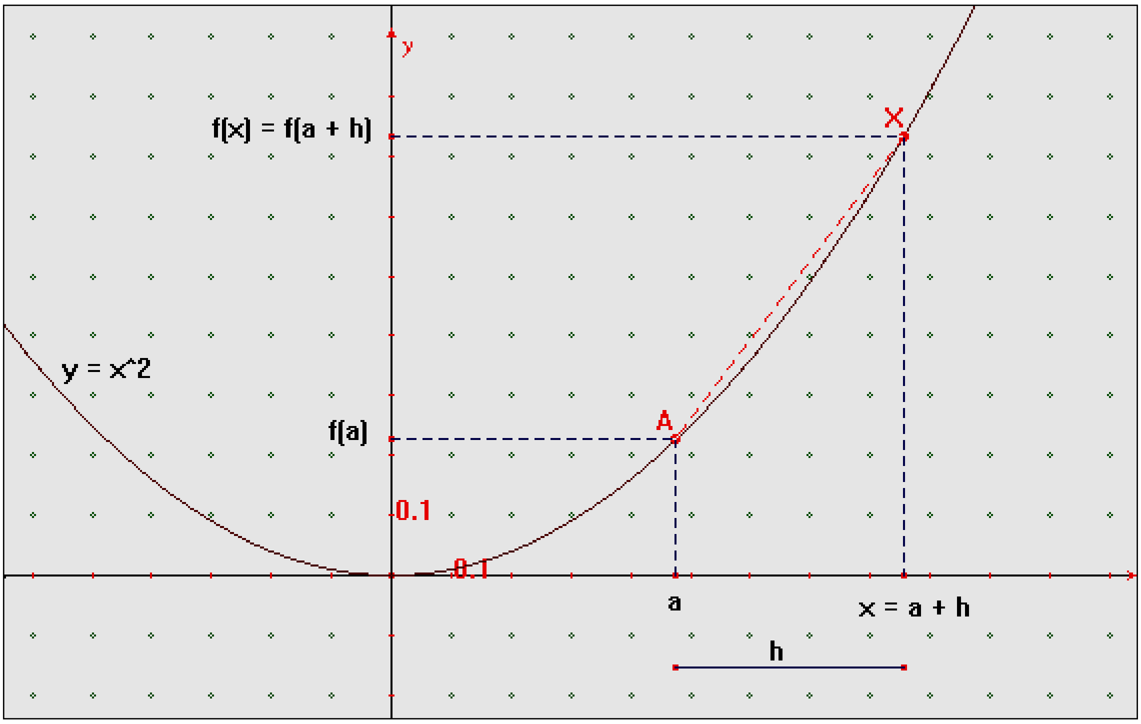


Le taux d'accroissement

Le taux d'accroissement d'une fonction f entre a et $a+h$ est défini par : $\boxed{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}$

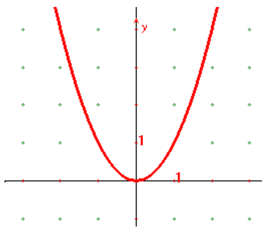
Dérivabilité d'une fonction

f est **dérivable** en a si le taux d'accroissement admet une **unique** limite **finie** quand $h \to 0$.

De la sécante à la tangente

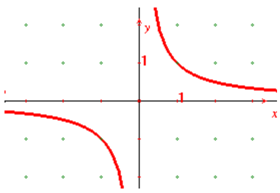
1. Que représente le taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a+h$?
2. Quelle est la position limite de la droite (AX) lorsque $h \to 0$?
3. Que représente alors l'expression $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$?

Nombre dérivé de la fonction carré



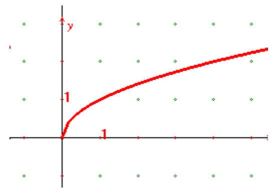
1. Est-elle dérivable en a ? Quel est le nombre dérivé ?
2. Quel est le domaine de définition de la fonction carrée ?
3. Quel est son domaine de dérivabilité ?

Nombre dérivé de la fonction inverse



1. Est-elle dérivable en a ? Quel est le nombre dérivé ?
2. Quel est le domaine de définition de la fonction inverse ?
3. Quel est son domaine de dérivabilité ?

Nombre dérivé de la fonction racine carrée



1. Est-elle dérivable en a ? Quel est le nombre dérivé ?
2. Quel est le domaine de définition de la fonction racine ?
3. Quel est son domaine de dérivabilité ?

Une fonction construite à partir d'une racine carrée

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

1. Déterminer le taux d'accroissement de la fonction entre a et $a+h$.
2. Montrer que ce taux d'accroissement est égal à $\dfrac{2a+h}{\sqrt{(a+h)^2+1}+\sqrt{a^2+1}}$.
3. Calculer la limite du taux d'accroissement lorsque $h\to 0$.
4. La fonction f est-elle dérivable en a ? Quel est le nombre dérivé de cette fonction ?
5. Quel est le domaine de définition de la fonction étudiée ci-dessus ?
6. Quel est son domaine de dérivabilité ?

Composée de deux fonctions

f est la **composée des deux fonctions** u et v lorsqu'elle est définie par : $\boxed{f(x)=v(u(x))}$.
Une telle fonction composée se note $v\circ u$ notation qui se lit « v rond u ».

Exercice d'application directe

Déterminer pour chaque fonction proposée, deux fonctions u et v telles que $f(x)=v\circ u(x)$.

$g(x)=\sqrt{2x+3}$ $\qquad h(x)=\sin(2x)$ $\qquad k(x)=(x^2+x+1)^5$

$m(x)=\sqrt{1-x^2}$ $\qquad n(x)=\cos\left(100\pi x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ $\qquad p(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

Dérivation d'une fonction composée

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ et a un nombre réel quelconque.

1. Ecrire la fonction f sous la forme $v\circ u$. Déterminer $u'(a)$. Déterminer $v'(u(a))$.
2. En vous reportant au travail précédent, rappeler $f'(a)$ la nombre dérivé de f en a.
3. En déduire l'écriture de $f'(a)$ en fonction de $u'(a)$ et $v'(u(a))$.

Formule de dérivée d'une fonction composée

4. Ecrire la formule donnant la dérivée d'une fonction composée.
5. Déterminer la dérivée des fonctions proposées dans l'exercice d'application.

Dérivée du produit de deux fonctions

On propose ci-dessous les différentes étapes de la démonstration de la formule de dérivée d'un produit de deux fonctions. Certaines étapes ont été malencontreusement effacées. Recopier et compléter les expressions de l'étape 3, étape 4 et étape 5 reportées ci-dessous afin de retrouver l'intégralité de la démonstration.

Départ
On considère une fonction s'écrivant comme le produit de deux fonctions.

$$f(x) = u(x) \times v(x)$$

Etape 1
On connait la formule du taux de variation d'une fonction.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Etape 2
On applique la définition du taux de variation à la fonction de départ.

$$\frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}$$

Etape 3
On introduit des quantités qui, par développement s'annulent.

$$\frac{[?-?] \times v(a+h) + u(a) \times [?-?]}{h}$$

Etape 4
On affecte le dénominateur à chaque terme de la somme.

$$\frac{?-?}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{?-?}{h}$$

Etape 5
On envisage le passage à la limite lorsque $h \to 0$.

$$\underset{u'(a)}{\frac{?-?}{h}} \times \underbrace{v(a+h)}_{v(a)} + \underset{u(a)}{u(a)} \times \underset{v'(a)}{\frac{?-?}{h}}$$

Arrivée
On trouve l'expression de la dérivée du produit de deux fonctions.

$$u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a)$$

Dérivée de la composée de deux fonctions

On propose ci-dessous les différentes étapes de la démonstration de la formule de dérivée de la composée de deux fonctions. Certaines étapes ont été malencontreusement effacées. Recopier et compléter les expressions de l'étape 3, étape 4 et étape 5 reportées ci-dessous afin de retrouver l'intégralité de la démonstration.

Départ
On considère une fonction s'écrivant comme la composée de deux fonctions.

$$f(x) = v \circ u(x) = v(u(x))$$

Etape 1
On connait la formule du taux
de variation d'une fonction.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Etape 2
On applique la définition du taux
de variation à la fonction de départ.

$$\frac{v\left(u(a+h)\right)-v\left(u(a)\right)}{h}$$

Etape 3
On introduit des quantités qui,
par produit se compensent.

$$\frac{v\left(u(a+h)\right)-v\left(u(a)\right)}{?-?}\times\frac{?-?}{h}$$

Etape 4
On rappelle que la limite du taux
d'accroissement peut s'écrire autrement.

$$\lim_{X\to A}\frac{v(X)-v(A)}{X-A}=v'(A)$$

Etape 5
On envisage le passage à la
limite lorsque $h\to 0$.

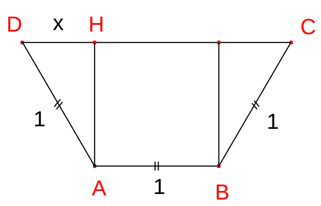
$$\underbrace{\frac{v\left(u(a+h)\right)-v\left(u(a)\right)}{?-?}}_{v'(u(a))}\times\underbrace{\frac{?-?}{h}}_{u'(a)}$$

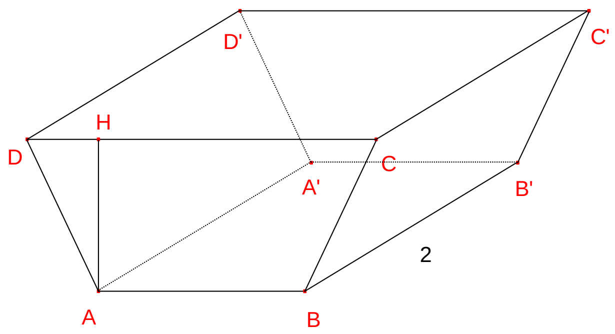
Arrivée
On trouve l'expression de la dérivée
De la composée de deux fonctions.

$$v'\left(u(a)\right)\times u'(a)$$

Maximiser un volume

Un récipient a la forme d'un prisme droit dont la base est un trapèze isocèle $ABCD$. Toutes les dimensions de ce récipient sont fixées sauf la longueur CD. On donne $AB=BC=AD=1$ et $BB'=2$, l'unité étant le mètre. On cherche la valeur à donner à la grande base CD du trapèze $ABCD$ afin que le volume de ce récipient soit maximal. On appelle H le projeté orthogonal de A sur $[CD]$. On note x la longueur HD.





1. Quelles sont les valeurs possibles prises par la variable x ?

2. Déterminer l'aire du trapèze $ABCD$ en fonction de x.

3. Montrer que le volume de ce récipient s'exprime en fonction de x par $V(x)=2(x+1)\sqrt{1-x^2}$.

4. Montrer que $V'(x)=2\times\dfrac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

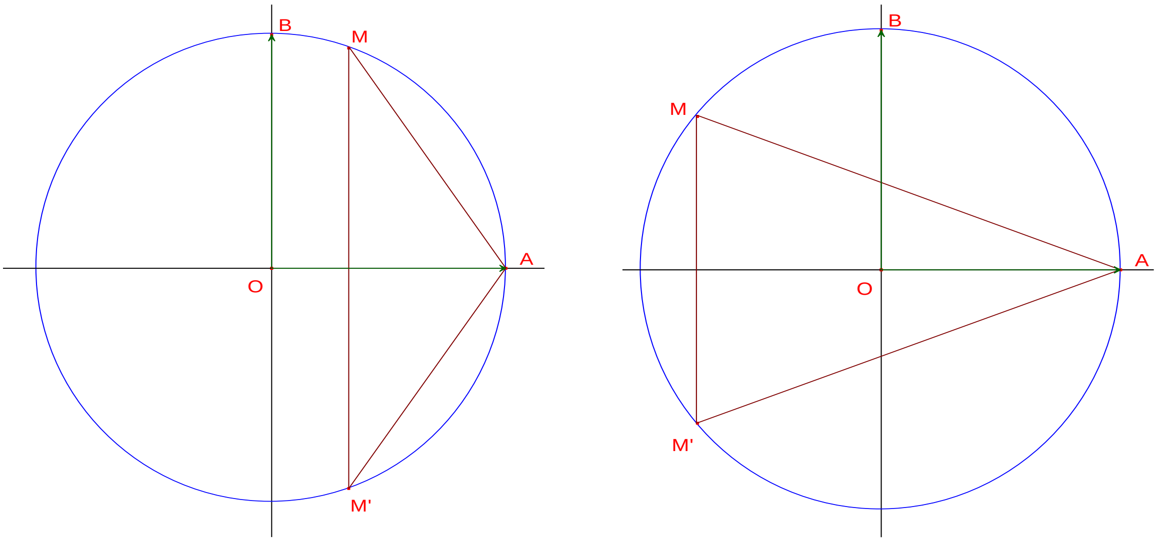
5. Etudier la fonction V sur l'intervalle $[0;1]$.
   On étudiera le signe de la dérivée et on en déduira les variations de la fonction.

6. Pour quelle valeur de x le volume de ce récipient est-il maximal ?
   Quel est alors ce volume ? Préciser la valeur de l'angle ADH dans un tel cas.

Maximiser une aire

Soit C le cercle trigonométrique et A un point du cercle. On se propose d'étudier les aires des triangles isocèles de sommet A inscrits dans le cercle C.

On choisit le repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$. Un triangle AMM' inscrit dans le cercle C se présentera alors comme la figure ci-dessous (on choisi pour M l'ordonnée positive).



Désignons par α la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$.

1. Quelles sont les valeurs possibles prises par la variable α ?

2. Montrer que l'aire du triangle AMM' s'exprime en fonction de α par l'expression suivante : $A(\alpha)=(1-\cos\alpha)\sin\alpha$. Montrer que $A'(\alpha)=-2(\cos\alpha-1)\left(\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\right)$.

3. Etudier la fonction A sur l'intervalle $[0;\pi]$.
   On étudiera le signe de la dérivée et on en déduira les variations de la fonction.

4. Pour quelle valeur de α l'aire du triangle AMM' est-elle maximale ?
   Que peut-on dire de ce triangle ? Quelle est son aire ?

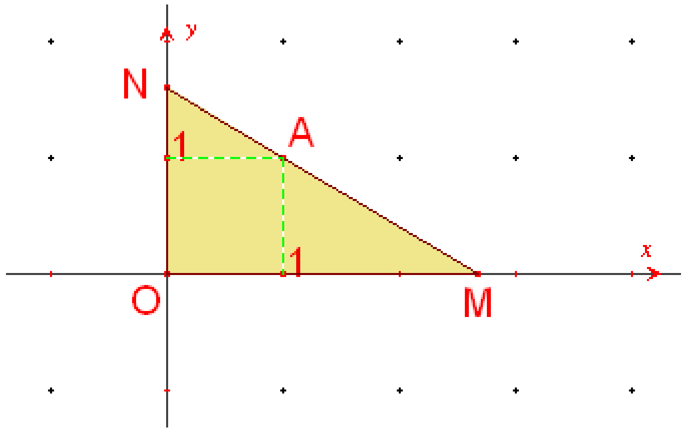
Sans oublier la dérivée du quotient de deux fonctions

On propose ci-dessous les différentes étapes de la démonstration de la formule de dérivée d'un quotient de deux fonctions On parle de fonction rationnelle. Certaines étapes ont été malencontreusement effacées. Recopier et compléter les expressions de l'étape 2, étape 3, étape 5 et étape 6 reportées ci-dessous afin de retrouver l'intégralité de la démonstration.

Départ On considère une fonction s'écrivant comme le quotient de deux fonctions.	$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$
Etape 1 On connait la formule du taux de variation d'une fonction.	$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Etape 2 On applique la définition du taux de variation à la fonction de départ.	$\dfrac{\dfrac{?}{?}-\dfrac{?}{?}}{h}$
Etape 3 On réduit les deux fractions au même dénominateur afin de pouvoir soustraire.	$\dfrac{\dfrac{?\times ?}{?\times ?}-\dfrac{?\times ?}{?\times ?}}{h}$
Etape 4 On réduit les étages de cette fraction de fraction.	$\dfrac{u(a+h)\times v(a)-u(a)\times v(a+h)}{v(a+h)\times v(a)\times h}$
Etape 5 On introduit deux quantités qui, par développement, s'annulent.	$\dfrac{[?-?]\times ?-?\times[?-?]}{v(a+h)\times v(a)\times h}$
Etape 6 On réorganise l'expression et on envisage le passage la limite lorsque $h\to 0$.	$\dfrac{1}{\underbrace{v(a+h)\times v(a)}_{[v(a)]^2}}\times\left[\underbrace{\dfrac{?-?}{h}}_{u'(a)}\times ?-?\times\underbrace{\dfrac{?-?}{h}}_{v'(a)}\right]$
Arrivée On retrouve l'expression de la dérivée du quotient de deux fonctions.	$\dfrac{u'(a)\times v(a)-u(a)\times v'(a)}{[v(a)]^2}$

Minimiser une aire

On considère le point A de coordonnées $(1;1)$. M et N sont les points d'intersection d'une droite passant par A avec les des deux axes du repère. Le but du problème est de déterminer la position de M et de N pour que l'aire du triangle OMN soit minimale. On note x l'abscisse de M et y l'ordonnée de N.



1. Exprimer y en fonction de x.

2. On appelle f la fonction exprimant l'aire du triangle OMN en fonction de x. Déterminer l'expression algébrique $f(x)$. Préciser l'intervalle d'étude de la fonction f.

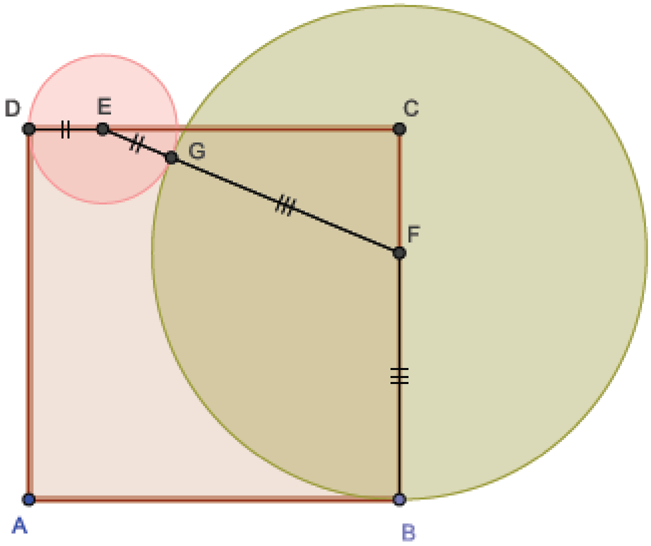
3. Procéder à l'étude de la fonction sur cet intervalle puis conclure.

Minimiser une longueur

ABCD est un carré de côté 1. E est un point du segment [CD] et F est un point du segment [BC]. Les cercles C et C' de centres respectifs E et F passent respectivement par les points D et B. Ces deux cercles sont tangents entre eux au point G.

Le but de ce problème est de déterminer la position du point G pour laquelle la distance EF est minimale.

On pose $DE = x$ et $BF = y$.

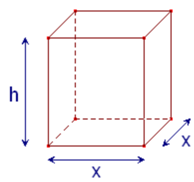


1. Démontrer que $y = \dfrac{1-x}{1+x}$. En déduire l'expression de la distance EF en fonction de x.

2. Etudier la fonction d définie par $d(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ sur l'intervalle $[0;1]$. En déduire la position de G pour que la distance EF soit minimale. Préciser cette distance minimale.

Minimiser une surface

On souhaite fabriquer une cuve à ciel ouvert. Cette cuve a la forme d'un pavé droit à base carrée. Son volume doit être de 4 mètres cube. On utilise de la peinture antirouille pour traiter les parois intérieures. Déterminer les dimensions de la cuve qui permettent d'utiliser le moins de peinture possible.



Une nouvelle fonction

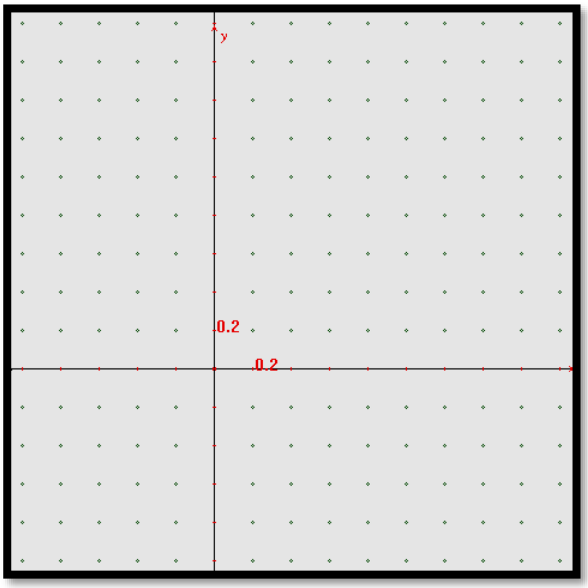
La fonction **partie entière** notée E est la fonction définie par :

$$\boxed{\text{si } x \in [n;n+1[\text{ avec } n \text{ entier alors } E(x) = n}$$

Représentation graphique

1. Tracer dans le repère ci-contre le graphe de la fonction partie entière sur l'intervalle $[-1;2]$.

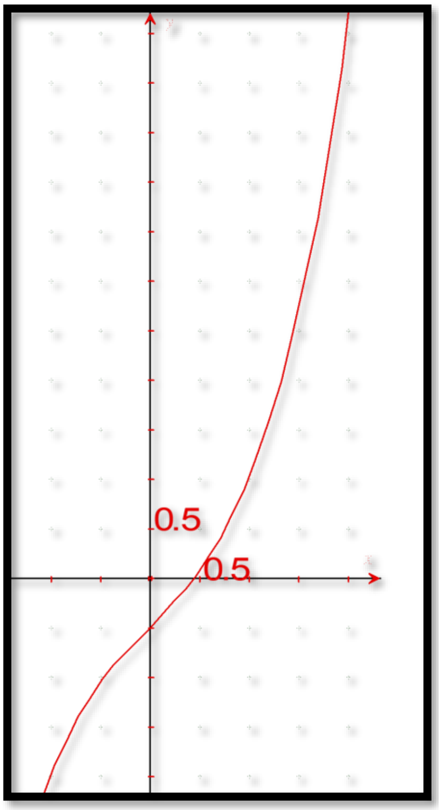
2. Discuter suivant les valeurs de k du nombre de solutions $E(x) = k$.



3. Reprendre les mêmes questions avec la fonction définie par : $f(x) = x - E(x)$.

Une fonction polynôme

On considère désormais la fonction g définie sur l'intervalle $[-1;2]$ par $g(x) = \frac{1}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}$ dont on a tracé ci-contre la représentation graphique.



4. Discuter suivant les valeurs de k du nombre de solutions de l'équation $g(x) = k$.

5. Déterminer graphiquement :

   - $E(1)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} E(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} E(x)$.
   - $f(1)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.
   - $g(1)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$.

6. Par un procédé que vous détaillerez, déterminer un encadrement à 10^{-3} près de la solution de l'équation $h(x) = 0$. A quelle condition ce procédé de résolution est-il applicable ?

Continuité, discontinuité

Une fonction f est **continue** en $x = a$ lorsque $\boxed{\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)}$, c'est-à-dire lorsque $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)}$. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est **discontinue**.

Continuité, discontinuité, encore…

Soient A, B et C trois points alignés tels que AB=5 et BC=3. On construit deux rectangles ABFG et BCDE de longueur 5 et de largeur 3 comme indiqué sur les figures proposées ci-dessous. Soit M un point quelconque du segment [AC]. Lorsque le point appartient à [AB], on note M' le projeté orthogonal de M sur [GF] (figure 1). Lorsque le point appartient à [BC], on note M' le projeté orthogonal de M sur [ED] (figure 2).

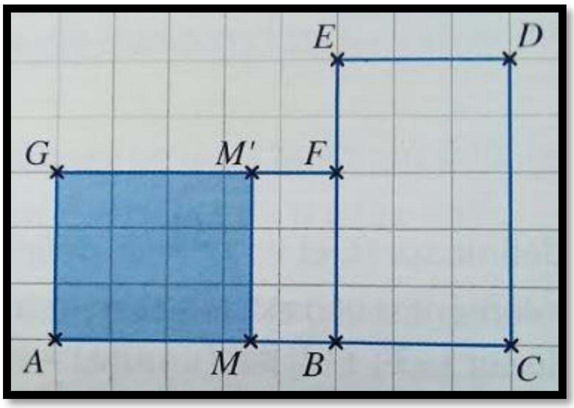


Figure 1

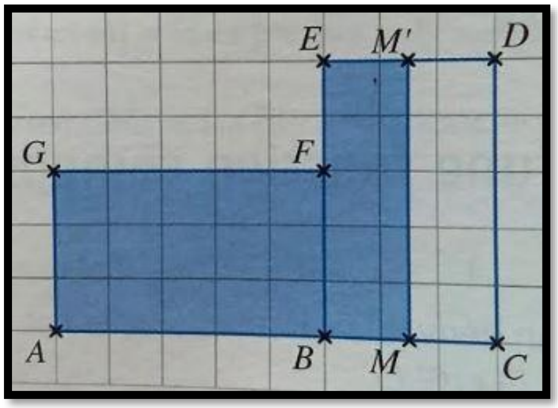


Figure 2

On note x la distance AM. On note f la fonction qui à chaque valeur de x associe l'aire du rectangle AMM'G lorsque M est un point de [AB], soit l'aire de l'hexagone AMM'EFG quand M est un point de [BC] distinct de B. On note g la fonction qui à chaque valeur de x associe le périmètre du rectangle AMM'G lorsque M est un point de [AB], soit l'aire de l'hexagone AMM'EFG quand M est un point de [BC] distinct de B.

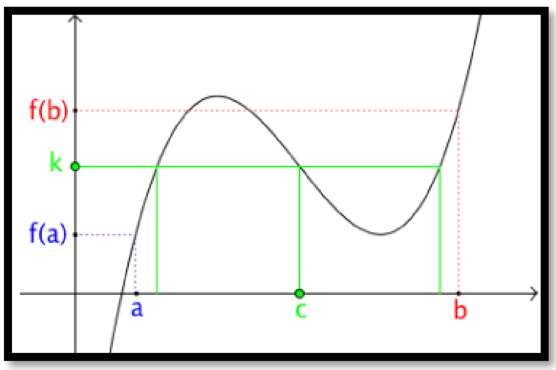
Exprimer $f(x)$ en fonction des valeurs de x. Tracer la courbe représentative de f dans un repère à l'aide d'un logiciel de géométrie. Existe-t-il une valeur de x pour laquelle l'aide de la figure colorée est égale à 12 ? Si oui laquelle ? Même question pour 20 et pour 32. Déterminer l'ensemble des réels k tels que l'équation $f(x)=k$ admette au moins une solution.

Exprimer $g(x)$ en fonction des valeurs de x. Tracer la courbe représentative de f dans un repère à l'aide d'un logiciel de géométrie. Existe-t-il une valeur de x pour laquelle l'aide de la figure colorée est égale à 10 ? Si oui laquelle ? Même question pour 24 et pour 18. Déterminer l'ensemble des réels k tels que l'équation $f(x)=k$ admette au moins une solution.

Le théorème des valeurs intermédiaires

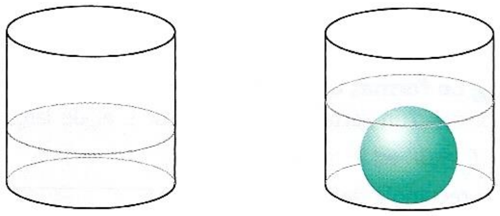
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution c dans l'intervalle $[a;b]$.

L'unicité de la solution est liée à la monotonie de la fonction sur l'intervalle d'étude…



Une bille plongée dans l'eau

Un cylindre a pour base un disque de rayon 1 dm et contient de l'eau sur une hauteur de 0,5 dm. On plonge dans ce cylindre une bille de diamètre d (le diamètre est exprimé lui aussi en dm).



On se propose de calculer le diamètre de la bille pour lequel le niveau d'eau sera tangent à la bille lorsque celle-ci sera immergée dans l'eau. On rappelle que le volume d'une boule de rayon R est donné par la formule ${}^4\!/_3\,\pi R^3$.

1. Démontrer que d vérifie l'encadrement $0 \leq d \leq 2$ et l'équation $d^3 - 6d + 3 = 0$.

2. Démontrer que l'équation $d^3 - 6d + 3 = 0$ admet une unique solution sur $[0;2]$. On pourra pour cela étudier la fonction définie par $f(x) = x^3 - 6x + 3$ sur l'intervalle $[0;2]$.

3. Que permet d'obtenir la fonction « dicho(f,a,b,n) » proposée ci-contre ? Préciser les valeurs des variables a et b à chaque passage dans la boucle « while » lorsqu'on introduit la fonction de l'exercice, $a = 0$, $b = 2$ $n = 2$.

4. Répondre ensuite au problème posé…

```
def dicho(f,a,b,n):
  while b-a>10**(-n):
    m=(a+b)/2
    p=f(a)*f(m)
    if p>0:
      a=m
    else:
      b=m
  return a,b

def fonction(x):
  return x**3-6*x+3

print(dicho(fonction,0,2,2))

(0.5234375, 0.53125)
```

Etude d'une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $IR - \{-1;1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.

Etude d'une fonction auxiliaire

On considère f_1 le polynôme défini par $f_1(x) = x^3 - 3x - 4$. Etudier le sens des variations de la fonction f_1 sur IR. Déterminer les limites de la fonction f_1 aux bornes de son ensemble de définition. Démontrer que sur l'intervalle $]-\infty;2]$, et sur l'intervalle $[3;+\infty[$, l'équation $f_1(x) = 0$ n'admet pas de solution. Démontrer ensuite que sur l'intervalle $[2;3]$, l'équation $f_1(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, dont vous déterminerez à l'aide de votre calculatrice un encadrement au millième près. En déduire le signe de $f_1(x)$ sur IR.

Etude d'un algorithme

On propose ci-contre un algorithme permettant de déterminer un encadrement de la solution α de l'équation $f_1(x)=0$ sur l'intervalle $[2;3]$.

```
def dicho(f,a,b,n):
  while b-a>10**(-n):
    m=(a+b)/2
    p=f(a)*f(m)
    if p>0:
      a=m
    else:
      b=m
  return a,b

def fonction(x):
  return x**3-3*x-4

print(dicho(fonction,2,3,2))

(2.1953125, 2.203125)
```

Comment s'appelle le principe de recherche de l'encadrement de la solution.

Quelle influence le nombre n introduit au début de l'algorithme a-t-il sur l'encadrement obtenu ?

On fait fonctionner cet algorithme pour $n=2$.

Recopier et compléter à l'aide de votre calculatrice le tableau proposé ci-dessous donnant les différentes étapes de l'algorithme.

Pourquoi l'algorithme s'arrête-t-il à l'étape 7 ?

	m	p	a	b	$b-a$
Etape 0	/	/	2	3	1
Etape 1	?	?	?	?	?
Etape 2	?	?	?	?	?
Etape 3	?	?	?	?	?
Etape 4	?	?	?	?	?
Etape 5	2,21875	-0.025293253	2,1875	2,21875	0,03125
Etape 6	2,203125	-0.0079836631	2,1875	2,203125	0,015625
Etape 7	2,1953125	0.00055606139	2,1953125	2,203125	0,0078125

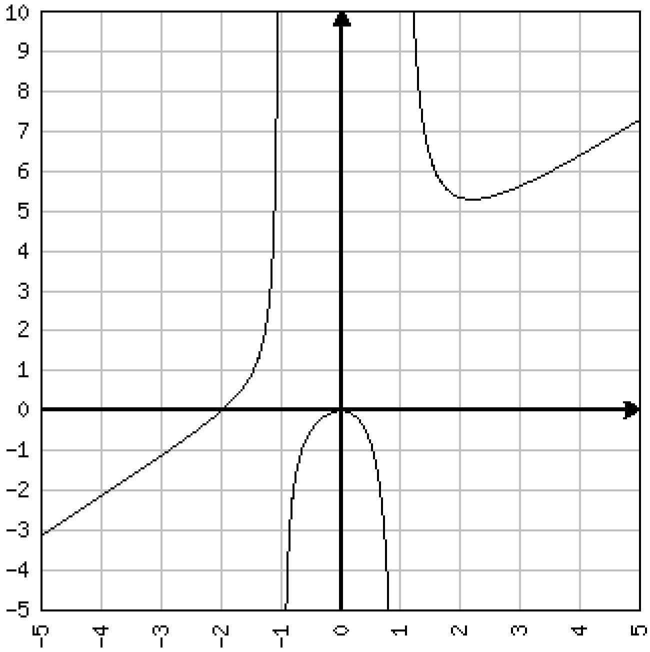
Etude de la fonction rationnelle

1. Calculer la dérivée de f et montrer que $f'(x)=\dfrac{x\times f_1(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$.

2. Dresser le tableau des variations complet de la fonction f.

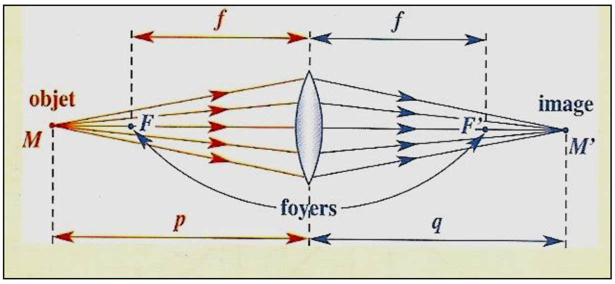
3. Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

4. Représenter deux asymptotes verticales, deux tangentes horizontales, α et $f(\alpha)$.



Notion de limite

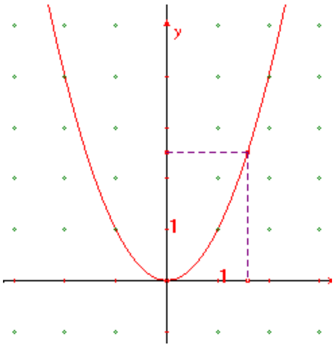
Pour une lentille convexe dont la distance focale est f, la distance p d'un objet au centre de la lentille et la distance q de son image au centre sont reliés par la relation suivante : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$



1. Exprimer q en fonction de p. φ est la fonction définie sur $]p;+\infty[$ par $\varphi(p)=q$.
2. Déterminer $\lim\limits_{p\to f^+}\varphi(p)$. Déterminer $\lim\limits_{p\to +\infty}\varphi(p)$. Interpréter les deux résultats obtenus.

Fonction carré

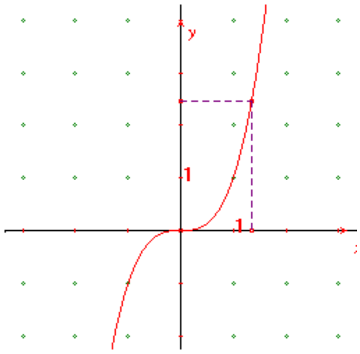
Fonction cube



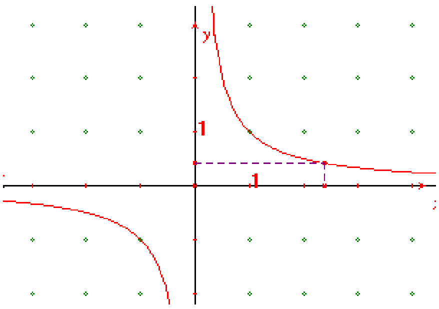
Ecrire le domaine de définition de la fonction carré et de la fonction cube sous la forme d'un intervalle.

Préciser les limites de ces deux fonctions aux bornes de leur ensemble de définition.

Dresser le tableau de variation complet de ces deux fonctions.



Fonction inverse

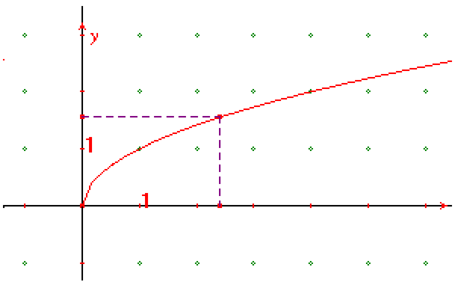


Ecrire le domaine de définition de la fonction inverse sous la forme d'un intervalle.

Préciser à l'aide de la notation exposée ci-dessus les limites de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition.

Dresser le tableau de variation complet de la fonction inverse sur son domaine de définition.

Fonction racine



Ecrire le domaine de définition de la fonction racine sous la forme d'un intervalle.

Préciser à l'aide de la notation exposée ci-dessus les limites de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition.

Dresser le tableau de variation de la fonction racine.

Calculs de limites

Connaissant les limites de deux fonctions f et g lorsque x tend vers a (fini ou infini), certaines questions naturelles se posent :

- Que dire de la **somme** $f+g$? Que dire du **produit** $f \times g$? Que dire du **quotient** $\frac{f}{g}$?
- Ont-ils une limite lorsque x tend vers a ? Si oui, comment la calculer ?

Les **théorèmes sur les limites** (à apprendre) apportent, dans certains cas, une réponse.

D'autres cas, appelés **cas d'indétermination** (à connaître) nécessitent une étude plus fine.

La somme

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction $\boldsymbol{f+g}$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le *tableau* ci-contre.

lim g \ lim f	L	$+\infty$	$-\infty$
L'	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	☠
$-\infty$	$-\infty$	☠	$-\infty$

Le produit

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction $\boldsymbol{f \times g}$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le *tableau* ci-contre.
(*Note :* $\pm\infty$ signifie $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de la limite finie.)

lim g \ lim f	$L \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L' \neq 0$	LL'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Si f et g ont une limite **finie** et si l'une est nulle, alors $\lim(fg) = 0$.
Dans tous les autres cas : ☠

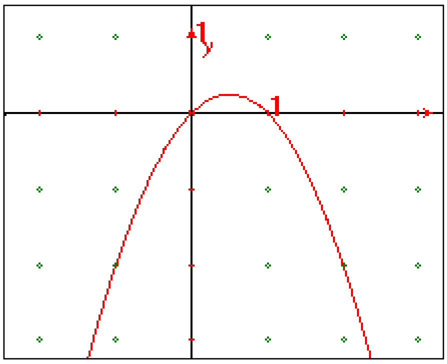
Le quotient

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction $\frac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le *tableau* ci-contre.

lim g \ lim f	L	$+\infty$	$-\infty$
$L' \neq 0$	$\frac{L}{L'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	☠	☠
$-\infty$	0	☠	☠

$\boxed{f(x) = x - x^2}$

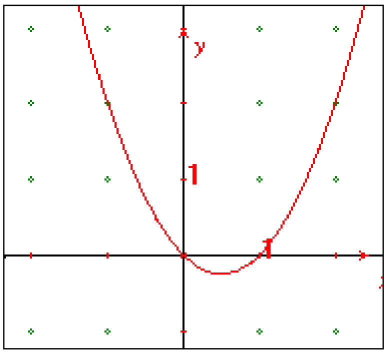
- Rappeler $\lim\limits_{x \to +\infty} x$.
- Rappeler $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$.



- Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$\boxed{g(x) = x^2 - x}$

- Rappeler $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$.
- Rappeler $\lim\limits_{x \to +\infty} x$.



- Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

- En déduire pourquoi il n'existe pas de théorème donnant le résultat du calcul $(\infty) - (\infty)$?

Comment lever l'indétermination ?

- Montrer que $f(x) = -x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)$
- Par application des règles sur le produit des limites, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
- Y a-t-il une différence entre $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2$?

- Montrer que $g(x) = x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)$
- Par application des règles sur le produit des limites, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
- Y a-t-il une différence entre $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$?

Fonctions polynômes

Une fonction f est **une fonction polynôme** lorsqu'il existe $(n+1)$ nombres réels a_0, a_1, …, a_n tels que : $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Le nombre n est le **degré du polynôme**. Le terme $a_n x^n$ est appelé **terme prépondérant**. En $-\infty$ et en $+\infty$, un polynôme a **même limite** que son **terme prépondérant**.

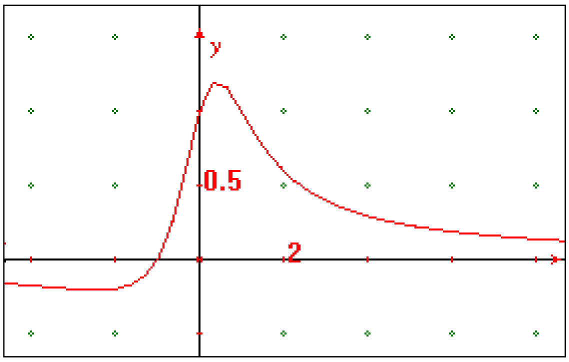
Exercices d'application directe

Déterminer pour chacun des polynômes suivants la limite en $+\infty$ et en $-\infty$:

$f(x) = 3x^2 + 1$ $\qquad g(x) = x^3 + x^2 - 1$ $\qquad h(x) = 2 - x - x^2$ $\qquad k(x) = -5x^3 + x - 2$

$$\boxed{f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}}$$

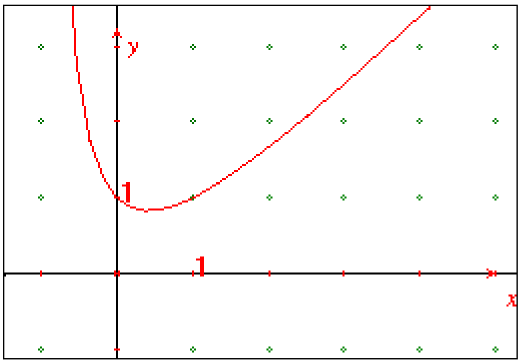
- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1$.
- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1$.



- Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\boxed{g(x)=\frac{x^2+1}{x+1}}$$

- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1$.
- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1$.



- Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

- En déduire pourquoi il n'existe pas de théorème donnant le résultat du calcul $\dfrac{(\infty)}{(\infty)}$?

Comment lever l'indétermination ?

- Montrer que $f(x)=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$.
- Par application des règles sur le produit et quotient des limites, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
- Que dire de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$?

- Montrer que $g(x)=x\times\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}$.
- Par application des règles sur le produit et quotient des limites, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
- Que dire de $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x$?

Fonctions rationnelles

Une fonction f est une **fonction rationnelle** lorsqu'il existe deux polynômes P et Q tels que : $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0}{b_px^p+\ldots+b_1x+b_0}$ avec $a_n\neq 0$ et $b_p\neq 0$, et où n et p sont les degrés des polynômes. En $-\infty$ et en $+\infty$, une fonction rationnelle a **même limite** que le **quotient simplifié des termes prépondérants**.

Exercice d'application directe

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x}\quad g(x)=\frac{x^2-1}{x^2}\quad h(x)=\frac{x-1}{x^2}\quad k(x)=\frac{x-1}{x}\quad m(x)=\frac{x^3-1}{x}\quad n(x)=\frac{x^4-1}{x^2}$$

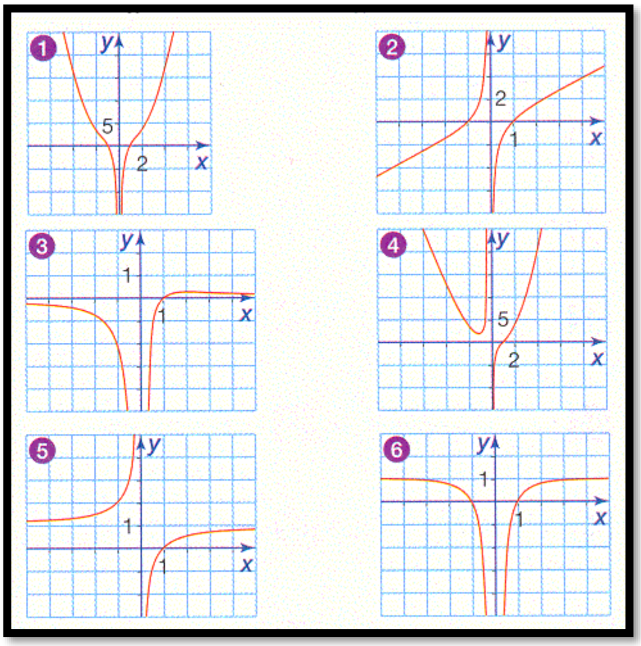
On a proposé ci-contre la représentation graphique de six fonctions rationnelles.

On a proposé ci-avant l'expression algébrique de chacune d'entre elles.

Le but du problème est d'associer à chaque fonction la représentation graphique qui lui correspond.

Pour cela, on étudiera le comportement asymptotique de chaque fonction au voisinage des bornes de son ensemble de définition.

Préciser pour chaque fonction l'existence d'asymptotes horizontales et/ou verticales.



Limite d'une fonction composée

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et si $\lim\limits_{x \to b} v(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} v(u(x)) = c$.

Ce résultat s'applique lorsque a, b et c sont des réels ou sont remplacés par $+\infty$ ou encore $-\infty$

Exercice d'application – Limite d'une fonction irrationnelle

1. On considère la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x^2+1}$.

   Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

2. On considère la fonction k définie par $k(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{4x+3}}$.

   Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x)$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x)$.

Lever une indétermination dans le cadre d'une racine

3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$. Préciser votre raisonnement.

   On montrera pour cela que $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$.

4. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-x}$. Préciser votre raisonnement.

   On montrera pour cela que $\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-x} = \dfrac{1+2/x}{\sqrt{1+2/x^2} + \sqrt{1-1/x}}$.

5. Déterminer $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$. Préciser votre raisonnement.

   On montrera pour cela que $\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2}$.

Théorèmes des gendarmes

Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur $[a;+\infty[$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = L$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L$.

Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur $]-\infty;b]$ et si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = L$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = L$.

Théorèmes de comparaison

Si $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle du type $[a;+\infty[$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Si $g(x) \leq h(x)$ sur un intervalle du type $]-\infty;b]$ et si $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

Calcul d'une valeur approchée de Pi

L'objectif de cet exercice est de démontrer que pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$\frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)} \leq x \leq \frac{2\sin(x)+\tan(x)}{3}.$$

Partie A

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)} - x$.

1. Calculer la dérivée de la fonction f et étudier le signe de $f'(x)$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
2. En déduire le sens de variation de la fonction f ainsi que le signe de $f(x)$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Partie B

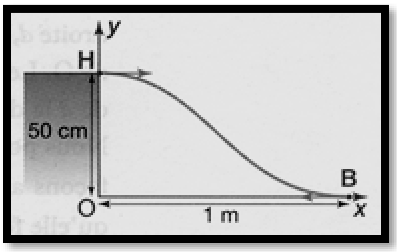
On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{2\sin(x)+\tan(x)}{3} - x$.

3. Calculer la dérivée de la fonction f et montrer que $g'(x) = \frac{(\cos(x)-1)^2(2\cos(x)+1)}{3(\cos(x))^2}$.
4. Etudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
5. En déduire le sens de variation de la fonction g ainsi que le signe de $g(x)$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Partie C

En utilisant les valeurs exactes des lignes trigonométriques de $\pi/6$ ainsi que le travail effectué dans les parties A et B, déterminer un encadrement de $\pi/6$, puis un encadrement de π.

Vers la notion de point d'inflexion



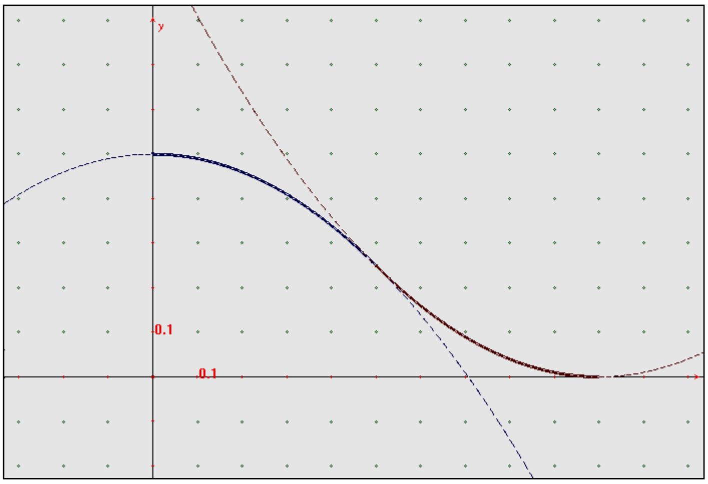
On veut installer une rampe en pente douce permettant à des chariots de franchir une marche comme l'indique la figure proposée ci-contre. La rampe doit satisfaire les deux conditions suivantes : être tangente au sol au point B et être tangente au sommet de la marche au point H.

On se place dans le repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{OB};2\overrightarrow{OH}\right)$.

Deux trinômes du second degré

On va chercher si elle existe une courbe formée de deux arcs de parabole qui se raccordent en un point. Pour cela on considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + \dfrac{1}{2} \text{ si } x \in [0;1/2] \\ f(x) = x^2 - 2x + 1 \text{ si } x \in [1/2;1] \end{cases}$$

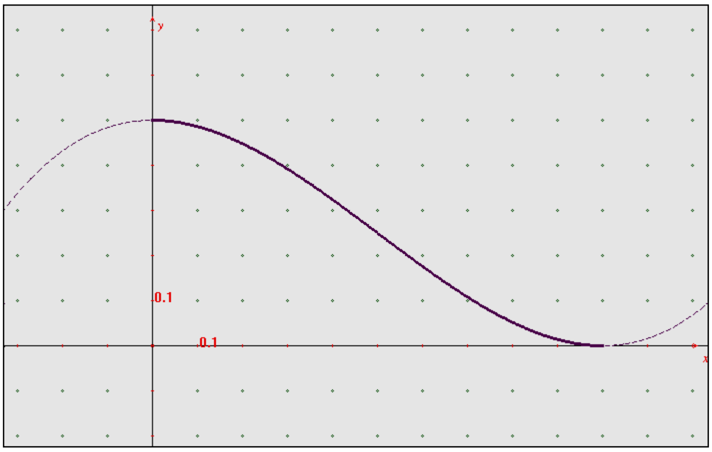


Etudier la fonction f sur l'intervalle $[0;1/2]$. Etudier la fonction f sur l'intervalle $[1/2;1]$. Expliquer à l'aide de quatre égalités pourquoi cette fonction remplit les conditions C1 et C2. Déterminer $f'(1/2)$. En déduire la pente maximale de la rampe. Déterminer le signe de $f''(x)$ pour $x \in [0;1/2]$. Déterminer le signe de $f''(x)$ pour $x \in [1/2;1]$. Que dire du point de la courbe d'abscisse $x = 1/2$?

Une fonction polynôme de degré 3

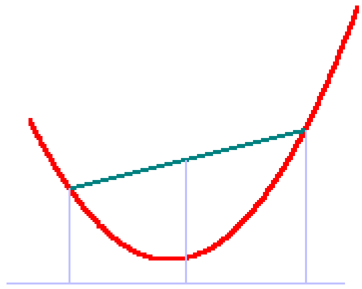
On cherche à améliorer le profil de la rampe en choisissant cette fois la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 3.

Pour cela on considère la fonction g définie par $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pour tout $x \in [0;1]$ où a, b, c et d sont quatre paramètres réels.



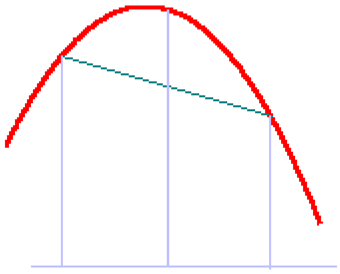
Déterminer les quatre paramètres a, b, c et d pour que la fonction g remplisse les conditions C1 et C2. Déterminer $g'(1/2)$. Pourquoi peut-on dire que l'on a amélioré le profil de la rampe ? Déterminer le signe de $g''(x)$ pour $x \in [0;1/2]$. Déterminer le signe de $g''(x)$ pour $x \in [1/2;1]$. Que dire du point de la courbe d'abscisse $x = 1/2$?

Convexe, concave et point d'inflexion



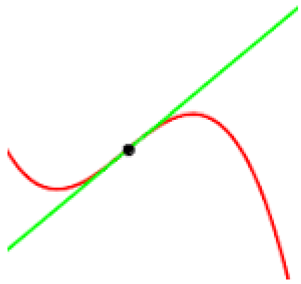
Définition : f est une fonction convexe sur un intervalle I lorsque sa courbe représentative est située en dessous de chacune de ses cordes.

Propriétés : f est une fonction convexe sur un intervalle I si et seulement si sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses tangentes. Si f est deux fois dérivable, f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.



Définition : f est une fonction concave sur un intervalle I lorsque sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses cordes.

Propriétés : f est une fonction concave sur un intervalle I si et seulement si sa courbe représentative est située en dessous de chacune de ses tangentes. Si f est deux fois dérivable, f est convexe sur I si et seulement si f'' est négative sur I.



Définition : on parle de point d'inflexion de la courbe représentative d'une fonction f lorsque la courbe traverse sa tangente en ce point.

Remarques : lorsque la fonction f change de convexité (passe de convexe à concave ou bien de concave à convexe), sa courbe représentative traverse sa tangente et admet un point d'inflexion. Si f est deux fois dérivable, elle admet un point d'inflexion lorsque f'' change de signe.

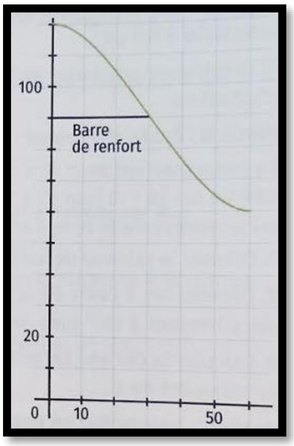
Rappel indispensable

On considère la courbe représentative d'une fonction f et la tangente (T) à la courbe au point A d'abscisse a. On souhaite démontrer que l'équation de la tangente (T) est de la forme : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$. Pour cela on notera $y = \alpha x + \beta$ l'équation de la tangente (T) où α est le coefficient directeur et où β est l'ordonnée à l'origine. Expliquer pourquoi $\alpha = f'(a)$. Montrer ensuite que $\beta = f(a) - f'(a)\times a$. Conclure…

Démonstration d'une implication

On souhaite démontrer l'implication suivante : « Soit f une foction deux fois dérivable sur un intervalle I. Si f'' est positive sur I alors sa courbe représentative est entièrement située au-desus de chacune de ses tangentes (elle est donc convexe) ». Pour cela on considère $a \in I$ et la fonction g définie par $g(x) = f(x) - \left(f'(a)(x-a)+f(a)\right)$. Calculer $g'(x)$ puis $g''(x)$. En déduire le signe de $g''(x)$, puis celui de $g'(x)$ et enfin celui de $g(x)$. Conclure…

Tremplin de saut à ski



Un ingénieur modélise le futur tremplin de saut à ski avec les contraintes suivantes : les tangentes au départ $(0;120)$ et à l'arrivée $(60;60)$ sont horizontales et la fonction qui modélise le tremplin sur l'intervalle $[0;60]$ est du type $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ où a, b, c et d sont quatre nombres réels à déterminer (polynôme de degré 3).

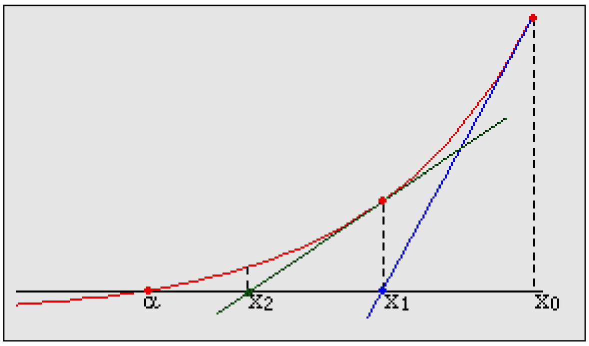
Etudier la convexité de f sur l'intervalle $[0;60]$. En déduire la longueur de la barre de renfort horizontale qui devra toucher le tremplin au point d'inflexion de la courbe représentative de f ainsi que la hauteur à laquelle cette barre de renfort devra être placée.

Inégalités de convexité

On considère une fonction f convexe sur un intervalle I. Soient a et b deux nombres réels distincts de l'intervalle I. On note A le point de coordonnées $(a;f(a))$ et B le point de coordonnées $(b;f(b))$. Déterminer les coordonnées du point C milieu du segment [AB]. En déduire l'inégalité $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$. Quelle inégalité peut-on établir si f est concave ?

Méthode de Newton

Vocabulaire : on appelle racine d'une fonction une valeur pour laquelle la fonction s'annule.



Le schéma proposé ci-contre illustre le procédé mis en place par Newton pour déterminer une valeur approchée de la racine α d'une fonction : à partir d'un point d'abscisse x_0 de la courbe, on trace la tangente à la courbe qui coupe l'axe des abscisses en x_1, à partir du point d'abscisse x_1 de la courbe, on trace la tangente à la courbe qui coupe l'axe des abscisses en x_2, et on réitère cette opération afin de s'approcher de α …

On note $f(x)$ l'expression algébrique d'une fonction, $f'(x)$ l'expression algébrique de la dérivée de cette fonction, x_0 l'abscisse d'un point de la courbe, x_1 l'intersection de la tangente à la courbe en x_0 avec l'axe des abscisses, x_2 l'intersection de la tangente à la courbe en x_1 avec l'axe des abscisses, …, x_{n+1} l'intersection de la tangente à la courbe en x_n avec l'axe des abscisses. Sauriez-vous exprimer x_1 en fonction de x_0 ? Sauriez-vous exprimer x_2 en fonction de x_1 ? Sauriez-vous exprimer x_{n+1} en fonction de x_n ? On admettra que la suite x_n converge vers α …