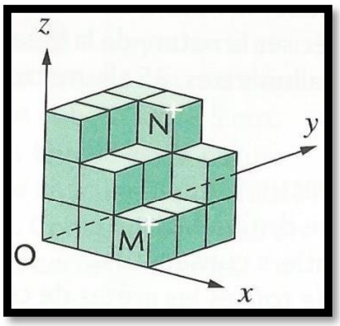
- Les abscisses sont sur l'axe (Ox),
- Les ordonnées sont sur l'axe (Oy),
- Les altitudes sont sur l'axe (Oz).

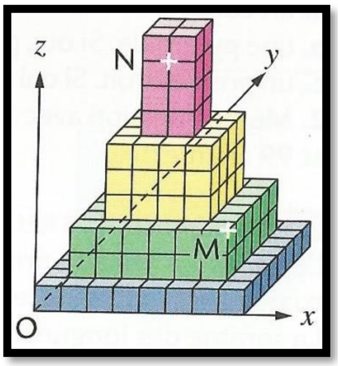
Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E et F.



Déterminer dans chaque cas les coordonnées des points M et N.







Coordonnées d'un vecteur, coordonnées d'un milieu, colinéarité

Propriétés : Soit $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ un repère de l'espace. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs. Soient $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$ deux points. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$.

Les coordonnées du milieu du segment [AB] sont $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un nombre réel α tel que $\vec{v}=\alpha\vec{u}$ avec $x'=\alpha x$, $y'=\alpha y$ et $z'=\alpha z$.

Vecteurs de l'espace colinéaires ? Points de l'espace alignés ?

- Les couples de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ proposés ci-dessous sont-ils colinéaires ? Justifier.

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-3\\12\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ avec $A(2;2;-4)$ $B(5;-4;8)$ $C(3;-4;12)$ $D(-2;6;-8)$

- Les points de l'espace $M(2;-1;5)$, $N(-1;2;0)$ et $P(5;-4;10)$ sont-ils alignés ? Justifier.

- Les points de l'espace $A(2;3;-1)$, $B(1;-2;3)$ et $C(0;1;-2)$ sont-ils alignés ? Justifier.

Détermination d'un angle dans l'espace

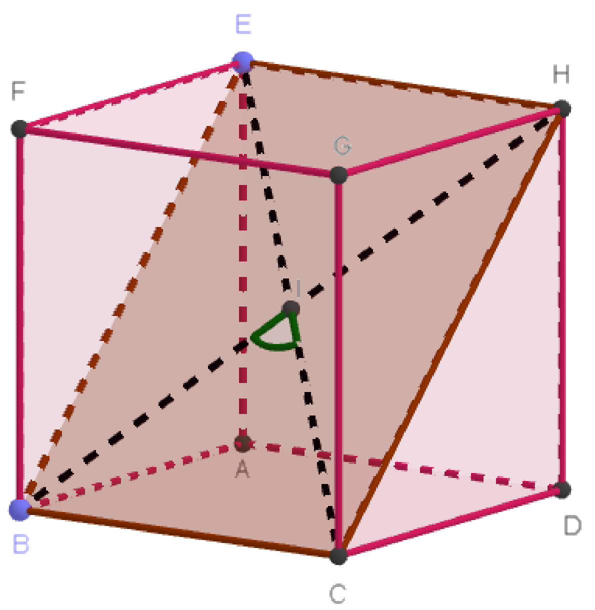
ABCDEFGH est un cube. Les diagonales du cube [CE] et [BH] se coupent en leur milieu, au point appelé I.

On travaille dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des sommets du cube et celles du point I.

2. Calculer de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}$.

3. En déduire une mesure de l'angle de l'espace $\widehat{BIC}$.

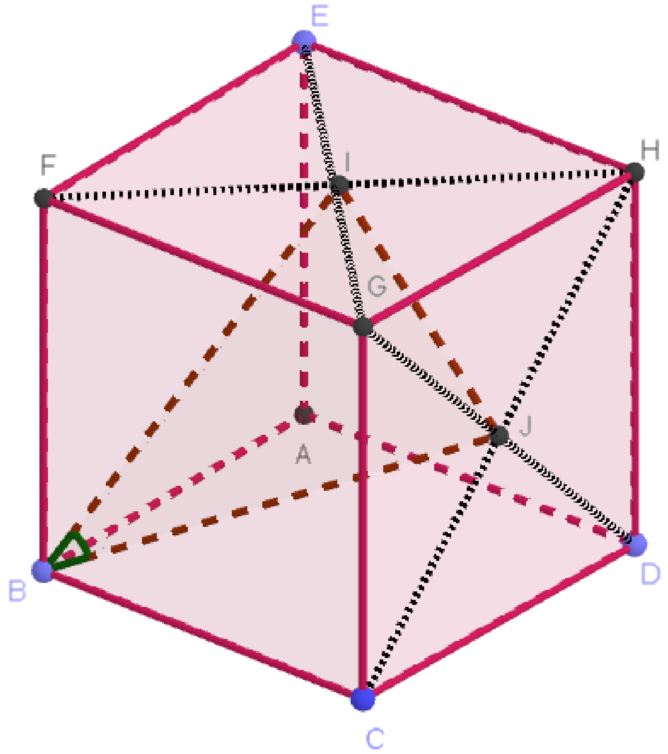


Détermination d'un angle dans l'espace, encore

ABCDEFGH est un cube. Les diagonales de la face du dessus [GE] et [FH] se coupent en leur milieu, au point I. Les diagonales de la face d'une face latérale [DG] et [CH] se coupent en leur milieu, au point J.

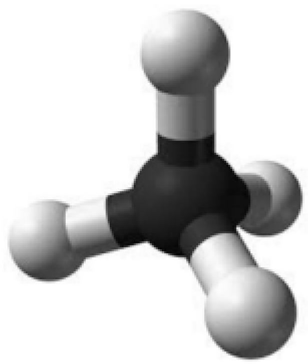
On travaille dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

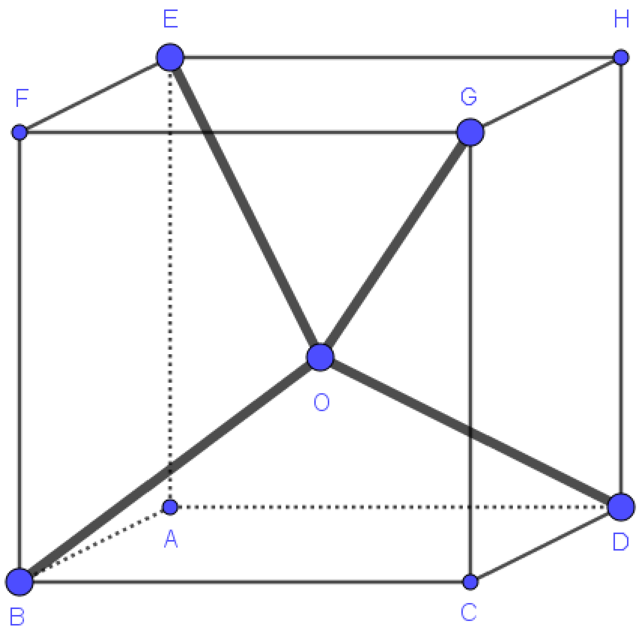
1. Déterminer les coordonnées des sommets du cube et des points I et J.
2. Calculer de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BJ}$.
3. En déduire une mesure de l'angle de l'espace IBJ.



Détermination d'un angle dans l'espace, toujours

Les interactions électriques conduisent à modéliser la molécule de méthane CH4 de la façon suivante : on considère un cube ABCDEFGH, on place les quatre noyaux des atomes d'hydrogène sur les sommets B, D, G et E.



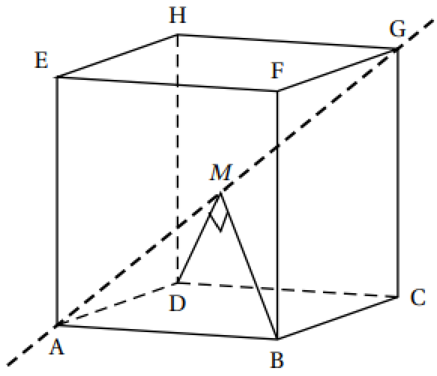


On place ensuite le noyau de l'atome de carbone au centre du cube de coté 1 comme l'indique la figure proposée ci-dessus. De cette façon le noyau de carbone, au centre de la molécule, se situe à égale distance des quatre atomes d'hydrogène. L'objectif est ici de déterminer une mesure de l'angle entre deux liaisons carbone-hydrogène, par exemple une mesure de l'angle DOG. On se place pour cela dans le repère orthonormé de l'espace $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$. Donner les coordonnées des points B, D, G, E et O. Calculer de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OG}$ et en déduire l'angle DOG.

Des angles et des distances dans l'espace

On considère ci-dessous ABCDEFGH un cube de coté 1. M est un point du segment [AG]. Etant donné l'alignement des points A, M et G, il existe un réel $x \in [0;1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AG}$.

Des angles



On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ et on s'intéresse à la position du point M sur le segment [AG] pour laquelle l'angle DMB est un angle droit

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM}$ et celles du vecteur $\overrightarrow{BM}$. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{BM}$ en fonction de x.

2. En déduire les valeurs de x pour lesquelles l'angle DMB est un angle droit. Quelles sont les coordonnées des deux points M correspondants ? Lorsque $x = 1$, quelle est la position du point M et quelle est la mesure de l'angle DMB ?

Des distances

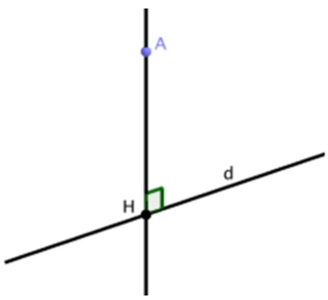
On se place toujours dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ et on s'intéresse à la position du point M sur le segment [AG] pour laquelle la distance CM est minimale. On pose $f(x) = CM^2$.

3. Déterminer, en fonction de x, l'expression algébrique $f(x)$.

4. Pour quelle valeur de x la fonction $f(x)$ est-elle minimale ?
   En déduire les coordonnées de M qui minimisent la distance CM.
   Sauriez-vous en déduire une mesure de l'angle DMB et de l'angle CMA correspondant ?

Distances dans l'espace, deux définitions pour terminer

Distance d'un point à une droite : dans l'espace, la distance d'un point A à une droite d est la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur d.



Distance d'un point à un plan : dans l'espace, la distance d'un point A à un plan P est la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur P.