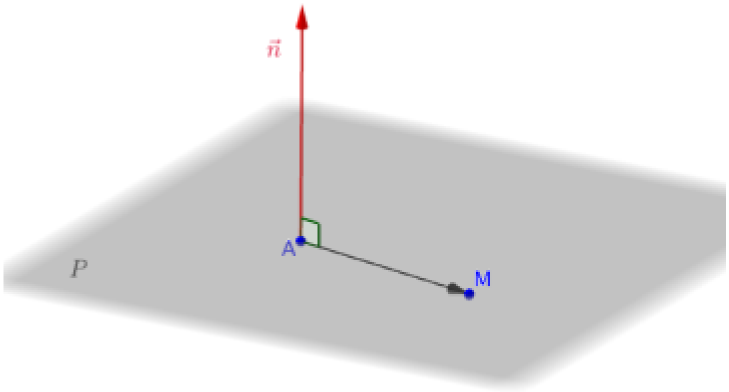
Premier rappel indispensable

Soit P un plan de l'espace. Soit A un point du plan P et $\vec{n}$ un vecteur normal au plan P.

Un point M de l'espace appartient au plan P si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Cette égalité est la caractérisation vectorielle du plan P.



Equation cartésienne d'un plan

Propriété : si P est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ alors tout point $M(x; y; z)$ de l'espace appartenant au plan P vérifie l'équation $ax + by + cz + d = 0$ où a, b et c correspondent aux coordonnées du vecteur normal et où $d = -ax_A - by_A - cz_A$.

Vocabulaire : cette équation est appelée « équation cartésienne de P ».

Remarque importante : un plan de l'espace admet une infinité d'équations cartésiennes. En effet, en choisissant un autre vecteur normal au plan ou un autre point de ce plan, on obtient une autre équation cartésienne du même plan.

Réciproque de la propriété : si les coordonnées d'un point $M(x; y; z)$ de l'espace vérifient l'équation $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont quatre nombres réels (a, b, c étant non tous nuls) alors le point M appartient à un plan P de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

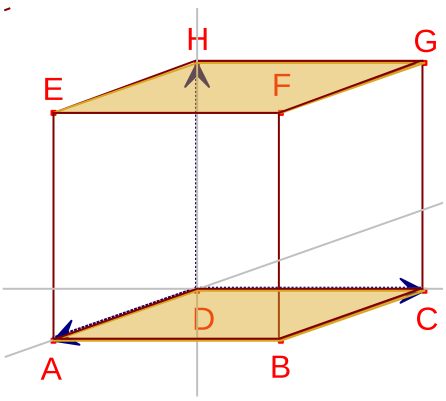
Démonstration de la propriété et de sa réciproque

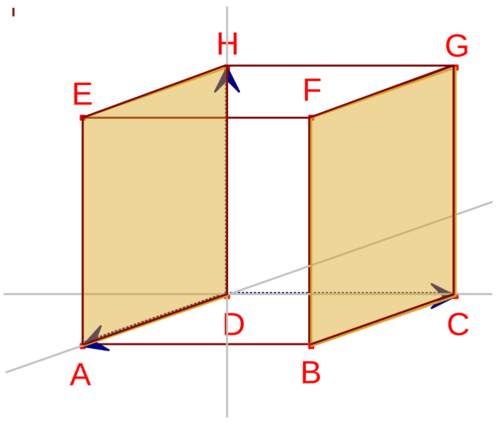
Soit P est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et $M(x; y; z)$ un point quelconque de ce plan. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$? En déduire une expression du produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$. Quelle est la valeur de ce produit scalaire ? Conclure…

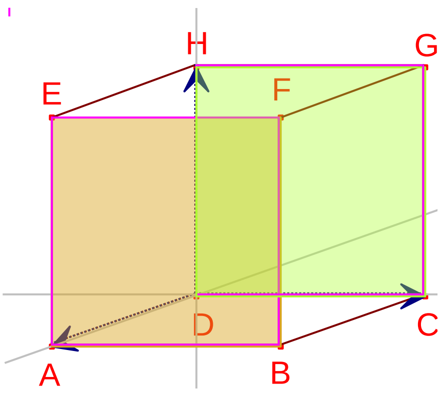
Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace vérifiant la relation $ax + by + cz + d = 0$. Supposons que $a \neq 0$ (possible car a, b, c sont non tous nuls) et considérons le point A de coordonnées $\left(-\dfrac{d}{a}; 0; 0\right)$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$. Que peut-on en déduire pour M ? Conclure…

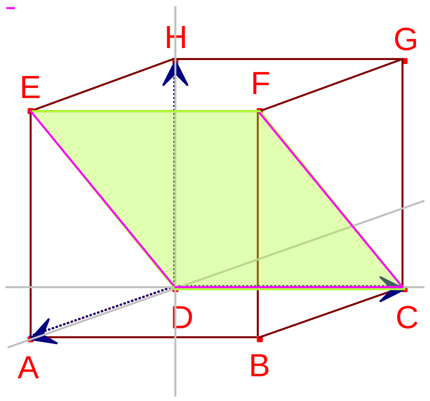
Plans particuliers, équations particulières

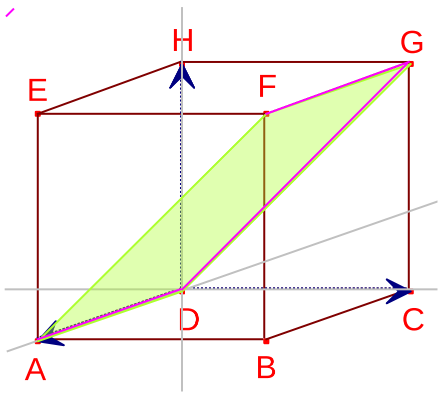
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête $a = 1$. On considère l'espace rapporté au repère orthonormal $\left(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH}\right)$. Déterminer une équation cartésienne des plans colorés proposés ci-dessous.

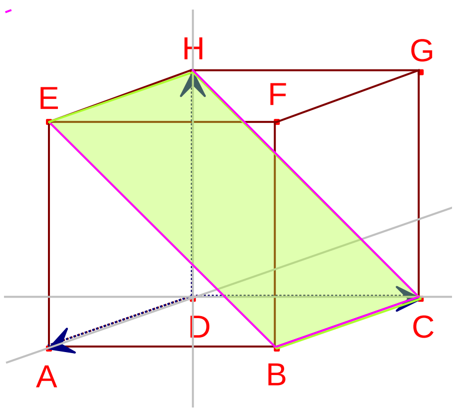












Plans quelconques, équations quelconques

On considère le plan P passant par le point $A(1;-2;4)$ et ayant pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}$. On considère le plan P' parallèle à P passant par le point $B(4;1;3)$. Déterminer une équation cartésienne de chacun de ces plans. On considère désormais les plans P1 $3x-4y+z+2=0$, P2 $2x+y-2z=0$, P3 $-6x+8y-2z+5=0$. Définir chaque plan par un point, un vecteur normal.

Plans définis par trois points

On considère ci-dessous trois points A, B et C de l'espace et un vecteur $\vec{n}$. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC). En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

$$A(1;-3;3)\ B(5;-1;9)\ C(-5;1;11)\ \vec{n}\begin{pmatrix}-2\\-17\\7\end{pmatrix} \qquad A(-4;0;-4)\ B(6;4;-8)\ C(4;-2;-6)\ \vec{n}\begin{pmatrix}4\\3\\13\end{pmatrix}$$

Situation 1 — *Situation 2*

Et lorsque le vecteur normal n'est pas donné ?

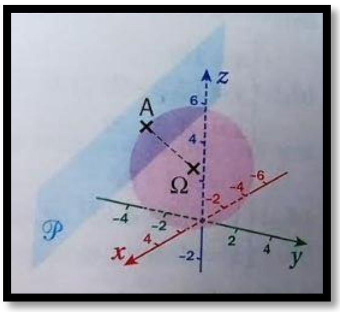
Montrer que les trois points $A(1;3;0)$ $B(-2;1;1)$ et $C(4;1;-2)$ déterminent un plan P dont vous déterminerez un vecteur normal, puis une équation cartésienne.
Montrer que les trois points $A(1;2;0)$ $B(0;3;1)$ et $C(1;5;1)$ déterminent un plan P dont vous déterminerez un vecteur normal, puis une équation cartésienne.

Plan médian

On considère deux points $A(4;5;1)$ et $B(8;1;7)$. On note $M(x;y;z)$ les coordonnées d'un point M de l'espace. Exprimer AM^2 et BM^2 en fonction de x, y et z. Démontrer que l'ensemble des points M tels que $AN = BM$ est un plan P dont on donnera une équation cartésienne. Vérifier ensuite que ce plan est le plan médian du segment [AB], c'est-à-dire le plan perpendiculaire à ce segment passant par son milieu.

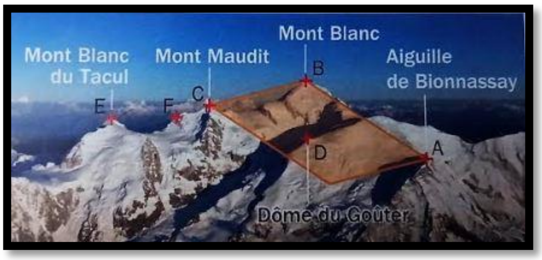
Plan tangent

On considère la sphère de centre $\Omega(1;0;3)$ passant par le point $A(2;-2;5)$. Déterminer une équation cartésienne du plan P tangent à la sphère au point A. On rappelle qu'un plan est tangent à une sphère en un point lorsqu'il est perpendiculaire au rayon de la sphère passant par ce point.



Sommets coplanaires

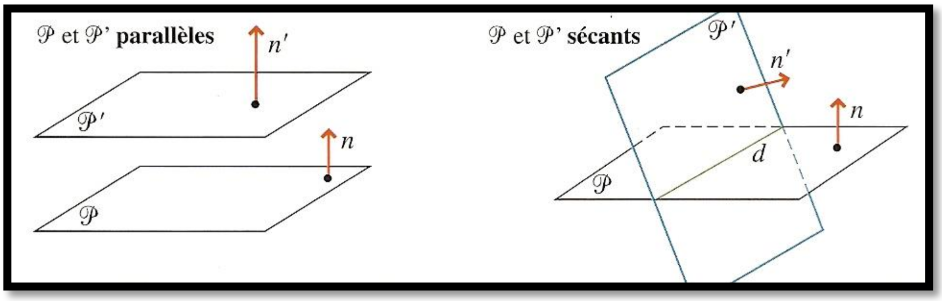
Sur la photographie du massif des Alpes proposée ci-contre, la position des sommets est modélisée par les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives $A(0;0;4)$, $B(3,6;-0,4;4,8)$, $C(4,4;1,3;4,5)$, $D(2;0,7;4,3)$ et $E(1;1,6;3,9)$.



Le point $F(2,6;1,5;4,1)$ modélise la position d'un alpiniste. Quels points sont dans le même plan que les trois sommets A, B et C ? Expliquer de manière détaillée le raisonnement adopté…

Intersection de deux plans de l'espace

Point de vue géométrique : Soit P et P' deux plans distincts. Ces deux plans sont soit sécants, soit parallèles. Ceci dépend de la position relative des vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$. Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires alors les plans sont strictement parallèles : ils n'ont aucun point commun. Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires alors les plans sont sécants : leur intersection est une droite de l'espace.



Point de vue algébrique : Les deux plans d'équations respectives $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$ sont sécants si et seulement si les vecteurs $\vec{n}(a;b;c)$ et $\vec{n'}(a';b';c')$ ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire ne sont pas proportionnels. Leur intersection est alors une droite.

Exercice d'application directe

On considère cinq plans de l'espace. Pour chaque couple de plans possible, préciser si les deux plans sont parallèles, confondus, perpendiculaires ou juste sécants.

- Le plan P1 admet pour équation cartésienne $4x+3y+z-10=0$,
- Le plan P2 admet pour équation cartésienne $-3x+y+9z+13=0$,
- Le plan P3 admet pour équation cartésienne $-6x+9y-3z-12=0$,
- Le plan P4 passe par $A(9;4;-10)$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$,
- Le plan P5 passe par $B(-5;1;6)$ et admet pour vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\2\\-8\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\7\\11\end{pmatrix}$.

Exercice d'application un peu moins directe

On considère un couple de plans de l'espace. Sont-ils sécants ? Si oui préciser un point et un vecteur de la droite de l'espace intersection des deux plans. Détailler le raisonnement adopté…

$$\begin{cases}P_1 : x+y-2z-6=0\\ P_2 : 3x-y+z-11=0\end{cases}$$

Situation 1

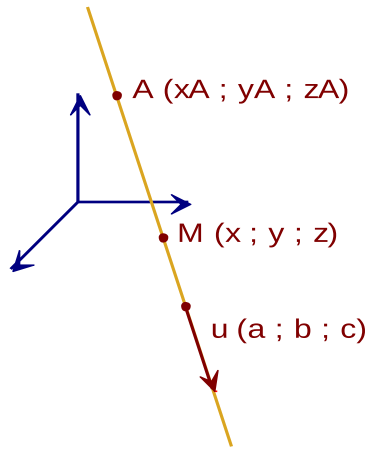
$$\begin{cases}P_1 : x+y-z-1=0\\ P_2 : 3x+2y+z-4=0\end{cases}$$

Situation 2

$$\begin{cases}P_1 : x-y+z+3=0\\ P_2 : -x+2y-3z=0\end{cases}$$

Situation 3

Deuxième rappel indispensable



Soit (d) une droite de l'espace. Soit A un point de la droite(d) et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d).

Un point M de l'espace appartient à la droite (d) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$. Cette égalité est la caractérisation vectorielle de la droite (d). Elle fait intervenir un paramètre.

Représentation paramétrique d'une droite

Propriété : si (d) est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ alors pour tout point $M(x; y; z)$ de l'espace appartenant à la droite (d) il existe un nombre réel k tel que $\begin{cases} x = x_A + k \times a \\ y = y_A + k \times b \\ z = z_A + k \times c \end{cases}$.

Vocabulaire : ce système est appelé « représentation paramétrique de la droite (d) ».

Remarque importante : une droite de l'espace admet une infinité de représentations paramétriques. En effet, en choisissant un autre vecteur directeur de la droite ou un autre point de cette droite, on obtient une autre représentation paramétrique de la même droite.

Réciproque de la propriété : si les coordonnées d'un point $M(x; y; z)$ de l'espace vérifient le système $\begin{cases} x = x_A + k \times a \\ y = y_A + k \times b \\ z = z_A + k \times c \end{cases}$ où k est un nombres réel alors le point M appartient à la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$.

Démonstration de la propriété et de sa réciproque

Démontrer, en raisonnant par équivalence, à la fois la propriété et sa réciproque.

Exercice d'application directe

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) dans chacun des cas suivants :

$A(1;2;3)$ et $B(1;0;-5)$ $\quad$ $A(4;-1;2)$ et $B(5;0;-8)$ $\quad$ $A(1;2;7)$ et $B(1;2;11)$

Exercice d'application un peu moins directe

Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A, perpendiculaire au plan P :

$A(5;2;0)$	$A(-1;3;4)$	$A(0;5;1)$
$(\mathrm{P})\ x+y+2z-5=0$	$(\mathrm{P})\ y-5z+10=0$	$(\mathrm{P})\ y+7=0$

Savoir manipuler une représentation paramétrique

La droite (d) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=1-3k \\ y=-4k \\ z=2+k \end{cases}$. Définir la droite (d) par un point et un vecteur directeur dont vous préciserez les coordonnées respectives. Les points $B(10;12;-1)$ et $C(-5;-8;3)$ appartiennent-ils à la droite (d) ? Pourquoi ?

Même exercice avec la droite (d) $\begin{cases} x=5+2k \\ y=3-k \\ z=-6+3k \end{cases}$ et les points $B(-13;12;-33)$ et $C(-5;8;3)$.

On considère les points $A(2;-4;3)$ et $B(5;-3;1)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB). Démontrer que le système $\begin{cases} x=-1-6t \\ y=-5-2t \\ z=5+4t \end{cases}$ est aussi une autre représentation paramétrique de la droite (AB).

Position relative de deux droites de l'espace

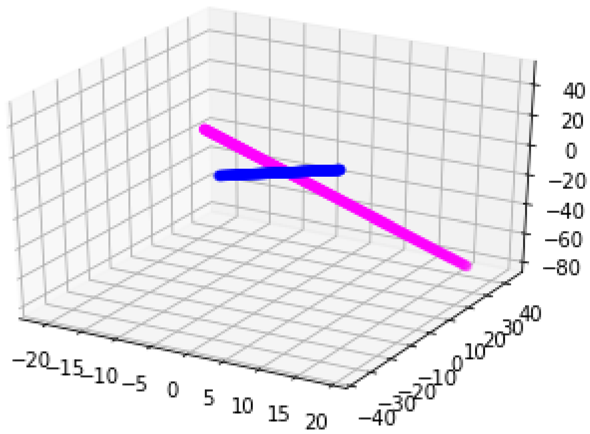
On considère les droites (d) et (d') définies par leurs représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x=-1-2k \\ y=4+4k \\ z=-4-5k \end{cases}$ et $\begin{cases} x=7+t \\ y=8+3t \\ z=-18-6t \end{cases}$. Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles.

Résoudre le système d'équations linéaires $\begin{cases} -1-2k=7+t \\ 4+4k=8+3t \\ -4-5k=-18-6t \end{cases}$ et en déduire que les droites sont sécantes en un point dont on précisera les coordonnées.

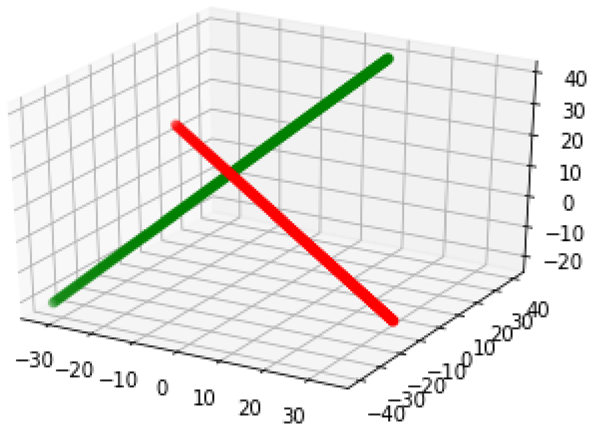
On considère les droites (d) et (d') définies par leurs représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x=4-3k \\ y=-3+k \\ z=1+2k \end{cases}$ et $\begin{cases} x=-12+2t \\ y=4t \\ z=9+3t \end{cases}$. Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires. On rappelle à ce propos que deux droites non coplanaires sont deux droites ni parallèles, ni sécantes.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import mpl_toolkits.mplot3d
espace=plt.gca(projection='3d')
def d1(a,b):
  x=[]
  y=[]
  z=[]
  t=???
  while ???:
    x.append(???)
    y.append(???)
    z.append(???)
    t=???
  espace.scatter3D(x,y,z,color='red')
```

```python
def d2(a,b):
  x=[]
  y=[]
  z=[]
  t=???
  while ???:
    x.append(???)
    y.append(???)
    z.append(???)
    t=???
  espace.scatter3D(x,y,z,color='green')
d1(-10,10)
d2(-10,10)
plt.show()
```



Situation 1



Situation 2

Position relative de deux droites, encore…

On considère la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 7+5k \\ y = 9-3k \\ z = -3-k \end{cases}$. Pour chacune des droites proposées ci-dessous, indiquer si la droite (d) lui est confondue, strictement parallèle, orthogonale, ou si aucune de ces possibilités ne correspond. Dans le cas où la droite n'est pas parallèle à (d) préciser si elle lui est sécante en un point dont on précisera les coordonnées…

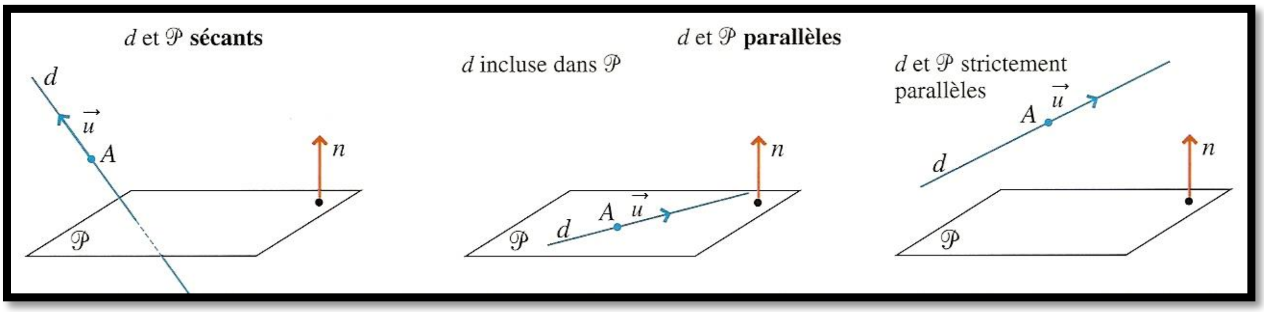
$(d_1)\begin{cases} x = 15t \\ y = 13{,}2-9t \\ z = -1{,}6-3t \end{cases}$ $\quad (d_2)\begin{cases} x = 25-t \\ y = -11-4t \\ z = 7+7t \end{cases}$ $\quad (d_3)\begin{cases} x = 9{,}5-8t \\ y = 7{,}5+4{,}8t \\ z = -2{,}5+1{,}6t \end{cases}$ $\quad (d_4)\begin{cases} x = -3+t \\ y = 15+2t \\ z = -5+t \end{cases}$

Position relative de deux droites, toujours…

ABCDEFGH est un cube. Le point I est le milieu du segment [FG]. Le point J est le milieu du segment [IG]. On considère le repère orthonormé de l'espace $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AI) et une représentation paramétrique de la droite (DJ). Montrer que (AI) et (DJ) sont sécantes en un point K dont on précisera les coordonnées…

Intersection d'une droite et d'un plan

Point de vue géométrique : Soit une droite d et un plan P. La droite d est soit incluse dans le plan P, soit strictement parallèle à P c'est-à-dire qu'ils n'ont aucun point en commun, soit sécante avec P, c'est-à-dire qu'ils ont un seul point commun. Ceci dépend de la position relative du vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite et du vecteur normal $\vec{n}$ du plan. Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux alors la droite et le plan sont sécants. Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux alors : si un point de la droite appartient au plan alors la droite est incluse dans le plan, si un point de la droite n'appartient pas au plan alors la droite est strictement parallèle au plan.



Point de vue algébrique : Le plan $(\mathrm{P})\, ax+by+cz+d=0$ et la droite $(d)\begin{cases} x = x_A + k\times\alpha \\ y = y_A + k\times\beta \\ z = z_A + k\times\gamma \end{cases}$ avec $k\in IR$ sont sécants si et seulement si les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ ne sont pas orthogonaux c'est-à-dire si et seulement si $\boxed{a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0}$.

Exercice d'application directe

Déterminer l'intersection du plan P d'équation $2x+y-5z=1$ avec la droite (AB) où $A(1;-5;0)$ et $B(4;1;3)$.

Exercice d'application un peu moins directe

Déterminer l'intersection du plan P et de la droite d dans chacun des cas suivants :

- $(P)\, x+y-2z-5=0$, (d) passe par $A(1;0;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;1;1)$.
- $(\mathrm{P})\, 3x-y+z+3=0$, (d) est la droite (AB) avec $A(1;1;-5)$ et $B(2;7;-2)$.
- $(\mathrm{P})\, x+y-z-1=0$, (d) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3-t \\ y = 5-t \\ z = 2+t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

Distance d'un point à une droite de l'espace

Partie A

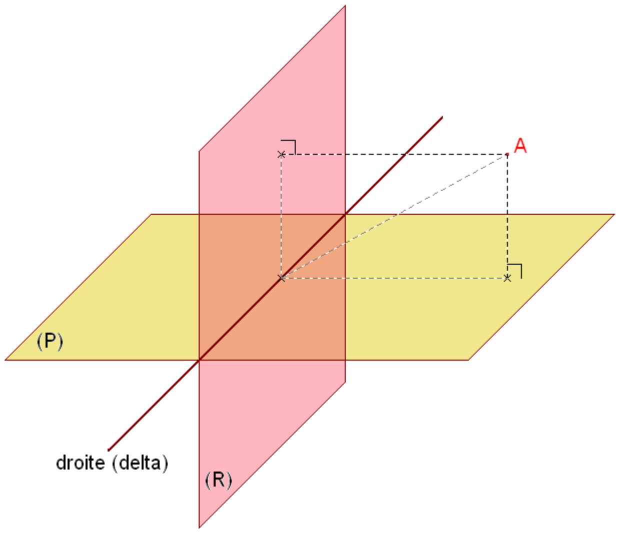
On considère le plan (P) passant par $B(1;-2;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ dont on déterminera une équation et le plan (R) d'équation $x+2y-7=0$. Démontrer que (P) et (R) sont perpendiculaires. Démontrer que l'intersection des plans (P) et (R) est la droite (Δ) passant par le point $C(1;3;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. Déterminer une représentation paramétrique de cette droite.

Partie B

Soit le point $A(5;-2;-1)$. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur le plan (P). On appelle K le projeté orthogonal du point A sur le plan (R).

Déterminer une représentation paramétrique de (AH), montrer que les coordonnées du point H sont $(3{,}8;-1{,}4;2)$ puis calculer la distance AH. (On trouvera $AH^2=10{,}8$).

Déterminer une représentation paramétrique de (AK), montrer que les coordonnées du point K sont $(6{,}2;0{,}4;-1)$ puis calculer la distance AK. (On trouvera $AK^2=7{,}2$).



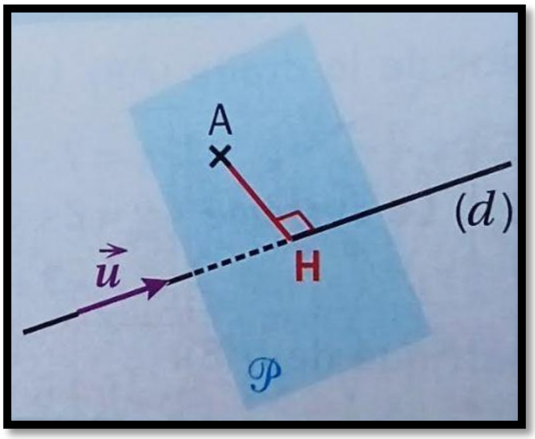
En déduire, par une application simple du théorème de Pythagore la distance du point A à la droite (Δ). Cette distance entre un point et une droite de l'espace est définie comme la distance minimale qui existe entre le point A et l'ensemble des points de la droite (Δ).

Partie C

Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1+2t;3-t;t)$. Déterminer, en fonction de t, la longueur AM_t. On note $\varphi(t)$ le carré de cette longueur. Etudier les variations de la fonction φ.Préciser son minimum et interpréter géométriquement cette valeur. Remarque : « On retrouve dans cet exercice un résultat déjà énoncé. La distance d'un point à une droite de l'espace correspond à la distance minimale séparant ce point et l'ensemble des points de la droite. Cette distance se matérialise entre le point de l'espace et son projeté orthogonal sur la droite. »

Projeté orthogonal d'un point de l'espace sur une droite

Si A est un point de l'espace, (d) est une droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_0 + ka \\ y = y_0 + kb \\ z = z_0 + kc \end{cases}$, et $H(x_H ; y_H ; z_H)$ est le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) alors le plan P passant par A et orthogonal à la droite (d) admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où d est un nombre réel et $(x_H ; y_H ; z_H)$ est l'unique triplet vérifiant à la fois la représentation paramétrique de (d) et l'équation cartésienne du plan P.



H est le projeté orthogonal de A sur la droite (d)

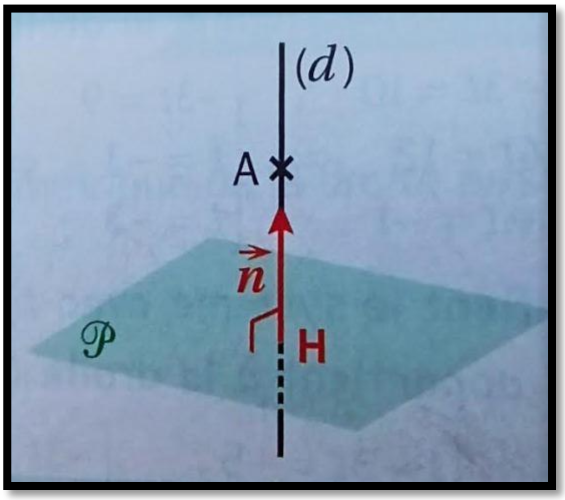
Exercice d'application directe

On considère la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -3 - k \\ z = 20 + 2k \end{cases}$ et le point $A(3;5;4)$.

Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite (d).

Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Si P est un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, $A(x_A ; y_A ; z_A)$ un point de l'espace et $H(x_H ; y_H ; z_H)$ le projeté orthogonal du point A sur le plan P alors la droite (d) passant par A et orthogonale à P admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$ et $(x_H ; y_H ; z_H)$ est l'unique triplet vérifiant à la fois l'équation cartésienne de P et la représentation paramétrique de (d).



H est le projeté orthogonal de A sur le plan P

Exercice d'application directe

On considère le plan d'équation cartésienne $4x + y - 2z - 66 = 0$ et le point $B(-1;3;-2)$.
Déterminer les coordonnées du point K, projeté orthogonal du point B sur la droite (d).

Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur la droite (d) et les coordonnées du point K projeté orthogonal du point A sur le plan P…

$(d)\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -3 - k \\ z = 20 + 2k \end{cases}$

$A(5;-2;3)$

$P : -2x + y - 2z - 18 = 0$

Intersection de plans

On considère les plans $P_1 : 5x+6y+2z-12=0$ et $P_2 : x-2y-2z=0$. Justifier que les plans sont sécants. Ecrire le système vérifié par les coordonnées des points $M\left(x;y;z\right)$ appartenant à la fois au plan P1 et au plan P2. A partir du système (S), exprimer les variables y et z en fonction de x. En déduire une représentation paramétrique de la droite intersection des plans P1 et P2 en posant $x=k$. Reprendre le déroulé de cet exercice avec les couples de plans proposés ci-dessous.

$P_1 : x+y-z+4=0$	$P_1 : 2x+5y+2z+13=0$	$P_1 : -x+3y+z-17=0$
$P_2 : 3x-y+2z+1=0$	$P_2 : -x+5y+2z+19=0$	$P_2 : 4x-5y+z+30=0$

Vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires

On considère trois points de l'espace $A\left(1;0;3\right)$, $B\left(3;2;4\right)$ et $C\left(2;3;5\right)$. Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Ecrire le système vérifié par les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que $\vec{n}$ soit orthogonal à la fois au vecteur $\overrightarrow{AB}$ et au vecteur $\overrightarrow{AC}$. A partir du système (S), exprimer les variables b et c en fonction de a. En déduire les coordonnées d'un vecteur normal au plan (ABC) ainsi qu'une équation cartésienne de ce plan. Reprendre le déroulé de cet exercice avec les triplets de points de l'espace proposés ci-dessous.

$A\left(3;-2;1\right)$, $B\left(2;0;2\right)$ et $C\left(4;1;-1\right)$ $\qquad$ $A\left(-1;-1;2\right)$, $B\left(1;1;4\right)$ et $C\left(0;0;4\right)$

Automatiser certains calculs

On considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ainsi que le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} yc-zb \\ za-xc \\ xb-ya \end{pmatrix}$. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si le vecteur $\vec{w}$ le vecteur nul. Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, démontrer que le vecteur $\vec{w}$ est orthogonal à la fois au vecteur $\vec{u}$ et au vecteur $\vec{v}$. Recopier et compléter le script de la fonction « coli(u,v) » prenant en paramètres les coordonnées de deux vecteurs de l'espace sous forme de listes et renvoyant un booléen indiquant si les deux vecteurs sont colinéaires ainsi que le script de la fonction « ortho(u,v) » renvoyant les coordonnées d'un vecteur orthogonal aux deux vecteurs.

```
def coli(u,v):
  w=[]
  w.append(???)
  w.append(???)
  w.append(???)
  return w[0]==w[1]==w[2]==0
```

```
def ortho(u,v):
  w=[]
  w.append(???)
  w.append(???)
  w.append(???)
  return [w[0],w[1],w[2]]
```

Automatiser certains calculs, suite…

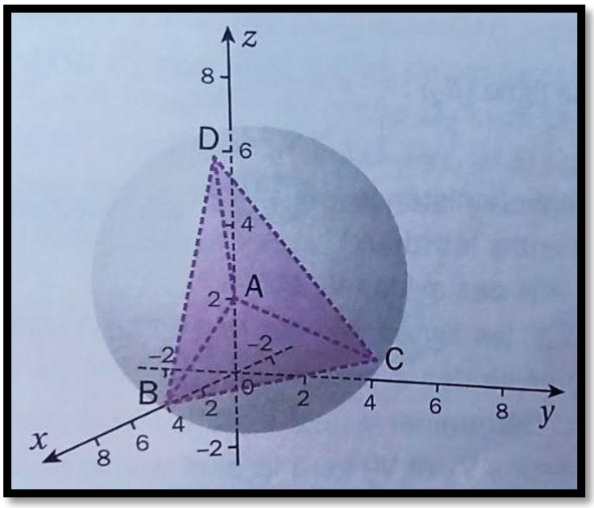
Recopier et compléter le script de la fonction « plan(A,B,C) » prenant en paramètres les coordonnées de trois points de l'espace sous la forme de listes et renvoyant les coefficients a, b, c et d d'une équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ du plan (ABC) lorsque ce plan est bien défini ou renvoyant un message d'erreur indiquant que le plan n'existe pas…

```
def plan(A,B,C):
  u=B+A*(-1)
  v=C+A*(-1)
  if coli(u,v)==???:
    w=ortho(u,v)
    d=???
    return [w[0],w[1],w[2],d]
  else:
    return 'pas de plan'
```

Utiliser le script de la fonction ainsi complétée pour retrouver les équations des plans définis à la page précédente par les triplets de points $A(1;0;3)$, $B(3;2;4)$ et $C(2;3;5)$ / $A(3;-2;1)$, $B(2;0;2)$ et $C(4;1;-1)$ / $A(-1;-1;2)$, $B(1;1;4)$ et $C(0;0;4)$. Proposer un triplé de points de l'espace pour lequel le script va renvoyer un message d'erreur indiquant que le plan n'existe pas…

Plan médian, le retour…

On considère le tétraèdre ABCD avec $A(0;0;2)$, $B(4;0;0)$, $C(2;5;1)$, $D(5;2;7)$. Déterminer une équation cartésienne des plans médians des arêtes [AB], [AC] et [AD] que l'on nommera respectivement P_{AB}, P_{AC} et P_{AD}. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) intersection des plans P_{AB} et P_{AC}. Justifier que la droite (d) et le plan P_{AD} sont sécants en un point Ω dont on déterminera les coordonnées. Peut-on dire que ce point est équidistant des sommets A, B, C et D du tétraèdre ? Pourquoi ?



Equation d'une sphère

On considère une sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R. Démontrer qu'un point $M(x;y;z)$ appartient à la sphère si et seulement si $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Déterminer l'équation de la sphère de l'exercice précédent puis celles des trois sphères suivantes : la sphère de centre $\Omega(3;-2;5)$ et de rayon $R=4$, la sphère de centre $A(-1;4;-2)$ passant par le point $B(2;3;6)$, la sphère de diamètre [CD] avec $C(-3;-5;2)$ et $D(1;-1;-2)$.

Intersection d'une sphère et d'une droite

On considère la droite passant par le point $A(13;4;11)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$ ainsi que la sphère de centre $\Omega(1;-2;3)$ et de rayon $R=6$.

Déterminer une équation de la sphère ainsi qu'une représentation paramétrique de la droite de paramètre k. Si on suppose que la sphère et la droite ont un point commun, quelle équation doit vérifier le paramètre k ? Résoudre cette équation et déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection entre la sphère et la droite. Reprendre ensuite le déroulé de l'exercice avec :

$\Omega(-5;2;1)$ et $R=9$	$\Omega(3;4;-1)$ et $R=7$	$\Omega(-4;-2;5)$ et $R=10$
$A(-2;8;1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$	$A(14;13;-1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$	$A(-7;2;-7)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$

Intersection d'une sphère et d'un plan

On considère la sphère de centre $\Omega(-3;-1;1)$ et de rayon $R=9$ ainsi que le plan d'équation cartésienne $2x+7y+4z-60=0$. Déterminer la nature de l'intersection de la sphère et du plan. On précisera les éléments caractéristiques de cette intersection.

Distance minimale entre deux droites

On considère les deux droites $(d)\begin{cases}x=3+k\\y=-4-3k\\z=1+k\end{cases}$ et $(d')\begin{cases}x=-5-t\\y=6+t\\z=-3-t\end{cases}$. Démontrer qu'elles ne sont pas coplanaires. Démontrer que le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs des droites (d) et (d'). Justifier que le plan (P) contenant la droite (d) et le vecteur $\vec{w}$ admet pour équation cartésienne $3x+2y+3z-4=0$. Démontrer que le plan (P) et la droite (d') sont sécants en un point H' dont on déterminera les coordonnées. On note (Δ) la droite passant par H' et de vecteur directeur $\vec{w}$. Démontrer que la droite (Δ) est perpendiculaire aux deux droites (d) et (d') et déterminer les coordonnées du point H, intersection de (d) et (Δ). On souhaite démontrer que pour tout point M appartenant à (d) et tout point M' appartenant à (d') on a l'inégalité $MM' \geq HH'$. Montrer pour cela que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ peut s'écrire comme la somme de $\overrightarrow{HH'}$ et d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{HH'}$. En déduire que $\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|^2 \geq \left\|\overrightarrow{HH'}\right\|^2$ et conclure. Déterminer alors la distance minimale entre deux points des droites (d) et (d').

Distance maximale

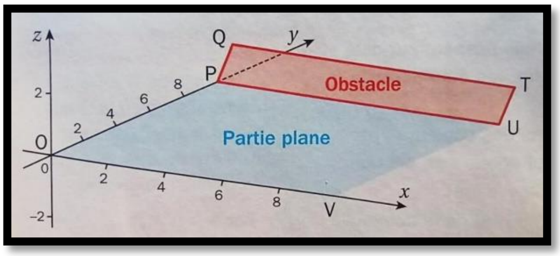
On considère le cube ABCDEFGH de côté 1. L'espace est muni du repère $\left(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH}\right)$. Soit M un point quelconque du segment [HG]. On note m le nombre réel de l'intervalle $[0;1]$ tel que $\overrightarrow{HM}=m\overrightarrow{HG}$. Montrer que quel que soit $m\in[0;1]$ le volume du tétraèdre EMFD est égal à $1/6$. Montrer que le plan (MFD) admet pour équation cartésienne $(-1+m)x+y-mz=0$.

On note K le projeté orthogonal du point E sur le plan (MFD). Déterminer les coordonnées du point K en fonction de m. En déduire que $EK = \dfrac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$. Déterminer la position du point M sur le segment [HG] pour laquelle la longueur EK est maximale (on pourra pour cela étudier les variations de la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2-2x+2}}$). En déduire que lorsque la distance EK est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur (DF).

Trajectoires de drones

Alex et Elisa pilotent deux drones sur un terrain constitué d'une partie plane bordée par un obstacle. On considère un repère orthonormé dans lequel une unité correspond à dix mètres. Pour modéliser le relief de la zone on définit six points : $O(0;0;0)$, $P(0;10;0)$, $Q(0;11;1)$, $T(10;11;1)$, $U(10;10;0)$ et $V(10;0;0)$. La partie plane est délimitée par le rectangle OPUV et l'obstacle est délimité par le rectangle PQTU comme l'indique la figure proposée ci-dessous.

Le drone d'Alex suit une trajectoire rectiligne portée par la droite (AB) avec $A(2;4;0,25)$ et $B(2;6;0,75)$. Le drone d'Elisa suit une trajectoire rectiligne portée par la droite (CD) avec $C(4;6;0,25)$ et $D(2;6;0,25)$.



Etude de la trajectoire du drone d'Alex

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB). Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQU). En déduire une équation cartésienne de ce plan. Démontrer que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants en un point I dont on précisera les coordonnées. Le drone d'Alex rencontre-t-il l'obstacle ? Expliquer pourquoi.

Distance minimale entre les deux trajectoires

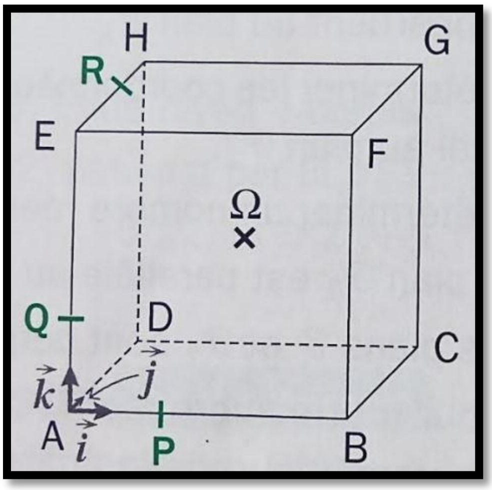
Pour éviter toute collision entre les deux appareils, Alex et Elisa imposent une distance minimale de 4 mètres entre les trajectoires des deux drones. Pour vérifier si cette consigne est respectée, on considère un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (CD). Il existe donc deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = b\overrightarrow{CD}$. On admet que les deux droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires et que la distance MN est minimale lorsque la droite (MN) est à la fois perpendiculaire à la droite (AB) et à la droite(CD). Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction de a et de b. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la distance est minimale. En déduire la distance minimale entre les trajectoires des deux drones et conclure…

Vrai ou faux ?

On considère trois points de l'espace $A(0;-1;1)$, $B(4;-3;0)$, $C(-1;-2;-1)$, un plan P d'équation $x+3y-2z+5=0$ et une droite (d) passant par $(0;-1;8)$ dirigée par $\vec{u} = \vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$.

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer en justifiant si elle est vraie ou fausse : « Les points A, B et C définissent le plan P », « La droite (d) est orthogonale à toute droite du plan P », « Les droites(d) et (AB) sont coplanaires », « La droite (d') passant par l'origine du repère et dirigée par $\vec{v} = 11\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ est strictement parallèle au plan P », « Le point $H(3;8;2)$ est le projeté du point $D(18;-3;0)$ sur la droite (d) ».

Dans un cube



On considère le cube ABCDEFGH de centre Ω et d'arête de longueur 6. Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}$. On se place dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ avec $\vec{i} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}$. Dans ce repère on a par exemple $B(6;0;0)$, $F(6;0;6)$ et $G(6;6;6)$.

Déterminer les coordonnées des points P, Q, R et Ω. Déterminer les nombres b et c tels que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ soit un vecteur normal au plan (PQR). En déduire une équation cartésienne de ce plan. Déterminer les coordonnées de K projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

Dans un tétraèdre

On considère le tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées $A\left(4;-\sqrt{3};0\right)$, $B\left(4;\sqrt{3};0\right)$, $C(-1;0;0)$ et $D\left(3;0;2\sqrt{2}\right)$. Démontrer que le plan (ABD) admet pour équation cartésienne $4x + z\sqrt{2} = 16$. Déterminer les coordonnées du point G, projeté orthogonal du point C sur le plan (ABD). On note I le milieu du segment [AC] et J le projeté orthogonal de I sur la droite (BD). Démontrer que J est le milieu du segment [BD]. Démontrer que les droites (IJ) et (EG) sont sécantes en un point K de coordonnées $K\left(3;0;\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. Démontrer que le tétraèdre est inscrit dans une sphère de centre K dont on précisera le rayon.

Distance point plan

Démontrer que la distance $d(A,P)$ d'un point $A(x_A;y_A;z_A)$ de l'espace au plan P d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ est donnée par la relation suivante : $d(A,P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

On pourra faire intervenir le point H, projeté orthogonal de A sur le plan P…