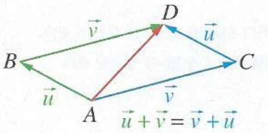
Vecteurs de l'espace

Représenter des vecteurs de l'espace

- On associe le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ à la translation qui transforme A en B.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme.
- **Somme** de deux vecteurs : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, où $ABDC$ est un parallélogramme.



- **Relation de Chasles :** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- Le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$ est le vecteur qui a la même direction que le vecteur $\vec{u}$; le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, le sens contraire de $\vec{u}$ si $k < 0$; pour norme $|k| \times \vec{u}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v} = k\vec{u}$ sont **colinéaires**.

Plans de l'espace

Caractériser un plan de l'espace

- $\vec{u}$, $\vec{v}$ (non colinéaires) et $\vec{w}$ sont **coplanaires** lorsqu'il existe deux réels x et y tels que : $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
- Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires.

Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC) et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une **base** de ce plan.

Coordonnées dans l'espace

Déterminer des coordonnées

- Dans le **repère** $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

$$\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k} ; \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

- Milieu de $[AB]$: $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2} ; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Droites de l'espace

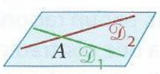
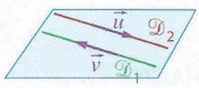
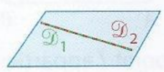
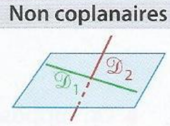
Caractériser une droite de l'espace

La **droite** (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, où $k \in \mathbb{R}$. $\overrightarrow{AB}$ est un **vecteur directeur** de la droite (AB), ainsi que tous les vecteurs non nuls colinéaires à $\overrightarrow{AB}$.

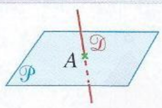
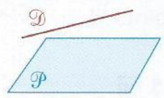
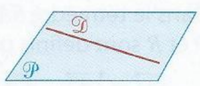
Positions relatives dans l'espace

Étudier les positions relatives de plans et de droites

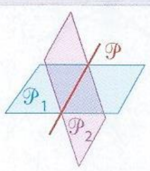
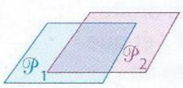
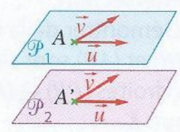
Positions relatives de deux droites

Coplanaires			Non coplanaires
			
$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ont un point commun.	$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ n'ont pas de point commun.	$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues.	Il n'existe pas de plan contenant $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Positions relatives d'une droite et d'un plan

Sécants	Parallèles	
		
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un seul point commun.	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point commun.	$\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

Positions relatives de deux plans

Sécants	Parallèles	
	Confondus	Strictement parallèles
		
L'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est une droite.	L'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est un plan.	L'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est vide.

Savoir caractériser l'orthogonalité

Avec des vecteurs directeurs

- d et d' sont **orthogonales** si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.
- Si deux droites sont **perpendiculaires**, alors elles sont orthogonales. La réciproque est fausse car deux droites orthogonales ne sont pas toujours coplanaires.

Avec des vecteurs directeurs

- La droite d de vecteur directeur $\vec{w}$ et le plan $\mathcal{P}$ de base $(\vec{u}, \vec{v})$ sont **orthogonaux** si $\vec{w}$ est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
- Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

Avec un vecteur normal

- Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** au plan $\mathcal{P}$ de base $(\vec{u}, \vec{v})$ s'il est non nul et orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Une droite est **orthogonale** à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est colinéaire à un vecteur normal à ce plan.

Caractériser l'orthogonalité de deux droites

Caractériser l'orthogonalité d'un plan et d'une droite

Caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **orthogonaux** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 0$.

Savoir caractériser le parallélisme

Caractériser le parallélisme d'une droite et d'un plan

Une droite est **parallèle** à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à un vecteur normal à ce plan.

Caractériser le parallélisme de deux plans

- Un plan $\mathcal{P}_1$ de vecteur normal $\vec{n}_1$ est **parallèle** à un plan $\mathcal{P}_2$ de vecteur normal $\vec{n}_2$ si et seulement si $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles entre eux.

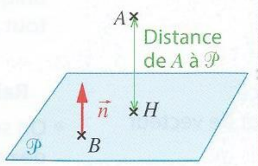
Savoir calculer des distances avec ou sans base/repère de l'espace

Calculer des distances

- H est le **projeté orthogonal de** A **sur** $\mathcal{P}$ et la distance de A à $\mathcal{P}$ est :

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

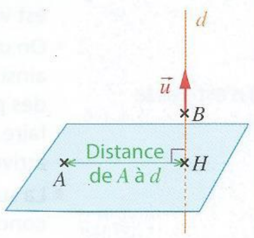
où $B \in \mathcal{P}$ et $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.



- H est le **projeté orthogonal de** A **sur** d et la distance de A à d est :

$$AH = \left\| \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \right\|,$$

où $B \in d$ et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d.



Calculer dans une base et un repère orthonormés

- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une **base orthonormée** signifie que :

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \text{ et } \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1.$$

$(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est alors un **repère orthonormé** de l'espace.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$.

- **Produit scalaire :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.
- **Norme :** $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$