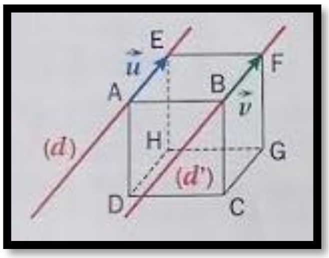
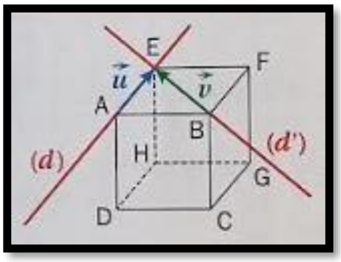
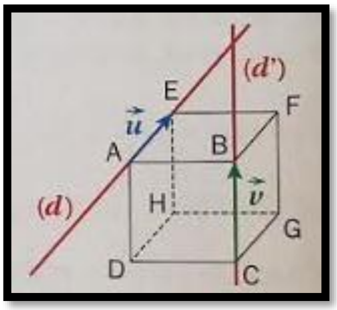
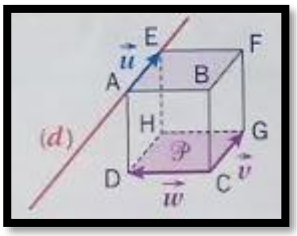
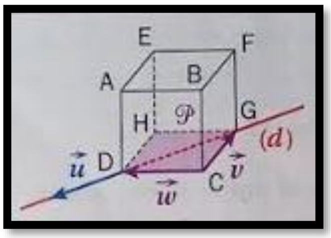
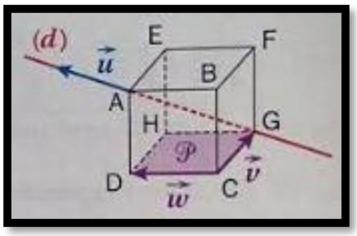
Position relative de deux droites

<u>Définitions et propriétés :</u> Deux droites de l'espace sont coplanaires si elles appartiennent à un même plan. d et d' sont deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors d et d' sont parallèles. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors d et d' sont sécantes lorsqu'elles ont un point en commun, sinon elles sont non coplanaires.

<table>
<tr><td colspan="2">Droites coplanaires</td><td rowspan="2">Droites non coplanaires</td></tr>
<tr><td>Droites parallèles</td><td>Droites sécantes</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinaires</td><td colspan="2">$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinaires</td></tr>
</table>

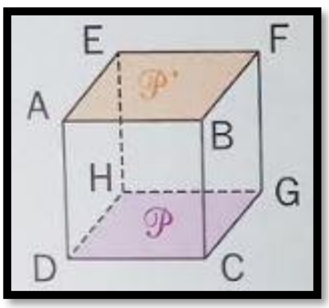
Position relative d'une droite et d'un plan

<u>Définitions et propriétés :</u> Une droite de l'espace de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan de l'espace de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont parallèles si les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. Si en plus elles ont un point commun, alors on dit que la droite est incluse dans le plan. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires alors droite plan sont sécants en un point.

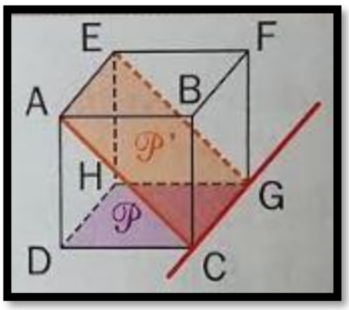
<table>
<tr><td colspan="2">Droite et plan parallèles</td><td>Droite et plan sécants</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires</td><td>$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non coplanaires</td></tr>
</table>

Position relative de deux plans de l'espace

<u>Définitions et propriétés :</u> Deux plans de l'espace sont parallèles si deux vecteurs directeurs de l'un peuvent être deux vecteurs directeurs de l'autre. Si deux plans de l'espace ne sont pas parallèles alors ils sont sécants. Leur intersection est une droite.



Plans parallèles



Plans sécants

Vrai ou faux ?

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Il n'est pas demandé de justifier.

- « Deux points quelconques de l'espace sont toujours alignés ».
- « Trois points quelconques de l'espace sont toujours alignés ».
- « Deux vecteurs quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Trois vecteurs quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Trois points quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Quatre points quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Une droite et un point quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Une droite et deux points quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Deux droites sécantes de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Deux droites parallèles de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Deux droites quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan coupant l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles ».

Vrai ou faux ? Encore…

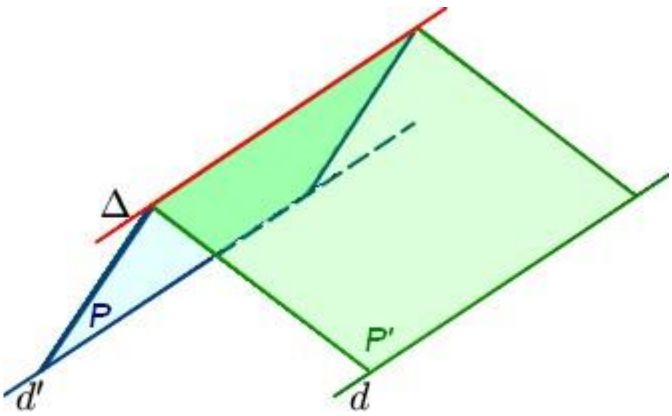
- « Trois points coplanaires sont toujours alignés ».
- « Trois points alignés sont toujours coplanaires ».
- « Quatre points non alignés forment toujours un plan ».
- « Deux vecteurs quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».
- « Trois vecteurs quelconques de l'espace sont toujours coplanaires ».

Vrai ou faux ? Toujours…

- « Par un point, on ne peut mener qu'une seule droite parallèle à une droite donnée ».
- « Si 2 plans sont parallèles alors toute droite de l'un est parallèle à toute droite de l'autre ».
- « Si deux plans sont parallèles, alors toute droite de l'un est parallèle à l'autre plan ».
- « Deux droites parallèles à un même plan sont parallèles entre elles ».
- « Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan coupant l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles ».

Vrai ou faux ? Pour finir…

« Soient P et P' deux plans. Soient (d) une droite incluse dans P et (d') une droite incluse dans P' telles que (d) et (d') soient parallèles. Si P et P' sont sécants en une droite (Δ) alors (Δ) est parallèle à (d) et à (d') ».



Que pensez-vous de cette affirmation ?

Base et repère de l'espace

Définitions : Une base de l'espace est formée d'un triplet $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ de vecteurs non coplanaires. Les vecteurs d'une base sont tous non nuls et non colinéaires deux à deux. Un repère de l'espace est formé d'un point O, origine du repère et d'une base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On le note $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

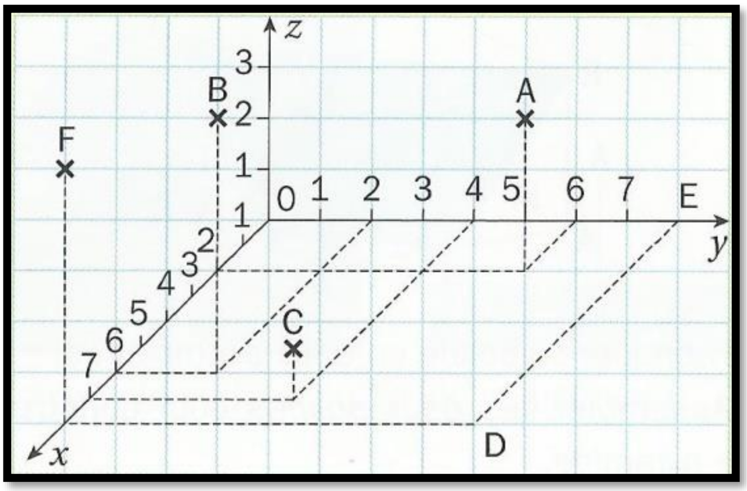
Propriété et définition : Soit $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de nombres réels tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Ce triplet est appelé « coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ». On note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Propriété et définition : Soit $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ un repère de l'espace. Pour tout vecteur M de l'espace il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de nombres réels tels que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Ce triplet est appelé « coordonnées du point M dans la base $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ». On note $M(x;y;z)$ et on appelle x « l'abscisse », y « l'ordonnée » et z « la côte » du point M dans ce repère.

Exemples :

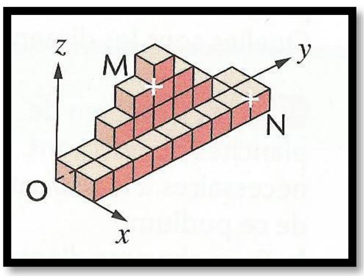
On considère un repère de l'espace constitué d'une origine et de trois axes :

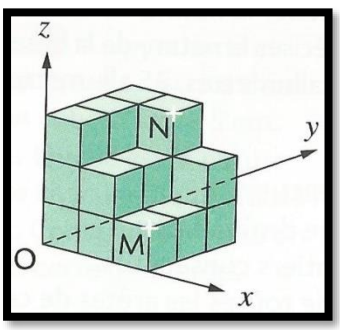
- Les abscisses sont sur l'axe (Ox),
- Les ordonnées sont sur l'axe (Oy),
- Les altitudes sont sur l'axe (Oz).

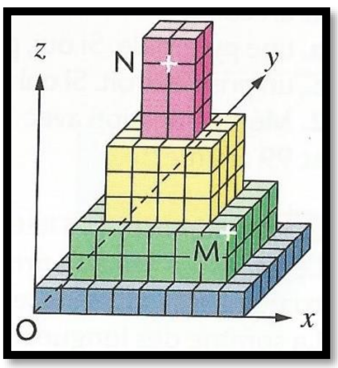


Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E et F.

Déterminer dans chaque cas les coordonnées des points M et N.







Coordonnées d'un vecteur, coordonnées d'un milieu, colinéarité

Propriétés : Soit $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ un repère de l'espace. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Soient $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$ deux points. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du milieu du segment [AB] sont $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un nombre réel α tel que $\vec{v}=\alpha\vec{u}$ avec $x'=\alpha x$, $y'=\alpha y$ et $z'=\alpha z$.

Vecteurs de l'espace colinéaires ?

Les couples de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ proposés ci-dessous sont-ils colinéaires ? Dans chaque situation préciser de manière détaillée et complète pourquoi.

$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ avec $A(2;2;-4)$ $B(5;-4;8)$ $C(3;-4;12)$ $D(-2;6;-8)$

Points de l'espace alignés ?

Situation 1

Les points de l'espace $M(2;-1;5)$, $N(-1;2;0)$ et $P(5;-4;10)$ sont-ils alignés ? Justifier.
Déterminer les coordonnées du point Q de l'espace tel que MNPQ soit un parallélogramme.

Situation 2

Les points de l'espace $A(2;3;-1)$, $B(1;-2;3)$ et $C(0;1;-2)$ sont-ils alignés ? Justifier.
Déterminer les coordonnées du point D de l'espace tel que ABCD soit un parallélogramme.

Situation 3

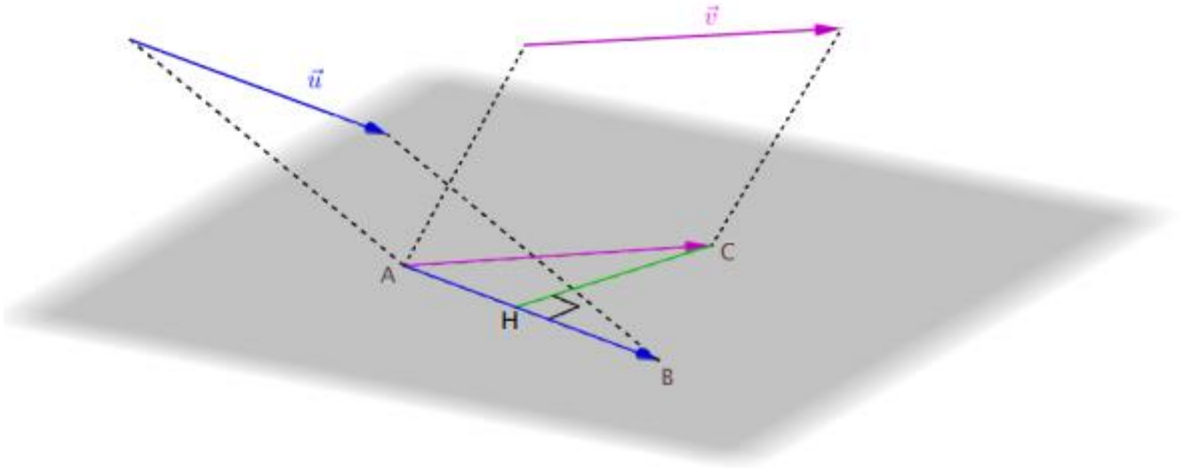
Existe-t-il des nombres réels x et y tels que les points $A(2;4;0)$, $B(1;y;3)$ et $C(x;2;-1)$ soient alignés ?

Situation 4

Existe-t-il une valeur de x pour laquelle $\vec{u}\begin{pmatrix} x-2 \\ x \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ x \end{pmatrix}$ soient colinéaires ?

Produit scalaire dans l'espace

Définition : le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est un nombre réel qui se note « $\vec{u}\cdot\vec{v}$ », se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » et qui est égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant la même origine.



Remarque : on peut donc utiliser dans l'espace les définitions et propriétés du produit scalaire valables dans le plan (ABC) où se situent les représentants des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En particulier on a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\begin{cases}AB\times AH \text{ si l'angle est aigu}\\ -AB\times AH \text{ si l'angle est obtus}\end{cases}$.

Avec H projeté orthogonal su point C sur la droite (AB).

Propriétés : soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

$\vec{u}^{\,2}=\vec{u}\cdot\vec{u}=\left\Vert\vec{u}\right\Vert^2$	$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$	$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$	$k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)=\left(k\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right)$
Carré scalaire	*Symétrie*	*Distributivité*	*Associativité*

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{\left\Vert\vec{u}+\vec{v}\right\Vert^2-\left\Vert\vec{u}\right\Vert^2-\left\Vert\vec{v}\right\Vert^2}{2}$	$\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{\left\Vert\vec{u}\right\Vert^2+\left\Vert\vec{v}\right\Vert^2-\left\Vert\vec{u}-\vec{v}\right\Vert^2}{2}$	$\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{\left\Vert\vec{u}+\vec{v}\right\Vert^2-\left\Vert\vec{u}-\vec{v}\right\Vert^2}{4}$
Formule de polarisation	*Formule de polarisation*	*Formule de polarisation*

Vecteurs orthogonaux et base orthonormée de l'espace

Définition : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont orthogonaux lorsque $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, on note $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Définition : une base orthonormée de l'espace est une base telle que les trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux et tous de norme 1. C'est-à-dire $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est une base orthonormée de l'espace si et seulement si $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$ et $\left\Vert\vec{i}\right\Vert=\left\Vert\vec{j}\right\Vert=\left\Vert\vec{k}\right\Vert=1$.

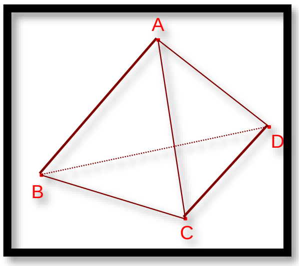
Propriétés : dans une base orthonormée de l'espace, pour tout vecteur $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ de l'espace on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$. On a aussi $\left\Vert\vec{u}\right\Vert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Orthogonalité de deux droites

Définition : deux droites (d) et (d') de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le sont aussi, c'est-à-dire si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Remarques : deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires. Dans l'espace, deux droites sont perpendiculaires si et seulement si elles sont sécantes selon un angle droit. C'est un cas particulier de l'orthogonalité. Ainsi, l'affirmation « si deux droites sont perpendiculaires alors elles sont orthogonales » est vraie. Cependant, l'affirmation réciproque est fausse.

Exercice d'application directe



On considère $ABCD$ **un tétraèdre régulier** de côté a. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$. Que peut-on dire des deux droites de l'espace (AB) et (CD) ?

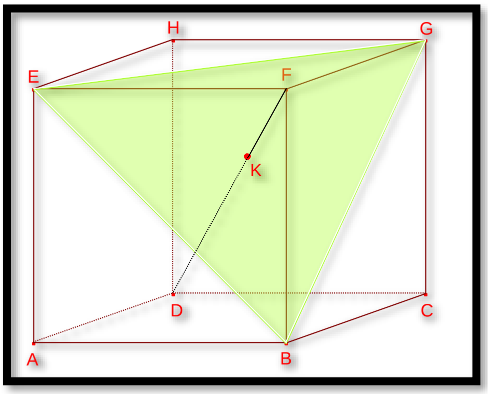
Orthogonalité d'un plan et d'une droite

Définition : un plan (P) de base $(\vec{u};\vec{v})$ et une droite (d) de vecteur directeur $\vec{w}$ sont orthogonaux (ou perpendiculaires) si et seulement si $\vec{w}$ est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

Vocabulaire : on dit dans ce cas-là que le vecteur $\vec{w}$ et normal au plan (P).

Remarques : on peut donc dire qu'une droite est orthogonale (ou perpendiculaire) à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites non parallèles (et donc sécantes) de ce plan. On peut également en déduire que si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale toute droite de ce plan.

Exercice d'application directe



Sans repère

Par décomposition du vecteur $\overrightarrow{FD}$, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{EB}$. Par décomposition du vecteur $\overrightarrow{FD}$, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{EG}$. En déduire que la droite (FD) est orthogonale au plan (BEG).

Avec repère

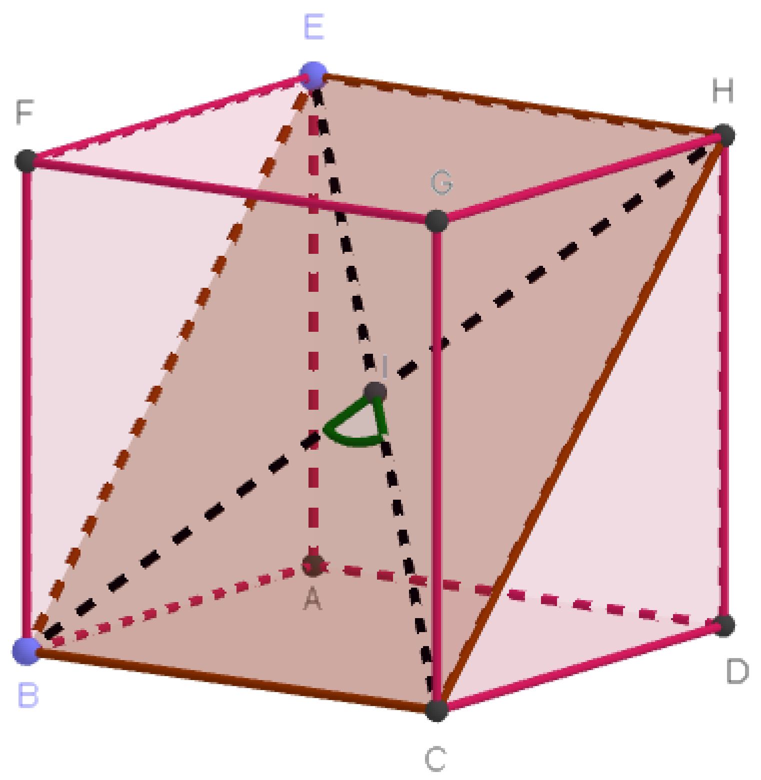
En se plaçant dans le repère orthonormal $(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH})$ déterminer les coordonnées des trois vecteurs $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$. En déduire que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BEG).

Détermination d'un angle dans l'espace

ABCDEFGH est un cube. Les diagonales du cube [CE] et [BH] se coupent en leur milieu, au point I.

On travaille dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

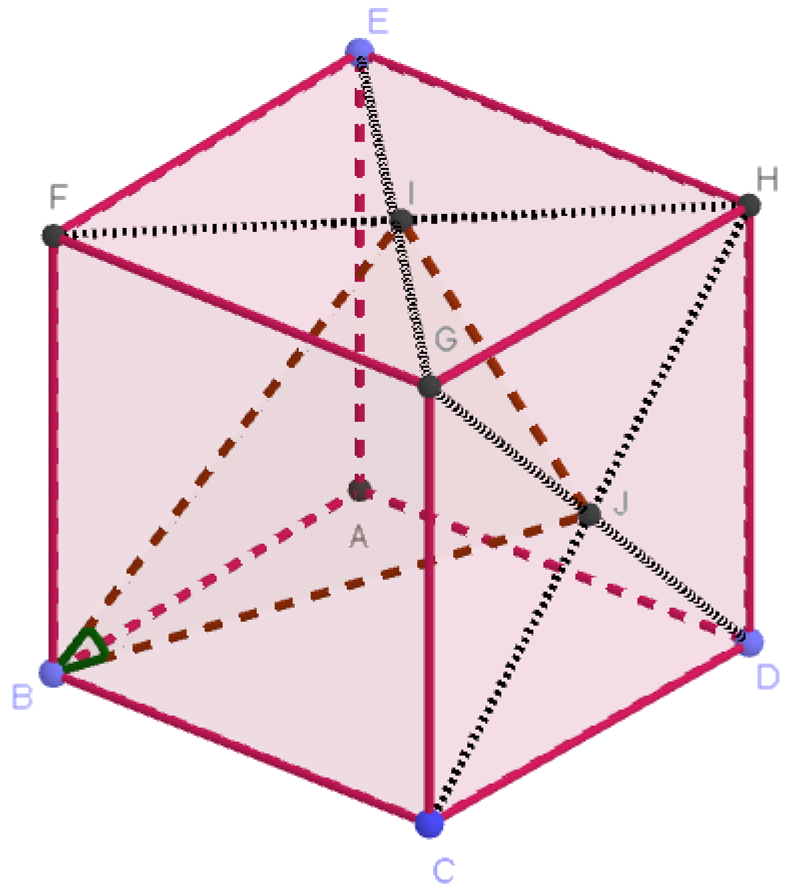
1. Déterminer les coordonnées des sommets du cube et celles du point I.
2. Calculer de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}$.
3. En déduire une mesure de l'angle de l'espace $\widehat{BIC}$.



ABCDEFGH est un cube. Les diagonales de la face du dessus [GE] et [FH] se coupent en leur milieu, au point I. Les diagonales de la face d'une face latérale [DG] et [CH] se coupent en leur milieu, au point J.

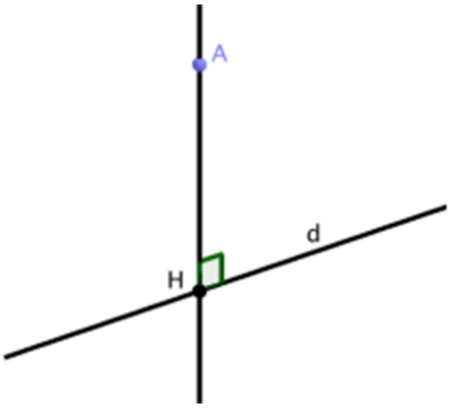
On travaille dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des sommets du cube et des points I et J.
2. Calculer de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BJ}$.
3. En déduire une mesure de l'angle de l'espace $\widehat{IBJ}$.

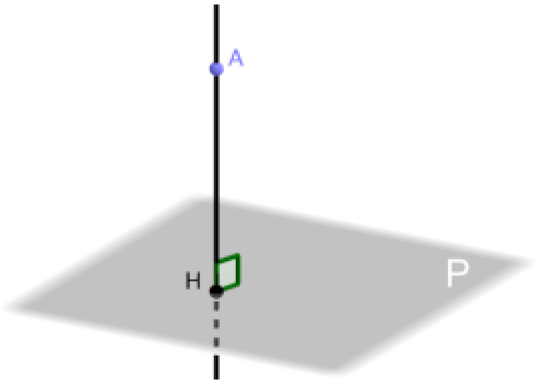


Distances dans l'espace

Distance d'un point à une droite : dans l'espace, la distance d'un point A à une droite d est la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur d.



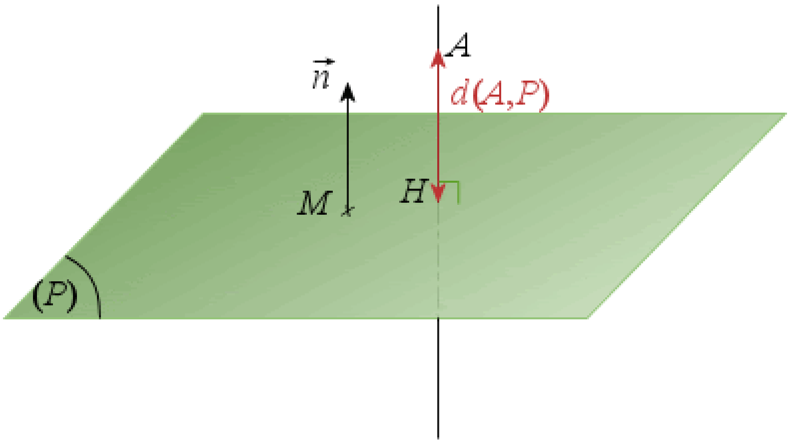
Distance d'un point à un plan : dans l'espace, la distance d'un point A à un plan P est la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur P.



Distance point/plan

Propriété : soit P un plan de vecteur normal $\vec{n}$, A un point de l'espace, H son projeté orthogonal sur le plan P et M un point quelconque du plan P.

$$d\left(A,P\right)=AH=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$$



Remarque : le point H, projeté orthogonal de A est le point du plan P le plus proche du point A.

Démonstrations de la remarque et de la propriété

Soit M un point du plan distinct du point H. Quelle est la nature du triangle AMH ? En déduire la validité de la remarque. Montrer que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$ et en déduire la validité de la propriété…

Exercice d'application directe

ABCDEFGH est un cube. On travaille dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$. On appelle K le projeté orthogonal du point F sur le plan (BEG). A l'aide du calcul de deux produits scalaires, montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BEG). Par application de la formule précédente, déterminer la distance FK.