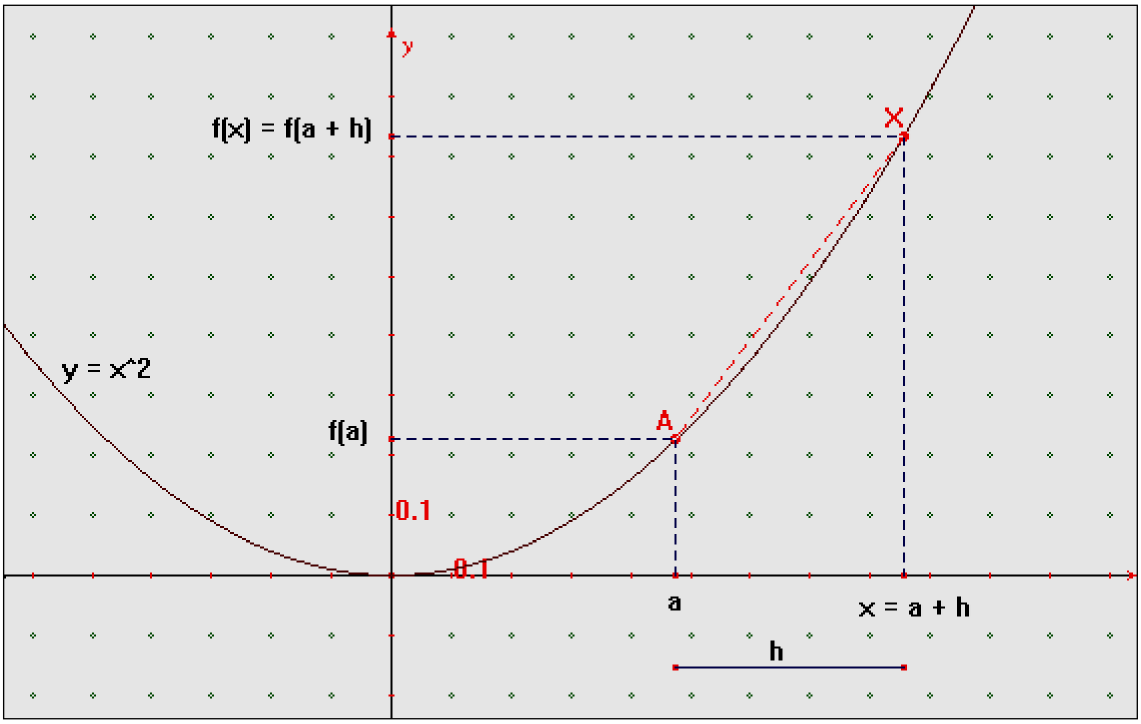


Le taux d'accroissement

Le taux d'accroissement d'une fonction f entre a et $a+h$ est défini par : $\boxed{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}$

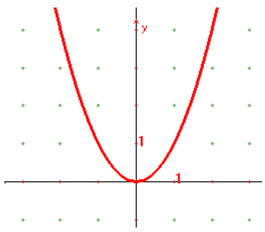
Dérivabilité d'une fonction

f est **dérivable** en a si le taux d'accroissement admet une **unique** limite **finie** quand $h \to 0$.

De la sécante à la tangente

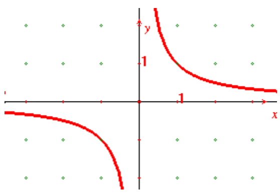
1. Que représente le taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a+h$?
2. Quelle est la position limite de la droite (AX) lorsque $h \to 0$?
3. Que représente alors l'expression $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$?

Nombre dérivé de la fonction carré



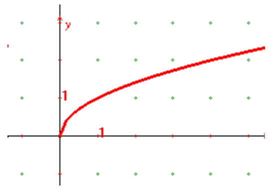
1. Est-elle dérivable en a ? Quel est le nombre dérivé ?
2. Quel est le domaine de définition de la fonction carrée ?
3. Quel est son domaine de dérivabilité ?

Nombre dérivé de la fonction inverse



1. Est-elle dérivable en a ? Quel est le nombre dérivé ?
2. Quel est le domaine de définition de la fonction inverse ?
3. Quel est son domaine de dérivabilité ?

Nombre dérivé de la fonction racine carrée



1. Est-elle dérivable en a ? Quel est le nombre dérivé ?
2. Quel est le domaine de définition de la fonction racine ?
3. Quel est son domaine de dérivabilité ?

Une fonction construite à partir d'une racine carrée

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

1. Déterminer le taux d'accroissement de la fonction entre a et $a+h$.
2. Montrer que ce taux d'accroissement est égal à $\dfrac{2a+h}{\sqrt{(a+h)^2+1}+\sqrt{a^2+1}}$.
3. Calculer la limite du taux d'accroissement lorsque $h\to 0$.
4. La fonction f est-elle dérivable en a ? Quel est le nombre dérivé de cette fonction ?
5. Quel est le domaine de définition de la fonction étudiée ci-dessus ?
6. Quel est son domaine de dérivabilité ?

Composée de deux fonctions

f est la **composée des deux fonctions** u et v lorsqu'elle est définie par : $\boxed{f(x)=v(u(x))}$.
Une telle fonction composée se note $v\circ u$ notation qui se lit « v rond u ».

Exercice d'application directe

Déterminer pour chaque fonction proposée, deux fonctions u et v telles que $f(x)=v\circ u(x)$.

$g(x)=\sqrt{2x+3}$ $\qquad h(x)=e^{2x+3}$ $\qquad k(x)=e^{x^2+1}$

$m(x)=\sqrt{1-x^2}$ $\qquad n(x)=e^{1-x^2}$ $\qquad p(x)=e^{-x}$

Dérivation d'une fonction composée

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ et a un nombre réel quelconque.

1. Ecrire la fonction f sous la forme $v\circ u$. Déterminer $u'(a)$. Déterminer $v'(u(a))$.
2. En vous reportant au travail précédent, rappeler $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a.
3. En déduire l'écriture de $f'(a)$ en fonction de $u'(a)$ et $v'(u(a))$.

Formule de dérivée d'une fonction composée

4. Ecrire la formule donnant la dérivée d'une fonction composée.
5. Déterminer la dérivée des fonctions proposées dans l'exercice d'application.

Dérivée du produit de deux fonctions

On propose ci-dessous les différentes étapes de la démonstration de la formule de dérivée d'un produit de deux fonctions. Certaines étapes ont été malencontreusement effacées. Recopier et compléter les expressions de l'étape 3, étape 4 et étape 5 reportées ci-dessous afin de retrouver l'intégralité de la démonstration.

Départ On considère une fonction s'écrivant comme le produit de deux fonctions.	$f(x)=u(x)\times v(x)$
Etape 1 On connait la formule du taux de variation d'une fonction.	$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Etape 2 On applique la définition du taux de variation à la fonction de départ.	$\dfrac{u(a+h)\times v(a+h)-u(a)\times v(a)}{h}$
Etape 3 On introduit des quantités qui, par développement s'annulent.	$\dfrac{[?-?]\times v(a+h)+u(a)\times[?-?]}{h}$
Etape 4 On affecte le dénominateur à chaque terme de la somme.	$\dfrac{?-?}{h}\times v(a+h)+u(a)\times\dfrac{?-?}{h}$
Etape 5 On envisage le passage à la limite lorsque $h\to 0$.	$\underset{u'(a)}{\dfrac{?-?}{h}}\times\underbrace{v(a+h)}_{v(a)}+\underset{u(a)}{u(a)}\times\underset{v'(a)}{\dfrac{?-?}{h}}$
Arrivée On trouve l'expression de la dérivée du produit de deux fonctions.	$u'(a)\times v(a)+u(a)\times v'(a)$

Dérivée de la composée de deux fonctions

On propose ci-dessous les différentes étapes de la démonstration de la formule de dérivée de la composée de deux fonctions. Certaines étapes ont été malencontreusement effacées. Recopier et compléter les expressions de l'étape 3, étape 4 et étape 5 reportées ci-dessous afin de retrouver l'intégralité de la démonstration.

Départ On considère une fonction s'écrivant comme la composée de deux fonctions.	$f(x)=v\circ u(x)=v(u(x))$

Etape 1
On connait la formule du taux de variation d'une fonction.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Etape 2
On applique la définition du taux de variation à la fonction de départ.

$$\frac{v(u(a+h))-v(u(a))}{h}$$

Etape 3
On introduit des quantités qui, par produit se compensent.

$$\frac{v(u(a+h))-v(u(a))}{?-?}\times\frac{?-?}{h}$$

Etape 4
On rappelle que la limite du taux d'accroissement peut s'écrire autrement.

$$\lim_{X\to A}\frac{v(X)-v(A)}{X-A}=v'(A)$$

Etape 5
On envisage le passage à la limite lorsque $h\to 0$.

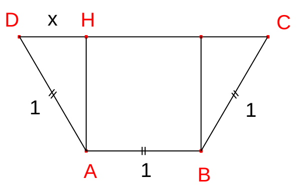
$$\underbrace{\frac{v(u(a+h))-v(u(a))}{?-?}}_{v'(u(a))}\times\underbrace{\frac{?-?}{h}}_{u'(a)}$$

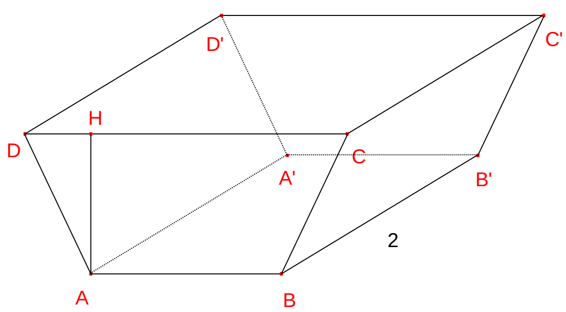
Arrivée
On trouve l'expression de la dérivée De la composée de deux fonctions.

$$v'(u(a))\times u'(a)$$

Maximiser un volume

Un récipient a la forme d'un prisme droit dont la base est un trapèze isocèle $ABCD$. Toutes les dimensions de ce récipient sont fixées sauf la longueur CD. On donne $AB=BC=AD=1$ et $BB'=2$, l'unité étant le mètre. On cherche la valeur à donner à la grande base CD du trapèze $ABCD$ afin que le volume de ce récipient soit maximal. On appelle H le projeté orthogonal de A sur $[CD]$. On note x la longueur HD.





1. Quelles sont les valeurs possibles prises par la variable x ?

2. Déterminer l'aire du trapèze $ABCD$ en fonction de x.

3. Montrer que le volume de ce récipient s'exprime en fonction de x par $V(x)=2(x+1)\sqrt{1-x^2}$.

4. Montrer que $V'(x)=2\times\dfrac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

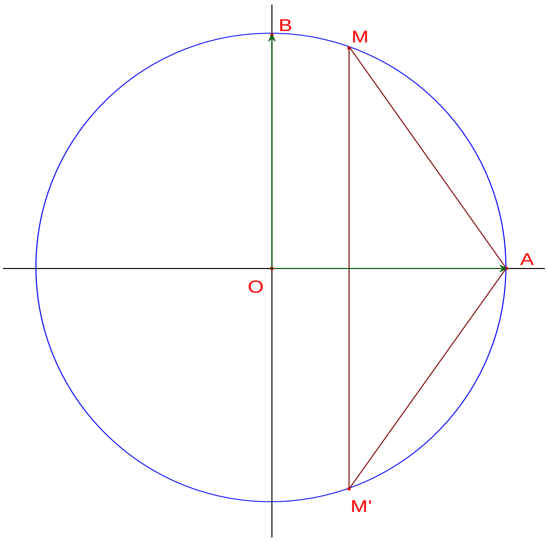
5. Etudier la fonction V sur l'intervalle $[0;1]$.
   On étudiera le signe de la dérivée et on en déduira les variations de la fonction.

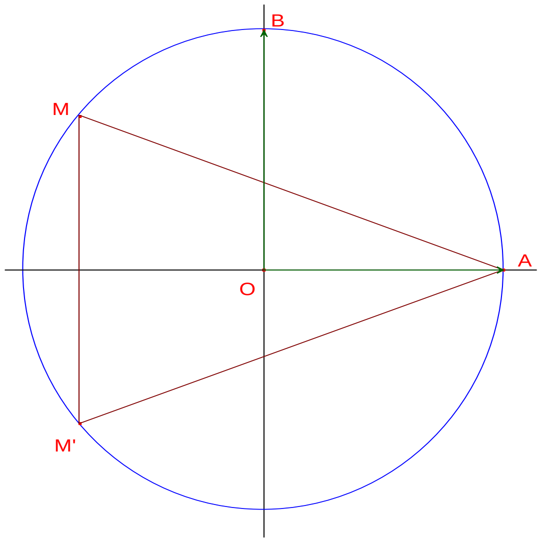
6. Pour quelle valeur de x le volume de ce récipient est-il maximal ?
   Quel est alors ce volume ? Préciser la valeur de l'angle ADH dans un tel cas.

Maximiser une aire

Soit C le cercle trigonométrique et A un point du cercle. On se propose d'étudier les aires des triangles isocèles de sommet A inscrits dans le cercle C.

On choisit le repère orthonormal direct $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$. Un triangle AMM' inscrit dans le cercle C se présentera alors comme la figure ci-dessous (on choisit pour M l'ordonnée positive).





Désignons par x l'abscisse du point M (et donc l'abscisse du point M' également).

1. Quelles sont les valeurs possibles prises par la variable x ?

2. Montrer que l'aire du triangle AMM' s'exprime en fonction de x par l'expression suivante : $A(x)=\sqrt{1-x^2}\times(1-x)$. Montrer que $A'(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Etudier la fonction A sur l'intervalle $[-1;1]$.
   On étudiera le signe de la dérivée et on en déduira les variations de la fonction.

4. Pour quelle valeur de x l'aire du triangle AMM' est-elle maximale ?
   Que peut-on dire de ce triangle ? Quelle est son aire ?

Sans oublier la dérivée du quotient de deux fonctions

On propose ci-dessous les différentes étapes de la démonstration de la formule de dérivée d'un quotient de deux fonctions On parle de fonction rationnelle. Certaines étapes ont été malencontreusement effacées. Recopier et compléter les expressions de l'étape 2, étape 3, étape 5 et étape 6 reportées ci-dessous afin de retrouver l'intégralité de la démonstration.

Départ
On considère une fonction s'écrivant comme le quotient de deux fonctions.

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$$

Etape 1
On connait la formule du taux de variation d'une fonction.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Etape 2
On applique la définition du taux de variation à la fonction de départ.

$$\frac{\frac{?}{?}-\frac{?}{?}}{h}$$

Etape 3
On réduit les deux fractions au même dénominateur afin de pouvoir soustraire.

$$\frac{\frac{?\times ?}{?\times ?}-\frac{?\times ?}{?\times ?}}{h}$$

Etape 4
On réduit les étages de cette fraction de fraction.

$$\frac{u(a+h)\times v(a)-u(a)\times v(a+h)}{v(a+h)\times v(a)\times h}$$

Etape 5
On introduit deux quantités qui, par développement, s'annulent.

$$\frac{[?-?]\times ?-?\times[?-?]}{v(a+h)\times v(a)\times h}$$

Etape 6
On réorganise l'expression et on envisage le passage la limite lorsque $h\to 0$.

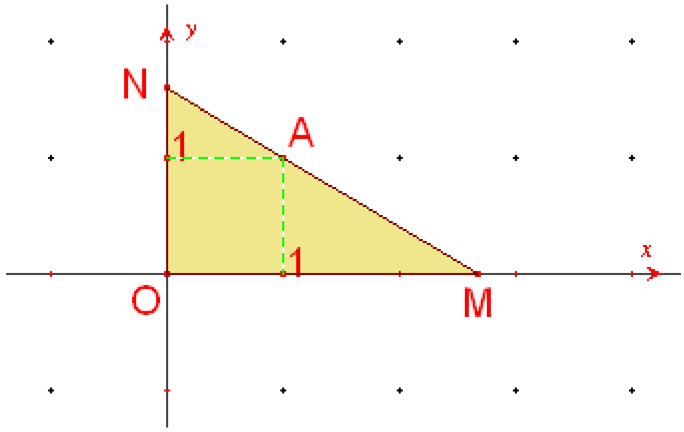
$$\frac{1}{\underbrace{v(a+h)\times v(a)}_{[v(a)]^2}}\times\left[\underbrace{\frac{?-?}{h}}_{u'(a)}\times ?-?\times\underbrace{\frac{?-?}{h}}_{v'(a)}\right]$$

Arrivée
On retrouve l'expression de la dérivée du quotient de deux fonctions.

$$\frac{u'(a)\times v(a)-u(a)\times v'(a)}{[v(a)]^2}$$

Minimiser une aire

On considère le point A de coordonnées $(1;1)$. M et N sont les points d'intersection d'une droite passant par A avec les des deux axes du repère. Le but du problème est de déterminer la position de M et de N pour que l'aire du triangle OMN soit minimale. On note x l'abscisse de M et y l'ordonnée de N.



1. Exprimer y en fonction de x.

2. On appelle f la fonction exprimant l'aire du triangle OMN en fonction de x. Déterminer l'expression algébrique $f(x)$. Préciser l'intervalle d'étude de la fonction f.

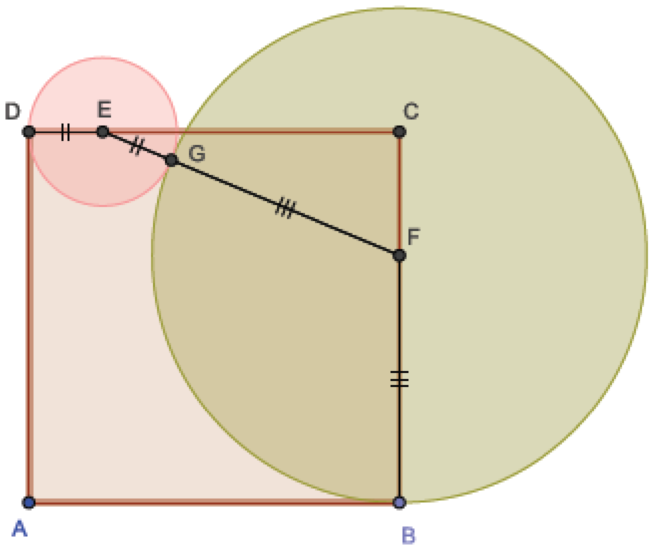
3. Procéder à l'étude de la fonction sur cet intervalle puis conclure.

Minimiser une longueur

ABCD est un carré de côté 1. E est un point du segment [CD] et F est un point du segment [BC]. Les cercles C et C' de centres respectifs E et F passent respectivement par les points D et B. Ces deux cercles sont tangents entre eux au point G.

Le but de ce problème est de déterminer la position du point G pour laquelle la distance EF est minimale.

On pose $DE = x$ et $BF = y$.

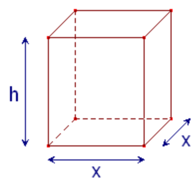


1. Démontrer que $y = \dfrac{1-x}{1+x}$. En déduire l'expression de la distance EF en fonction de x.

2. Etudier la fonction d définie par $d(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ sur l'intervalle $[0;1]$. En déduire la position de G pour que la distance EF soit minimale. Préciser cette distance minimale.

Minimiser une surface

On souhaite fabriquer une cuve à ciel ouvert. Cette cuve a la forme d'un pavé droit à base carrée. Son volume doit être de 4 mètres cube. On utilise de la peinture antirouille pour traiter les parois intérieures. Déterminer les dimensions de la cuve qui permettent d'utiliser le moins de peinture possible.



Une nouvelle fonction

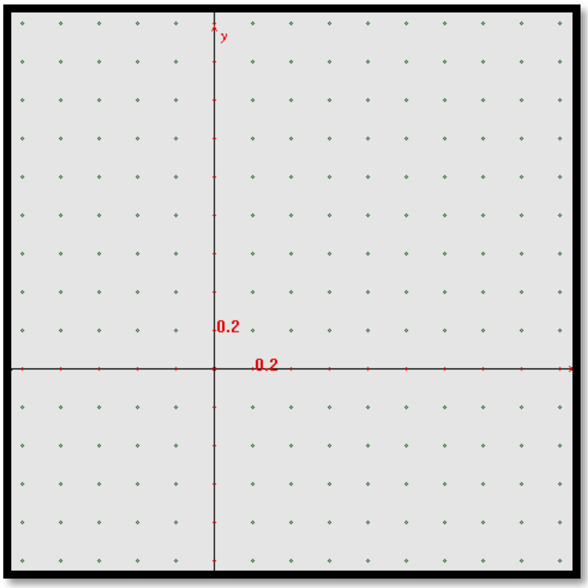
La fonction **partie entière** notée E est la fonction définie par :

$$\boxed{\text{si } x \in [n; n+1[\text{ avec } n \text{ entier alors } E(x) = n}$$

Représentation graphique

1. Tracer dans le repère ci-contre le graphe de la fonction partie entière sur l'intervalle $[-1;2]$.

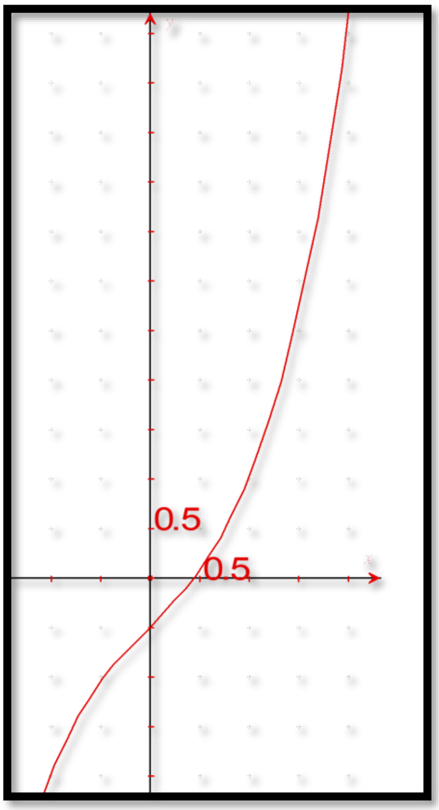
2. Discuter suivant les valeurs de k du nombre de solutions $E(x) = k$.



3. Reprendre les mêmes questions avec la fonction définie par : $f(x) = x - E(x)$.

Une fonction polynôme

On considère désormais la fonction g définie sur l'intervalle $[-1;2]$ par $g(x) = \frac{1}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}$ dont on a tracé ci-contre la représentation graphique.



4. Discuter suivant les valeurs de k du nombre de solutions de l'équation $g(x) = k$.

5. Déterminer graphiquement :

   - $E(1)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} E(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} E(x)$.
   - $f(1)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.
   - $g(1)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$.

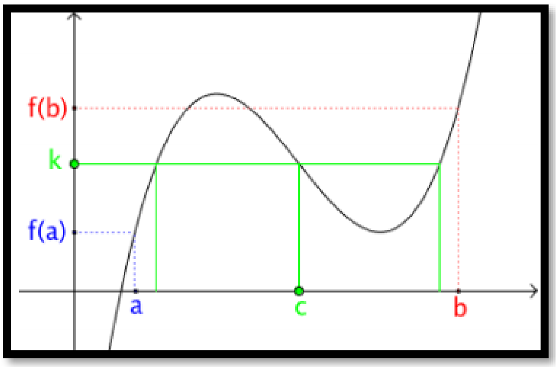
6. Par un procédé que vous détaillerez, déterminer un encadrement à 10^{-3} près de la solution de l'équation $h(x) = 0$. A quelle condition ce procédé de résolution est-il applicable ?

Continuité, discontinuité

Une fonction f est **continue** en $x = a$ lorsque $\boxed{\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)}$, c'est-à-dire lorsque $\boxed{\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)}$. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est **discontinue**.

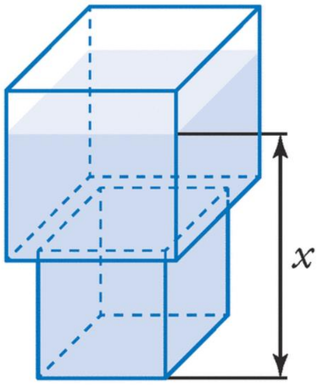
Le théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution c dans l'intervalle $[a;b]$. L'unicité de la solution sera liée à la monotonie de la fonction sur l'intervalle d'étude…



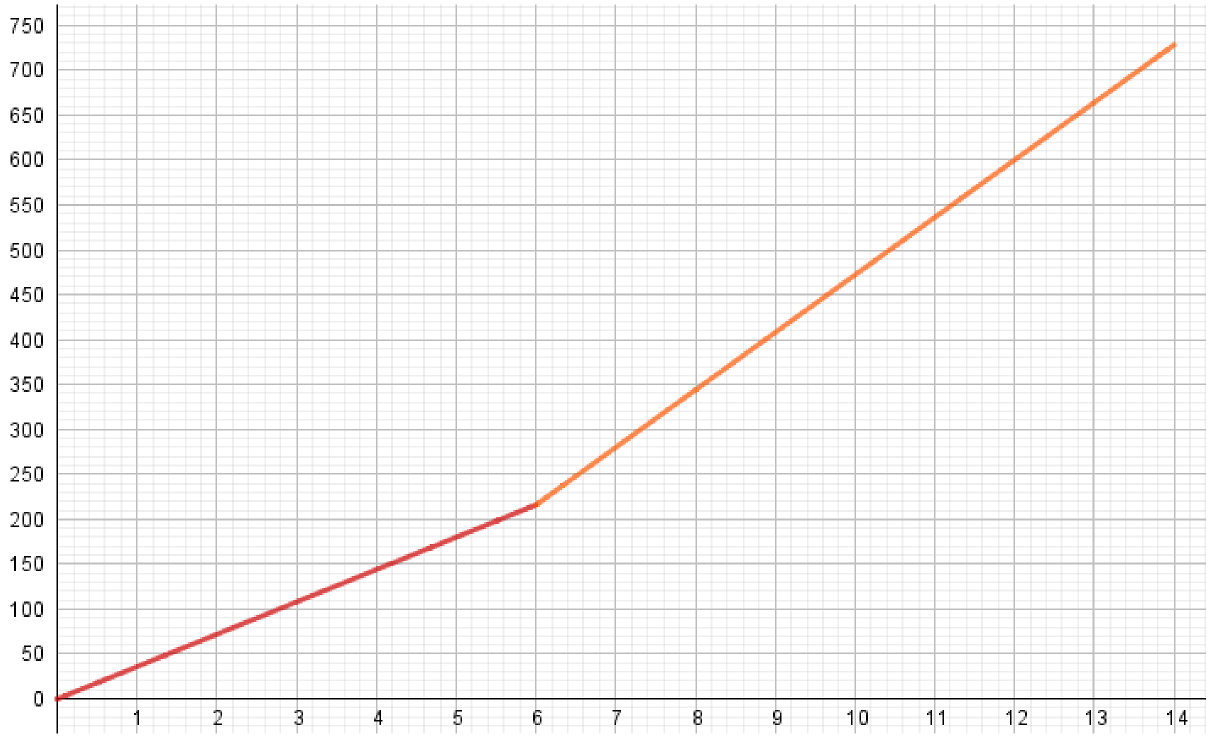
Existence et unicité de la solution d'une équation

Une cuve est formée de deux cubes superposés. L'arête du petit cube est de 6 mètres tandis que celle du grand cube est de 8 mètres. On note x la hauteur d'eau versée dans la cuve et on s'intéresse à la fonction V donnant le volume d'eau et la fonction S donnant la surface des parois recouvertes d'eau. Des calculs élémentaires de volume et de surface permettent d'établir que :

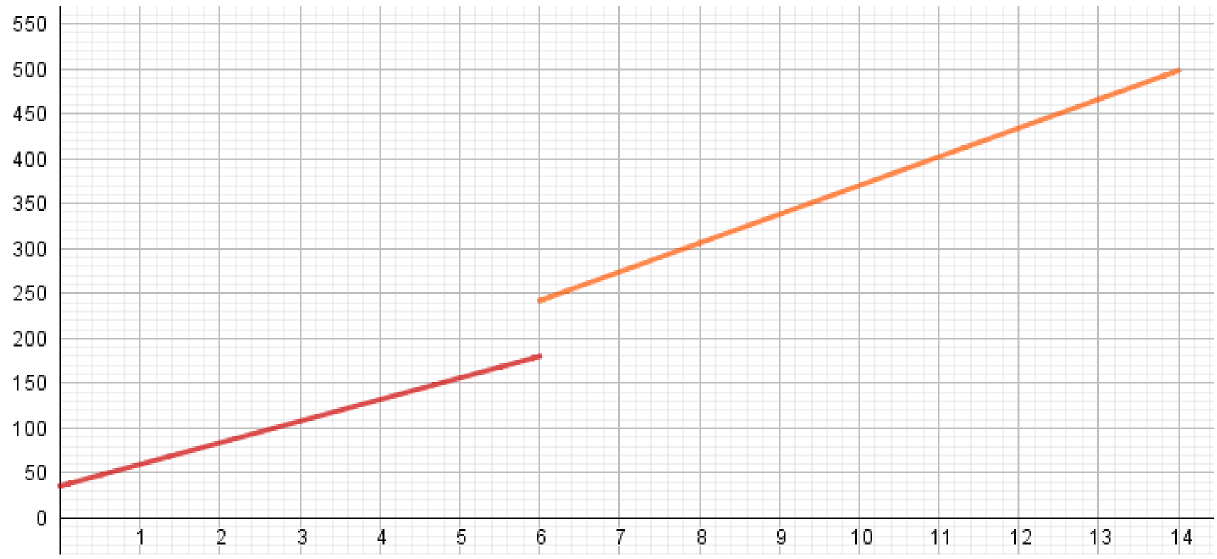


$$\begin{cases} V(x)=36x \text{ si } 0\leq x\leq 6 \\ V(x)=64x-168 \text{ si } 6<x\leq 14 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} S(x)=36+24x \text{ si } 0\leq x\leq 6 \\ S(x)=50+32x \text{ si } 6<x\leq 14 \end{cases}$$

On a tracé la représentation graphique de la fonction V dans le repère ci-dessous. Faire un commentaire sur le plan de la continuité / discontinuité de cette fonction en $x=6$. Discuter, en fonction de la valeur de k, du nombre de solution de l'équation $V(x)=k$.



On a tracé la représentation graphique de la fonction S dans le repère ci-dessous. Faire un commentaire sur le plan de la continuité / discontinuité de cette fonction en $x=6$. Discuter, en fonction de la valeur de k, du nombre de solution de l'équation $S(x)=k$.



Approximation par balayage

On donne ci-dessous le tableau de variations complet de la fonction polynomiale définie par $f(x)=x^3+6x^2+9x+3$. On souhaite dans un premier temps justifier quelques éléments contenus dans ce tableau, pour cela : calculer $f'(x)$, résoudre $f'(x)=0$, Calculer $f(-3)$ et $f(-1)$, expliquer succinctement pourquoi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$?

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

On s'intéresse dans un second temps aux racines réelles de cette fonction polynomiale en essayant de déterminer combien il y en a et où elles se situent. Pour cela : démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur l'intervalle $]-\infty;-4]$, démontrer que la fonction f admet une unique racine α sur l'intervalle $[-4;-3]$, démontrer que la fonction f admet une unique racine β sur l'intervalle $[-3;-1]$, démontrer que la fonction f admet une unique racine γ sur l'intervalle $[-1;0]$, démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Déterminer par la méthode de balayage un encadrement <u>au dixième près</u> des racines α, β et γ.

Approximation par dichotomie

On considère la fonction polynomiale f définie par $f(x)=x^3+x-1$. Dresser ci-dessous le tableau de variation de f sur $[0;1]$.

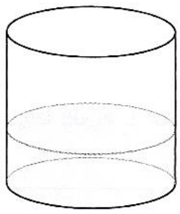
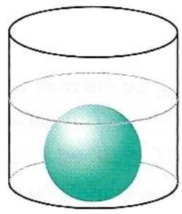
x	0 1
$f'(x)$	
$f(x)$	

```python
def f(x):
    return x**3+x-1
def dicho(a,b) :
    n=0
    while b-a>=10**(-3):
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)<0:
            b=c
        else:
            a=c
        n=n+1
    return a,b,n
```

On considère la fonction « dicho(a,b) » et on propose ci-dessous une feuille de calcul (tableur) permettant de suivre les valeurs des variables lorsque $a=0$ et lorsque $b=1$. Les lignes 4 et 5 ont été effacées, sauriez-vous les retrouver ? Quelles seront les trois valeurs obtenues en écrivant « print(dicho(0,1)) » dans la console ? Que représentent ces trois valeurs ?

n	c	f(a)*f(c)	a	b	b-a
0			0	1	1
1	0,5	0,375	0,5	1	0,5
4	0,6875	-0,00163	0,625	0,6875	0,0625
5	0,65625	0,007999	0,65625	0,6875	0,03125
6	0,671875	0,001518	0,671875	0,6875	0,015625
7	0,679688	0,000157	0,679688	0,6875	0,007813

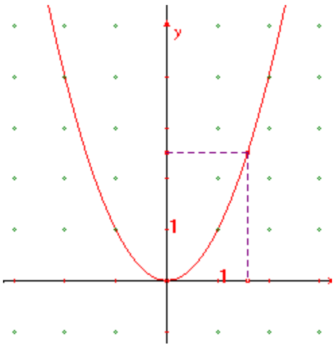
Une bille plongée dans l'eau

Un cylindre a pour base un disque de rayon 1 dm et contient de l'eau sur une hauteur de 0,5 dm. On plonge dans ce cylindre une bille de diamètre d (le diamètre est exprimé lui aussi en dm).

On se propose de calculer le diamètre de la bille pour lequel le niveau d'eau sera tangent à la bille lorsque celle-ci sera immergée dans l'eau. On rappelle que le volume d'une boule de rayon R est donné par la formule $\frac{4}{3}\pi R^3$. Démontrer que d vérifie l'encadrement $0\le d\le 2$ et l'équation $d^3-6d+3=0$ puis que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $[0;2]$.

Fonction carré

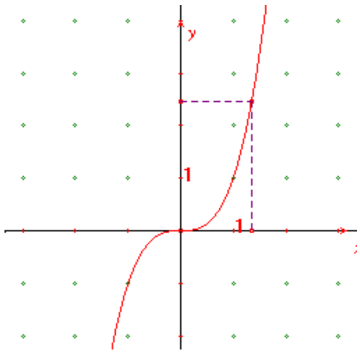


Ecrire le domaine de définition de la fonction carré et de la fonction cube sous la forme d'un intervalle.

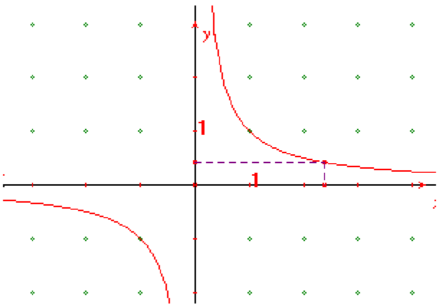
Préciser les limites de ces deux fonctions aux bornes de leur ensemble de définition.

Dresser le tableau de variation complet de ces deux fonctions.

Fonction cube



Fonction inverse

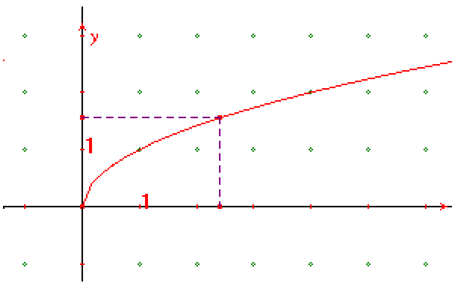


Ecrire le domaine de définition de la fonction inverse sous la forme d'un intervalle.

Préciser à l'aide de la notation exposée ci-dessus les limites de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition.

Dresser le tableau de variation complet de la fonction inverse sur son domaine de définition.

Fonction racine



Ecrire le domaine de définition de la fonction racine sous la forme d'un intervalle.

Préciser à l'aide de la notation exposée ci-dessus les limites de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition.

Dresser le tableau de variation de la fonction racine.

Fonctions polynômes et fonctions rationnelles

Une fonction f est **une fonction polynôme** lorsqu'il existe $(n+1)$ nombres réels a_0, a_1, …, a_n tels que : $f(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$ avec $a_n\neq 0$. Le nombre n est le **degré du polynôme**. Le terme a_nx^n est appelé **terme prépondérant**. En $-\infty$ et en $+\infty$, un polynôme a **même limite** que son **terme prépondérant**.

Une fonction f est une **fonction rationnelle** lorsqu'il existe deux polynômes P et Q tels que : $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_nx^n+...+a_1x+a_0}{b_px^p+...+b_1x+b_0}$ avec $a_n\neq 0$ et $b_p\neq 0$, et où n et p sont les degrés des polynômes. En $-\infty$ et en $+\infty$, une fonction rationnelle a **même limite** que le **quotient simplifié des termes prépondérants**.

Exercice d'application directe

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ $\quad g(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$ $\quad h(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$ $\quad k(x)=\dfrac{x-1}{x}$ $\quad m(x)=\dfrac{x^3-1}{x}$ $\quad n(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2}$

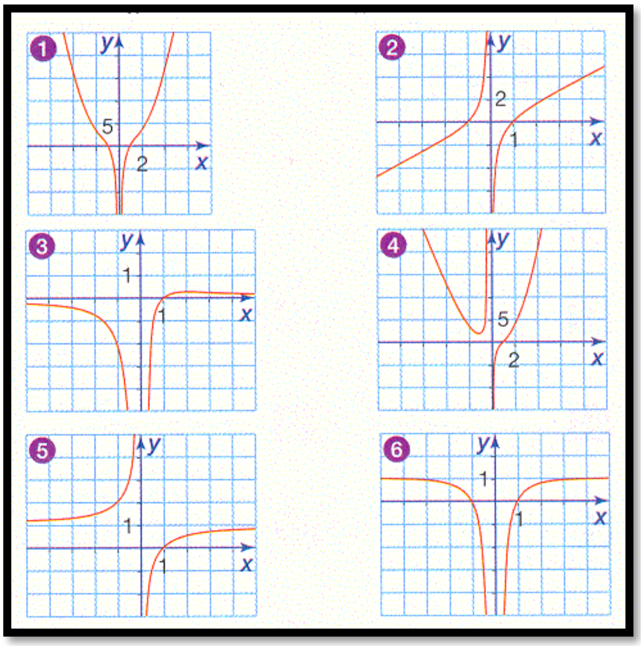
On a proposé ci-contre la représentation graphique de six fonctions rationnelles.

On a proposé ci-avant l'expression algébrique de chacune d'entre elles.

Le but du problème est d'associer à chaque fonction la représentation graphique qui lui correspond.

Pour cela, on étudiera le comportement asymptotique de chaque fonction au voisinage des bornes de son ensemble de définition.

Préciser pour chaque fonction l'existence d'asymptotes horizontales et/ou verticales.



Limite d'une fonction composée

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ et si $\lim\limits_{x\to b} v(x)=c$ alors $\lim\limits_{x\to a} v(u(x))=c$.
Ce résultat s'applique lorsque a, b et c sont des réels ou sont remplacés par $+\infty$ ou encore $-\infty$

Exercice d'application directe

1. On considère la fonction f définie par $f(x)=e^{-2x+3}$. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. On considère la fonction g définie par $g(x)=e^{x^2}$. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

3. On considère la fonction h définie par $h(x)=\sqrt{x^2+1}$. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

4. On considère la fonction k définie par $k(x)=\sqrt{\dfrac{2x-1}{4x+3}}$. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$.

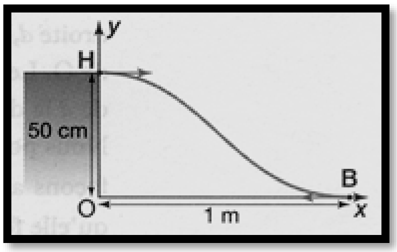
Lever une indétermination dans le cadre d'une racine (pour mémoire)

5. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$. Préciser votre raisonnement.

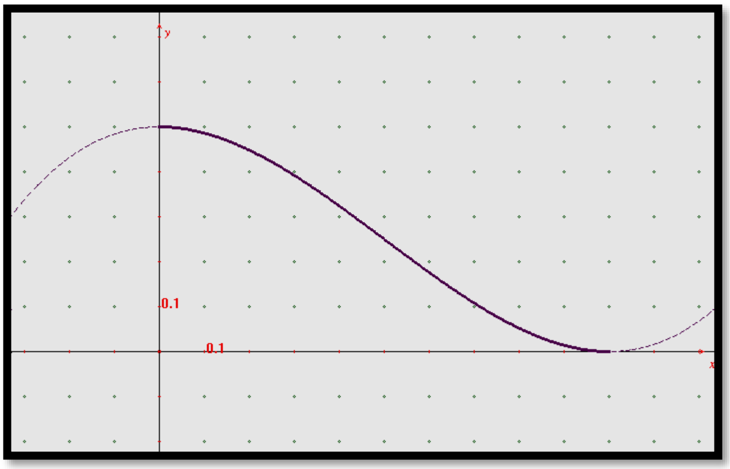
   On montrera pour cela que $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

Vers la notion de point d'inflexion

On veut installer une rampe en pente douce permettant à des chariots de franchir une marche comme l'indique la figure proposée ci-contre. La rampe doit satisfaire les deux conditions suivantes : (C1) être tangente au sol au point B et (C2) être tangente au sommet de la marche au point H.



On cherche le profil de la rampe en imaginant la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 3. Pour cela on considère la fonction g définie par $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ pour tout $x\in[0;1]$ où a, b, c et d sont quatre paramètres réels. Déterminer les quatre paramètres a, b, c et d pour que la fonction g remplisse les deux conditions (C1) et (C2).

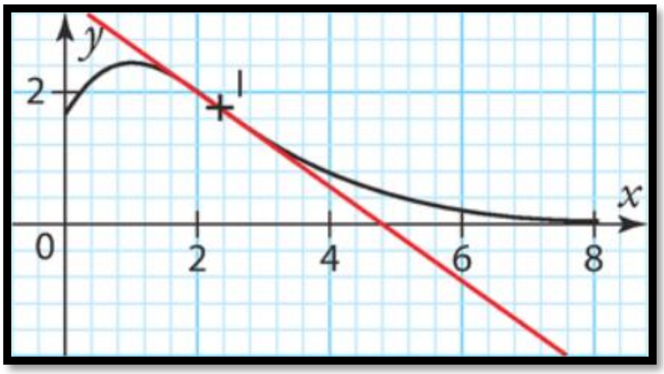


Déterminer $g'(1/2)$. Déterminer le signe de $g''(x)$ pour $x\in[0;1/2]$. Déterminer le signe de $g''(x)$ pour $x\in[1/2;1]$. Que dire du point de la courbe d'abscisse $x=1/2$?

Vers la notion de convexité

On considère la fonction f dont la représentation graphique sur l'intervalle $[0;8]$ est proposée ci-contre.

Sur quel intervalle la fonction est-elle concave ? convexe ? Préciser quel est le point d'inflexion.

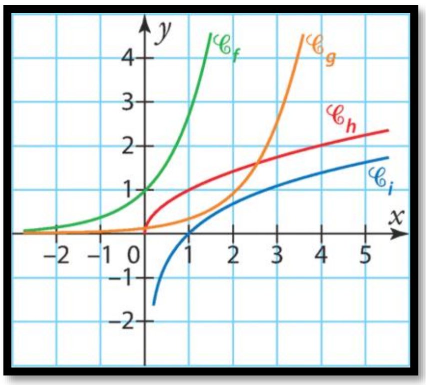


Convexité et dérivée seconde

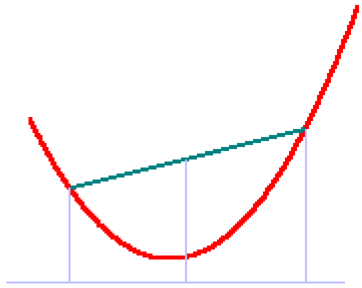
Ci-contre, quelles sont les fonctions convexes ? Quelles sont les fonctions concaves ? Ces courbes présentent-elles un/des point(s) d'inflexion ?

Parmi les fonctions usuelles que vous connaissez, citer une/des fonctions convexes, citer une/des fonctions concaves, citer une/des fonctions présentant un/des points d'inflexion.

Pour chaque fonction citée démontrez vos propos à l'aide de l'étude du signe et/ou annulation de la dérivée seconde.

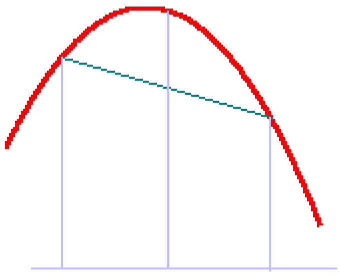


Convexité et point d'inflexion : définitions et propriétés



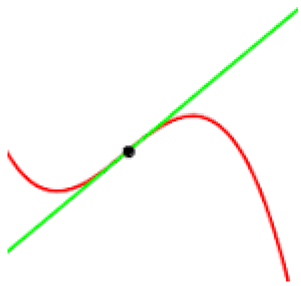
Définition : f est une fonction convexe sur un intervalle I lorsque sa courbe représentative est située en dessous de chacune de ses cordes.

Propriétés : f est une fonction convexe sur un intervalle I si et seulement si sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses tangentes. Si f est deux fois dérivable, f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.



Définition : f est une fonction concave sur un intervalle I lorsque sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses cordes.

Propriétés : f est une fonction concave sur un intervalle I si et seulement si sa courbe représentative est située en dessous de chacune de ses tangentes. Si f est deux fois dérivable, f est convexe sur I si et seulement si f'' est négative sur I.



Définition : on parle de point d'inflexion de la courbe représentative d'une fonction f lorsque la courbe traverse sa tangente en ce point.

Remarques : lorsque la fonction f change de convexité (passe de convexe à concave ou bien de concave à convexe), sa courbe représentative traverse sa tangente et admet un point d'inflexion. Si f est deux fois dérivable, elle admet un point d'inflexion lorsque f'' change de signe.

Rappel indispensable

On considère la courbe représentative d'une fonction f et la tangente (T) à la courbe au point A d'abscisse a. On souhaite démontrer que l'équation de la tangente (T) est de la forme : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$. Pour cela on notera $y = \alpha x + \beta$ l'équation de la tangente (T) où α est le coefficient directeur et où β est l'ordonnée à l'origine. Expliquer pourquoi $\alpha = f'(a)$. Montrer ensuite que $\beta = f(a) - f'(a)\times a$. Conclure…

Démonstration d'une implication

On souhaite démontrer l'implication suivante : « Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Si f'' est positive sur I alors sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes (elle est donc convexe) ». Pour cela on considère $a \in I$ et la fonction g définie par $g(x) = f(x) - \left(f'(a)(x-a)+f(a)\right)$. Calculer $g'(x)$ puis $g''(x)$. En déduire le signe de $g''(x)$, puis celui de $g'(x)$ et enfin celui de $g(x)$. Conclure…

Inégalités de convexité

On considère une fonction f convexe sur un intervalle I. Soient a et b deux nombres réels distincts de l'intervalle I. On note A le point de coordonnées $(a; f(a))$ et B le point de coordonnées $(b; f(b))$. Déterminer les coordonnées du point C milieu du segment [AB]. En déduire l'inégalité $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$. Quelle inégalité peut-on établir si f est concave ?

Application

1. Sauriez-vous expliquer pourquoi pour tout réel a et b positif on a l'inégalité suivante : $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$? Vous vous baserez sur la convexité de la fonction carrée sur $[0;+\infty[$ que vous commencerez par démontrer.

2. Sauriez-vous expliquer pourquoi pour tout réel a et b positif on a l'inégalité suivante : $\sqrt{a+b} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$? Vous vous baserez sur la concavité de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$ que vous commencerez par démontrer.

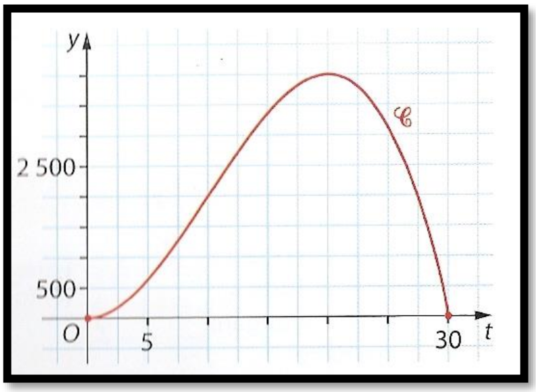
3. Sauriez-vous expliquer pourquoi pour tout réel a et b positif on a l'inégalité suivante : $(a+b)^3 \leq 4(a^3+b^3)$? Vous vous baserez sur la convexité de la fonction cube sur $[0;+\infty[$ que vous commencerez par démontrer.

4. En utilisant la convexité de la fonction exponentielle (que vous justifierez) démontrer que pour tout x réel on a $e^x \geq 1+x$. On pourra s'appuyer sur l'équation d'une tangente.

5. En utilisant la concavité de la fonction racine carrée (que vous justifierez) démontrer que pour tout x réel on a $4\sqrt{x} \leq 4+x$. On pourra s'appuyer sur l'équation d'une tangente.

Epidémie, un petit exercice pour finir

Une épidémie a frappé les habitants d'une ville. La courbe C représente le nombre de personnes malades en fonction du temps t exprimé en jours depuis le début de la maladie. Le nombre de personnes malades en fonction du temps t exprimé en jours peut être modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;30]$ par $f(t) = 30t^2 - t^3$. La vitesse de propagation de la maladie au jour t peut être assimilée au nombre dérivé $f'(t)$.



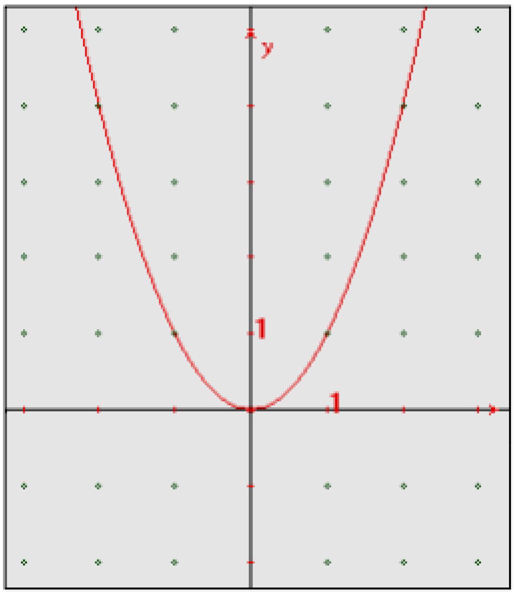
Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;30]$. Etudier ensuite la convexité de la fonction f sur cet intervalle. La fonction admet-elle un point d'inflexion ? En donner une interprétation concrète et calculer la vitesse de propagation de la maladie en ce point particulier.

Rappel indispensable

On considère la courbe représentative d'une fonction f et la tangente (T) à la courbe au point A d'abscisse a. On souhaite démontrer que l'équation de la tangente (T) est de la forme : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$. Pour cela on notera $y = \alpha x + \beta$ l'équation de la tangente (T) où α est le coefficient directeur et où β est l'ordonnée à l'origine. Expliquer pourquoi $\alpha = f'(a)$. Montrer ensuite que $\beta = f(a) - f'(a) \times a$. Conclure…

Avec la parabole

On a représenté ci-contre la représentation graphique de la fonction carrée. Déterminer l'équation de la tangente à cette courbe en 1 et tracer cette tangente dans le repère ci-contre.



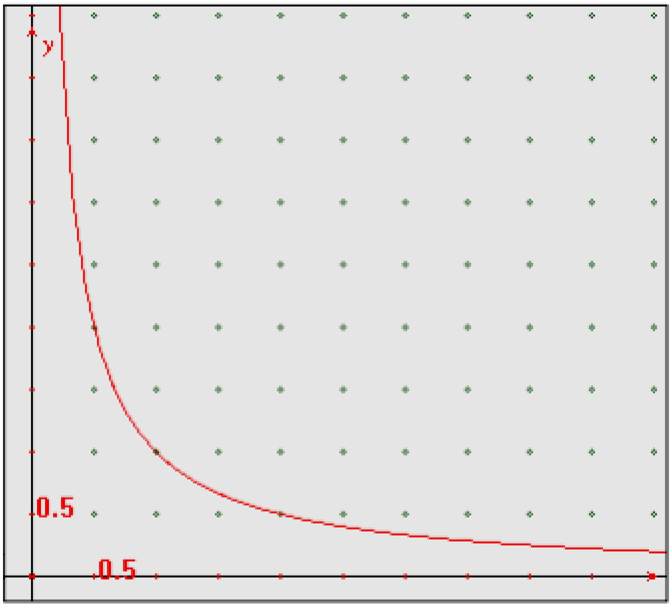
Montrer que tous les points de la courbe sont situés au-dessus de cette tangente.

On considèrera pour cela la fonction qui représente l'écart entre la courbe et la tangente et on étudiera, par dérivations successives, le signe de cet écart.

Que peut-on en déduire quant à la convexité de cette courbe ?

Avec une branche d'hyperbole

On a représenté ci-contre la représentation graphique de la fonction inverse. Déterminer l'équation de la tangente à cette courbe en 2 et tracer cette tangente dans le repère proposé ci-contre.



Montrer que tous les points de la courbe sont situés au-dessus de cette tangente. On considèrera pour cela la fonction qui représente l'écart entre la courbe et la tangente et on étudiera, par dérivations successives, le signe de cet écart.

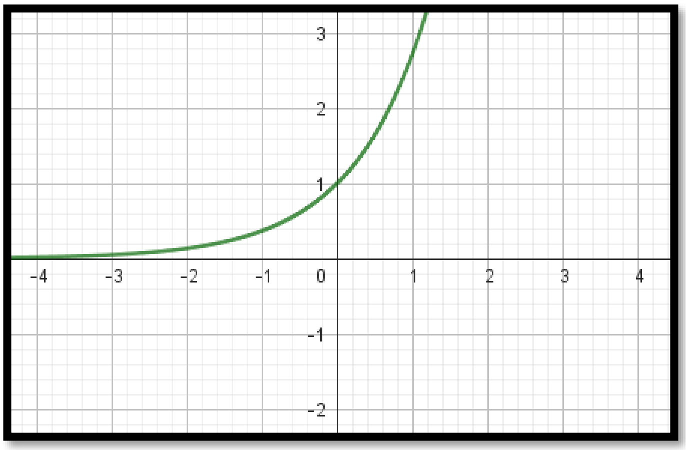
Que peut-on en déduire quant à la convexité de cette courbe ?

Morale de l'histoire

La convexité de la courbe représentative d'une fonction a un lien direct avec la dérivée seconde.

Avec la fonction exponentielle

On a représenté ci-contre la représentation graphique de la fonction exponentielle. Déterminer l'équation de la tangente à cette courbe en 0 et tracer cette tangente dans le repère proposé ci-contre.

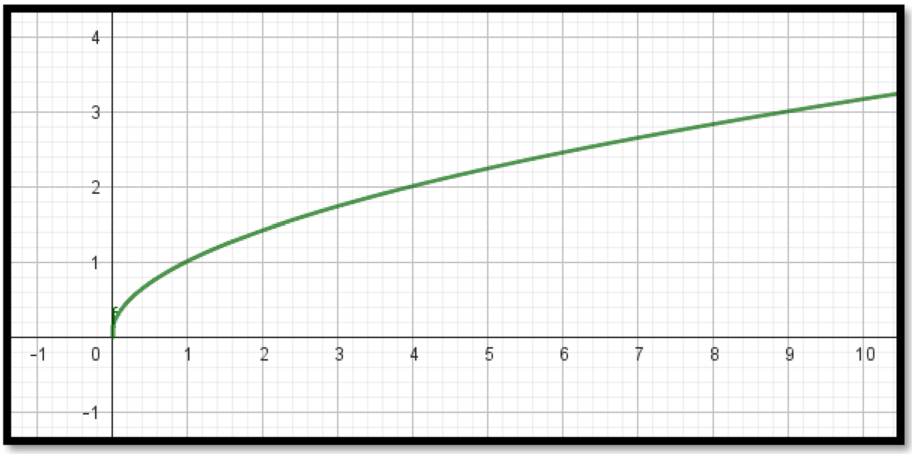


Montrer que tous les points de la courbe sont situés au-dessus de cette tangente.

Que peut-on en déduire quant à la convexité de cette courbe

Avec la fonction racine

On a représenté ci-contre la représentation graphique de la fonction racine. Déterminer l'équation de la tangente à cette courbe en 4 et tracer cette tangente dans le repère ci-contre.



Montrer que tous les points de la courbe sont situés en-dessous de cette tangente. On considèrera pour cela la fonction qui représente l'écart entre la courbe et la tangente et on étudiera, par dérivations successives, le signe de cet écart. Que peut-on en déduire quant à la convexité de cette courbe ?

Démonstration dans le cas général

On souhaite démontrer l'implication suivante : « Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Si f'' est positive sur I alors sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes (elle est donc convexe) ». Pour cela on considère $a \in I$ et la fonction g définie par $g(x) = f(x) - \left(f'(a)(x-a) + f(a)\right)$.

1. Calculer $g'(x)$ puis $g''(x)$.

2. En déduire le signe de $g''(x)$, puis celui de $g'(x)$ et enfin celui de $g(x)$.

3. Conclure.