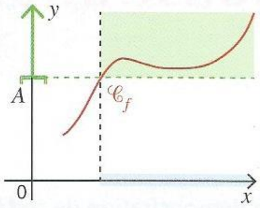
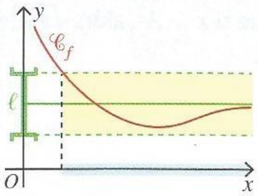
Comportement asymptotique d'une fonction

Limites en $+\infty$ et $-\infty$

- **Limite infinie** : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. La définition est analogue pour la limite de f en $-\infty$.



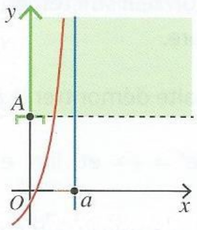
- **Limite finie** : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. La définition est analogue pour la limite de f en $-\infty$.



La droite d'équation $y = \ell$ est alors une **asymptote horizontale** à la courbe de f.

Limite infinie en a

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a. La définition est analogue pour $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.
- La droite d'équation $x = a$ est alors une **asymptote verticale** à la courbe de f.



Calcul de limite par opération ou par comparaison

Calculer une limite

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty \text{ si } n \text{ impair} \\ +\infty \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$

Limites, opérations et formes indéterminées (FI)

Si :					
$\lim f = \dots$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	∞
$\lim g = \dots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞	0
alors :					
$\lim (f+g) = \dots$	$+\infty$	$-\infty$	FI	∞	∞
$\lim (fg) = \dots$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	FI
$\lim \left(\dfrac{f}{g}\right) = \dots$	FI	FI	FI	0	∞

Comparer pour déterminer une limite

- Soient f et g telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[A\,;+\infty[$.

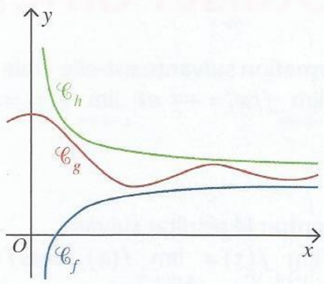
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

- **Théorème des gendarmes** : soient f, g et h telles que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ sur $[A\,;+\infty[$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, alors :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell.$$

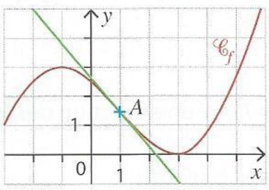


Par analogie, on peut écrire les mêmes propriétés en $-\infty$ et en un réel a.

Détermination du point d'inflexion d'une courbe

Déterminer le(s) point(s) d'inflexion d'une courbe

- Au point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente.



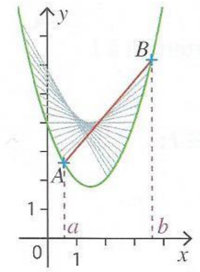
Soit f une fonction deux fois dérivable.

- Si f' change de sens de variation en a, alors le point de coordonnées $(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
- Si f'' s'annule et change de signe en a, alors le point de coordonnées $(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

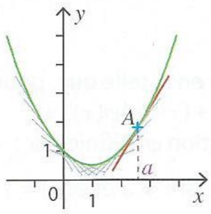
Détermination de la convexité d'une fonction

Déterminer la convexité d'une fonction

Convexe

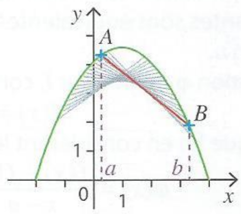


Courbe en dessous des sécantes

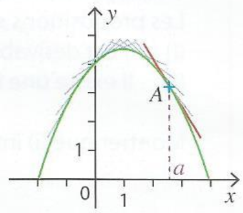


Courbe au-dessus des tangentes

Concave



Courbe au-dessus des sécantes



Courbe en dessous des tangentes

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur $I \Leftrightarrow f'$ est croissante sur $I \Leftrightarrow f''$ est positive sur I.
- f est concave sur $I \Leftrightarrow f'$ est décroissante sur $I \Leftrightarrow f''$ est négative sur I.

Dérivée d'une fonction composée

Calculer la dérivée d'une fonction composée

- Fonction composée :
$$v \circ u(x) = v(u(x)).$$
En général, $v \circ u \neq u \circ v$.
- Dérivée d'une fonction composée :
$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$$
- Dérivées de fonctions composées usuelles :
$$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u.$$
$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$
$(u^n)' = nu'u^{n-1}$ (n entier relatif non nul)

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Connaître et utiliser les fonctions continues pour résoudre une équation $f(x) = k$

- f est **continue** en a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Les fonctions affines, polynômes, racine carrée et exponentielle sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont des fonctions continues sur chaque intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- **Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)**
Soit f une fonction définie et continue sur $[a\,;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur $[a\,;b]$.
- **Cas particulier du TVI**
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;b]$.