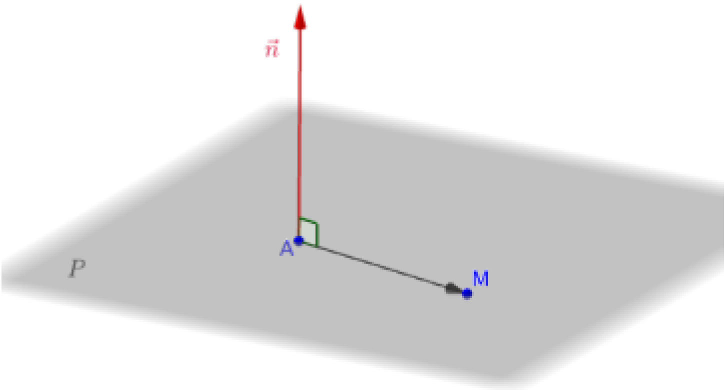
Premier rappel indispensable

Soit P un plan de l'espace. Soit A un point du plan P et $\vec{n}$ un vecteur normal au plan P.

Un point M de l'espace appartient au plan P si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Cette égalité est la caractérisation vectorielle du plan P.



Equation cartésienne d'un plan

Propriété : si P est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ alors tout point $M(x;y;z)$ de l'espace appartenant au plan P vérifie l'équation $ax+by+cz+d=0$ où a, b et c correspondent aux coordonnées du vecteur normal et où $d=-ax_A-by_A-cz_A$.

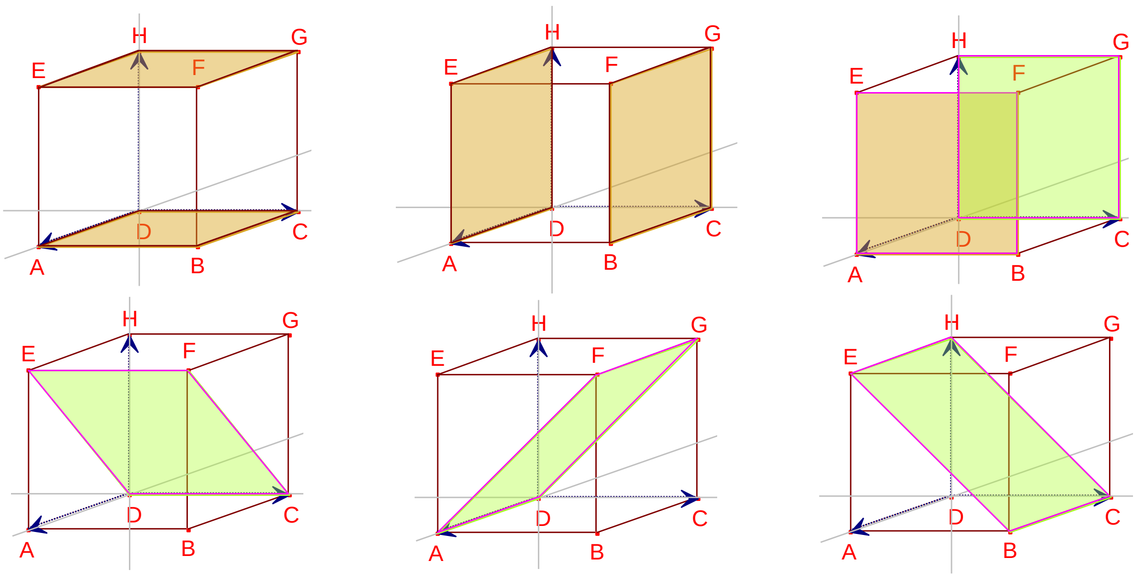
Vocabulaire : cette équation est appelée « équation cartésienne de P ».

Remarque importante : un plan de l'espace admet une infinité d'équations cartésiennes. En effet, en choisissant un autre vecteur normal au plan ou un autre point de ce plan, on obtient une autre équation cartésienne du même plan.

Réciproque de la propriété : si les coordonnées d'un point $M(x;y;z)$ de l'espace vérifient l'équation $ax+by+cz+d=0$ où a, b, c et d sont quatre nombres réels (a, b, c étant non tous nuls) alors le point M appartient à un plan P de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

Plans particuliers, équations particulières

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête $a=1$. On considère l'espace rapporté au repère orthonormal $\left(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH}\right)$. Déterminer une équation cartésienne des plans colorés proposés ci-dessous.



Plans quelconques, équations quelconques

On considère le plan P passant par le point $A(1;-2;4)$ et ayant pour vecteur normal $\vec{n}(5;3;-1)$. On considère le plan P' parallèle à P passant par le point $B(4;1;3)$. Déterminer une équation cartésienne de chacun de ces plans. On considère désormais les plans P1 $3x-4y+z+2=0$, P2 $2x+y-2z=0$, P3 $-6x+8y-2z+5=0$. Définir chaque plan par un point, un vecteur normal.

Plans définis par trois points

On considère ci-dessous trois points A, B et C de l'espace et un vecteur $\vec{n}$. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC). En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

$$A(1;-3;3)\ B(5;-1;9)\ C(-5;1;11)\ \vec{n}\begin{pmatrix}-2\\-17\\7\end{pmatrix}$$

Situation 1

$$A(-4;0;-4)\ B(6;4;-8)\ C(4;-2;-6)\ \vec{n}\begin{pmatrix}4\\3\\13\end{pmatrix}$$

Situation 2

Et lorsque le vecteur normal n'est pas donné ?

Montrer que les trois points $A(1;3;0)$ $B(-2;1;1)$ et $C(4;1;-2)$ déterminent un plan P dont vous déterminerez un vecteur normal, puis une équation cartésienne.

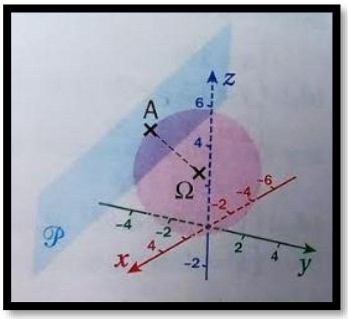
Montrer que les trois points $A(1;2;0)$ $B(0;3;1)$ et $C(1;5;1)$ déterminent un plan P dont vous déterminerez un vecteur normal, puis une équation cartésienne.

Sommets coplanaires

Sur la photographie du massif des Alpes proposée ci-contre, la position des sommets modélisée par les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives $A(0;0;4)$, $B(3,6;-0,4;4,8)$, $C(4,4;1,3;4,5)$, $D(2;0,7;4,3)$ et $E(1;1,6;3,9)$.

Le point $F(2,6;1,5;4,1)$ modélise la position d'un alpiniste. Quels points sont dans le même plan que les trois sommets A, B et C ? Expliquer de manière détaillée le raisonnement adopté…

Plan tangent

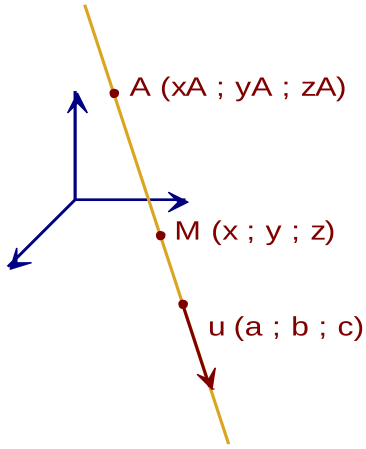


On considère la sphère de centre $\Omega(1;0;3)$ passant par le point $A(2;-2;5)$. Déterminer une équation cartésienne du plan P tangent à la sphère au point A On rappelle qu'un plan est tangent à une sphère en un point lorsqu'il est perpendiculaire au rayon de la sphère passant par ce point.

Deuxième rappel indispensable

Soit (d) une droite de l'espace. Soit A un point de la droite(d) et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d).

Un point M de l'espace appartient à la droite (d) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$. Cette égalité est la caractérisation vectorielle de la droite (d). Elle fait intervenir un paramètre.



Représentation paramétrique d'une droite

Propriété : si (d) est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$

alors pour tout point $M(x; y; z)$ de l'espace appartenant à la droite (d) il existe un nombre réel k tel que $\begin{cases} x = x_A + k \times a \\ y = y_A + k \times b \\ z = z_A + k \times c \end{cases}$.

Vocabulaire : ce système est appelé « représentation paramétrique de la droite (d) ».

Remarque importante : une droite de l'espace admet une infinité de représentations paramétriques. En effet, en choisissant un autre vecteur directeur de la droite ou un autre point de cette droite, on obtient une autre représentation paramétrique de la même droite.

Réciproque de la propriété : si les coordonnées d'un point $M(x; y; z)$ de l'espace vérifient le système $\begin{cases} x = x_A + k \times a \\ y = y_A + k \times b \\ z = z_A + k \times c \end{cases}$ où k est un nombres réel alors le point M appartient à la droite de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$.

Exercice d'application directe

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) dans chacun des cas suivants :

$A(1;2;3)$ et $B(1;0;-5)$ $\quad$ $A(4;-1;2)$ et $B(5;0;-8)$ $\quad$ $A(1;2;7)$ et $B(1;2;11)$

Exercice d'application un peu moins directe

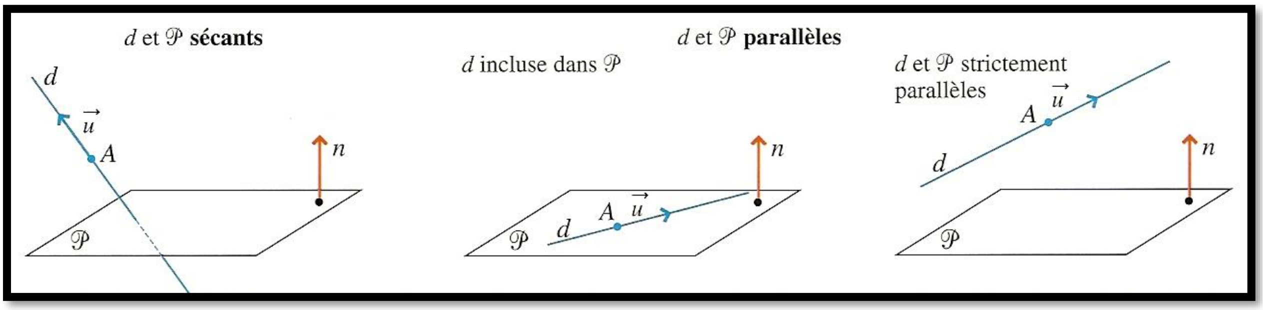
Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A, perpendiculaire au plan P :

$A(5;2;0)$	$A(-1;3;4)$	$A(0;5;1)$
$(\mathrm{P})\ x + y + 2z - 5 = 0$	$(\mathrm{P})\ y - 5z + 10 = 0$	$(\mathrm{P})\ y + 7 = 0$

Intersection d'une droite et d'un plan

Point de vue géométrique :

Soit une droite d et un plan P. La droite d est soit incluse dans le plan P, soit strictement parallèle à P c'est-à-dire qu'ils n'ont aucun point en commun, soit sécante avec P, c'est-à-dire qu'ils ont un seul point commun. Ceci dépend de la position relative du vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite et du vecteur normal $\vec{n}$ du plan. Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux alors la droite et le plan sont sécants. Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux alors : si un point de la droite appartient au plan alors la droite est incluse dans le plan, si un point de la droite n'appartient pas au plan alors la droite est strictement parallèle au plan.



Point de vue algébrique :

Le plan $(\mathrm{P})\, ax+by+cz+d=0$ et la droite $(d)\begin{cases} x = x_A + k\times\alpha \\ y = y_A + k\times\beta \\ z = z_A + k\times\gamma \end{cases}$ avec $k \in IR$ sont sécants si et seulement si les vecteurs $\vec{n}(a;b;c)$ et $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ ne sont pas orthogonaux c'est-à-dire si et seulement si $\boxed{a\alpha+b\beta+c\gamma\neq 0}$.

Exercice d'application directe

Déterminer l'intersection du plan P d'équation $2x+y-5z=1$ avec la droite (AB) où les coordonnées des points A et B sont $A(1;-5;0)$ et $B(4;1;3)$.

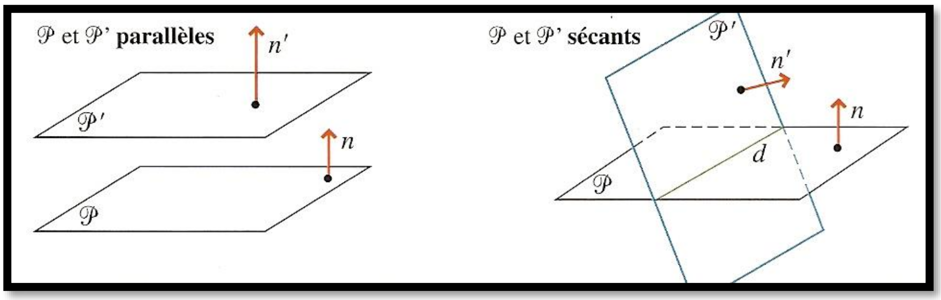
Exercice d'application un peu moins directe

Déterminer l'intersection du plan P et de la droite d dans chacun des cas suivants :

- $(P)\, x+y-2z-5=0$, (d) passe par $A(1;0;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;1;1)$.
- $(\mathrm{P})\, 3x-y+z+3=0$, (d) est la droite (AB) avec $A(1;1;-5)$ et $B(2;7;-2)$.
- $(\mathrm{P})\, x+y-z-1=0$, (d) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3-t \\ y = 5-t \\ z = 2+t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

Intersection de deux plans de l'espace

Point de vue géométrique : Soit P et P′ deux plans distincts. Ces deux plans sont soit sécants, soit parallèles. Ceci dépend de la position relative des vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$. Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires alors les plans sont strictement parallèles : ils n'ont aucun point commun. Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires alors les plans sont sécants : leur intersection est une droite de l'espace.



Point de vue algébrique : Les deux plans d'équations respectives $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$ sont sécants si et seulement si les vecteurs $\vec{n}(a;b;c)$ et $\vec{n'}(a';b';c')$ ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire ne sont pas proportionnels. Leur intersection est alors une droite.

Exercice d'application directe

On considère cinq plans de l'espace. Pour chaque couple de plans possible, préciser si les deux plans sont parallèles, confondus, perpendiculaires ou juste sécants.

- Le plan P1 admet pour équation cartésienne $4x+3y+z-10=0$,
- Le plan P2 admet pour équation cartésienne $-3x+y+9z+13=0$,
- Le plan P3 admet pour équation cartésienne $-6x+9y-3z-12=0$,
- Le plan P4 passe par $A(9;4;-10)$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$,
- Le plan P5 passe par $B(-5;1;6)$ et admet pour vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\2\\-8\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\7\\11\end{pmatrix}$.

Exercice d'application un peu moins directe

On considère un couple de plans de l'espace. Sont-ils sécants ? Si oui préciser un point et un vecteur directeur de la droite de l'espace intersection des deux plans. Détailler le raisonnement…

$$\begin{cases}P_1 : x+y-2z-6=0\\P_2 : 3x-y+z-11=0\end{cases}$$

Situation 1

$$\begin{cases}P_1 : x+y-z-1=0\\P_2 : 3x+2y+z-4=0\end{cases}$$

Situation 2

$$\begin{cases}P_1 : x-y+z+3=0\\P_2 : -x+2y-3z=0\end{cases}$$

Situation 3

Position relative de deux droites de l'espace

Situation 1

On considère les droites (d) et (d') définies par leurs représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x=-1-2k \\ y=4+4k \\ z=-4-5k \end{cases}$ et $\begin{cases} x=7+t \\ y=8+3t \\ z=-18-6t \end{cases}$.

1. Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles.

2. Résoudre le système d'équations linéaires $\begin{cases} -1-2k=7+t \\ 4+4k=8+3t \\ -4-5k=-18-6t \end{cases}$ et en déduire que les droites sont sécantes en un point dont on précisera les coordonnées.

Situation 2

On considère les droites (d) et (d') définies par leurs représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x=4-3k \\ y=-3+k \\ z=1+2k \end{cases}$ et $\begin{cases} x=-12+2t \\ y=4t \\ z=9+3t \end{cases}$. Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires. On rappelle à ce propos que deux droites non coplanaires sont deux droites ni parallèles, ni sécantes.

Position relative de deux droites, encore…

On conidère la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x=7+5k \\ y=9-3k \\ z=-3-k \end{cases}$. Pour chacune des droites proposées ci-dessous, indiquer si la droite (d) lui est confondue, strictement parallèle, orthogonale, ou si aucune de ces possibilités ne correspond. Dans le cas où la droite n'est pas parallèle à (d) préciser si elle lui est sécante en un point dont on précisera les coordonnées…

$(d_1)\begin{cases} x=15t \\ y=13,2-9t \\ z=-1,6-3t \end{cases}$ $(d_2)\begin{cases} x=25-t \\ y=-11-4t \\ z=7+7t \end{cases}$ $(d_3)\begin{cases} x=9,5-8t \\ y=7,5+4,8t \\ z=-2,5+1,6t \end{cases}$ $(d_4)\begin{cases} x=-3+t \\ y=15+2t \\ z=-5+t \end{cases}$

Position relative de deux droites, toujours…

ABCDEFGH est un cube. Le point I est le milieu du segment [FG]. Le point J est le milieu du segment [IG]. On considère le repère orthonormé de l'espace $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique des droites (AI) et (DJ).

2. Montrer que (AI) et (DJ) sont sécantes en K dont on précisera les coordonnées.

Distance d'un point à une droite de l'espace

Partie A

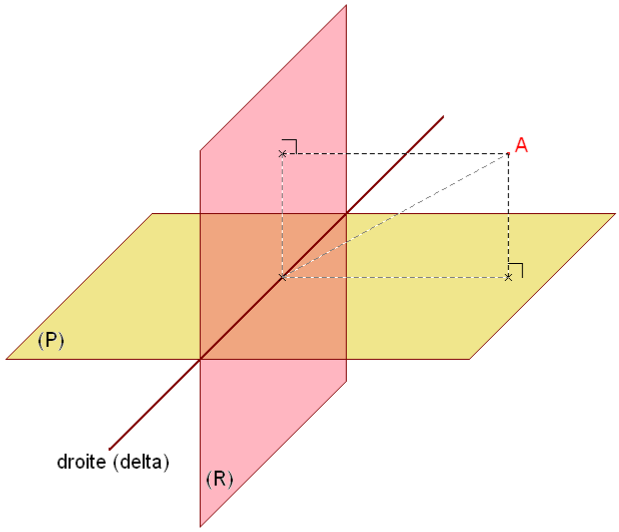
On considère le plan (P) passant par $B(1;-2;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-2;1;5)$ dont on déterminera une équation et le plan (R) d'équation $x+2y-7=0$. Démontrer que (P) et (R) sont perpendiculaires. Démontrer que l'intersection des plans (P) et (R) est la droite (Δ) passant par le point $C(1;3;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-1;1)$. Pour cela vous montrerez que le point C appartient aux deux plans puis que le vecteur $\vec{u}$ est normal avec chaque vecteur normal des deux plans (P) et (R). Déterminer une représentation paramétrique de cette droite.

Partie B

Soit le point $A(5;-2;-1)$. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur le plan (P). On appelle K le projeté orthogonal du point A sur le plan (R).

Déterminer une représentation paramétrique de (AH), montrer que les coordonnées du point H sont $(3,8;-1,4;2)$ puis calculer la distance AH. (On trouvera $AH^2=10,8$).

Déterminer une représentation paramétrique de (AK), montrer que les coordonnées du point K sont $(6,2;0,4;-1)$ puis calculer la distance AK. (On trouvera $AK^2=7,2$).



En déduire, par une application simple du théorème de Pythagore la distance du point A à la droite (Δ). Cette distance entre un point et une droite de l'espace est définie comme la distance minimale qui existe entre le point A et l'ensemble des points de la droite (Δ).

Partie C

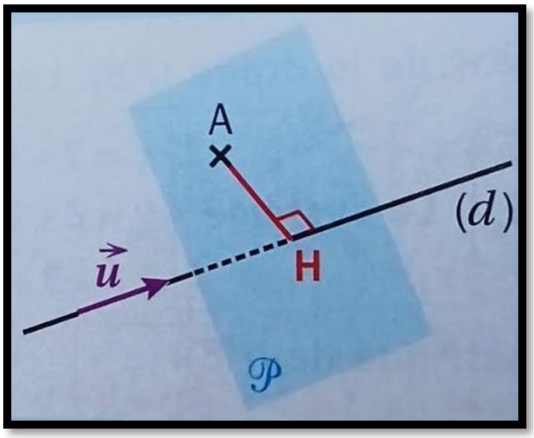
Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1+2t;3-t;t)$. Déterminer, en fonction de t, la longueur AM_t. On note $\varphi(t)$ le carré de cette longueur. Etudier les variations de la fonction φ. Préciser son minimum et interpréter géométriquement cette valeur.

Remarque

« On retrouve dans cet exercice un résultat déjà énoncé. La distance d'un point à une droite de l'espace correspond à la distance minimale séparant ce point et l'ensemble des points de la droite. Cette distance se matérialise entre le point de l'espace et son projeté orthogonal sur la droite. »

Projeté orthogonal d'un point de l'espace sur une droite

Si A est un point de l'espace, (d) est une droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_0 + ka \\ y = y_0 + kb \\ z = z_0 + kc \end{cases}$, et $H(x_H ; y_H ; z_H)$ est le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) alors le plan P passant par A et orthogonal à la droite (d) admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où d est un nombre réel et $(x_H ; y_H ; z_H)$ est l'unique triplet vérifiant à la fois la représentation paramétrique de (d) et l'équation cartésienne du plan P.



H est le projeté orthogonal de A sur la droite (d)

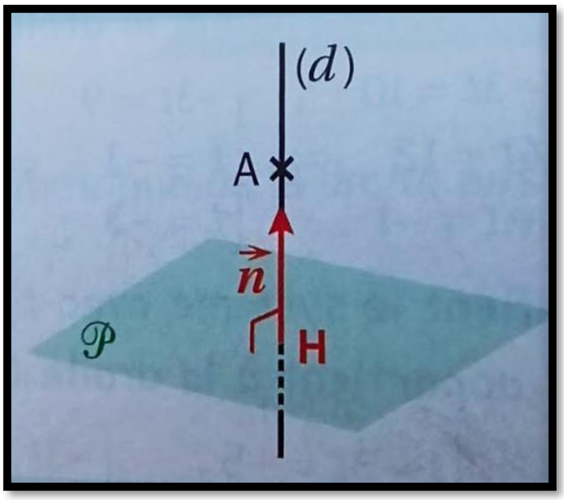
Exercice d'application directe

On considère la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -3 - k \\ z = 20 + 2k \end{cases}$ et le point $A(3;5;4)$.

Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite (d).

Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Si P est un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et $H(x_H ; y_H ; z_H)$ le projeté orthogonal du point A sur le plan P alors la droite (d) passant par A et orthogonale à P admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$ et $(x_H ; y_H ; z_H)$ est l'unique triplet vérifiant à la fois l'équation cartésienne de P et la représentation paramétrique de (d).



H est le projeté orthogonal de A sur le plan P

Exercice d'application directe

On considère le plan d'équation cartésienne $4x + y - 2z - 66 = 0$ et le point $B(-1;3;-2)$.
Déterminer les coordonnées du point K, projeté orthogonal du point B sur la droite (d).

Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur la droite (d) et les coordonnées du point K projeté orthogonal du point A sur le plan P…

$$(d)\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -3 - k \\ z = 20 + 2k \end{cases}$$

$A(5;-2;3)$

$P : -2x + y - 2z - 18 = 0$