

Rappels sur la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est l'unique fonction égale en tout point à sa dérivée et égale à 1 en 0. C'est-à-dire l'unique fonction f définie par $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 1$.

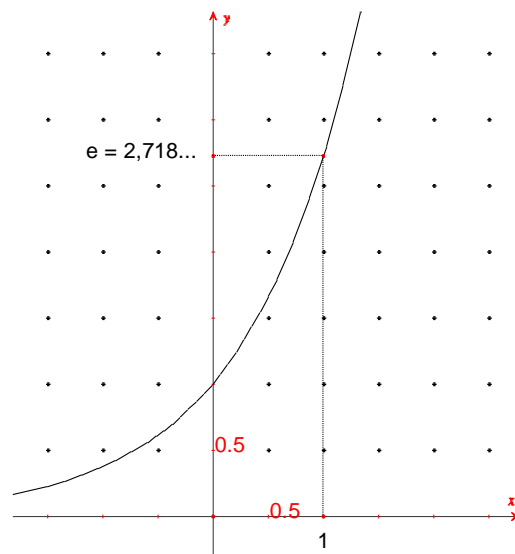
Les premières conséquences de cette définition concernent son signe et son sens de variation : elle est strictement positive et strictement croissante sur \mathbb{R} . Elle vérifie $e^0 = 1$ et $e^1 = e \simeq 2,718$. Ses tangentes en 0 et en 1 sont respectivement les droites d'équation $y = x + 1$ et $y = ex$.

Elle a les propriétés algébriques suivantes $e^a \times e^b = e^{a+b}$, $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$, $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ pour tout a et b .

Détermination des limites en l'infini

Considérons la fonction g définie par $g(x) = e^x - x$.

1. Calculer $g'(x)$. Déterminer les variations de la fonction g puis le signe de $g(x)$. Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$.
2. Procédons au changement de variable $X = -x$. Comment évolue x quand $X \rightarrow -\infty$? En déduire que $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x}$ puis que $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$.



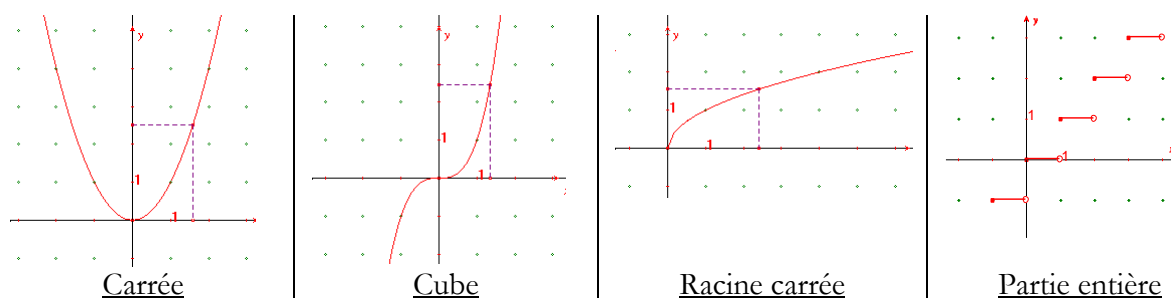
Deux limites importantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

Considérons la fonction h définie par $h(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

1. Calculer $h'(x)$ puis $h''(x)$. Après étude du signe de $h''(x)$, déterminer les variations de $h'(x)$. Après étude du signe de $h'(x)$, déterminer les variations de $h(x)$. En déduire le signe de $h(x)$ puis l'inégalité $e^x \geq \frac{x^2}{2}$. Par un raisonnement précis, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$.
2. Effectuons le changement de variable $X = -x$. Comment évolue X quand $x \rightarrow -\infty$? Montrer que $xe^x = -\frac{X}{e^X}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x$.

Quatre fonctions de référence**Définition**

La fonction f réalise une **bijection** de I sur J lorsque tout élément de J admet **un unique antécédent** dans I . C'est le cas lorsque la fonction est **monotone** et **continue**.

Contre exemples et exemples

La fonction carrée ne réalise pas de bijection de son intervalle de départ $]-\infty; +\infty[$ sur son intervalle image $[0; +\infty[$ car une même image peut avoir plusieurs antécédents. C'est également le cas de la fonction partie entière.

Par contre la fonction cube réalise une bijection de son intervalle de départ $]-\infty; +\infty[$ sur son intervalle image $]-\infty; +\infty[$ tout comme la fonction racine de son intervalle de départ $[0; +\infty[$ sur son intervalle image $[0; +\infty[$. Toute image admet un unique antécédent.

La fonction logarithme népérien

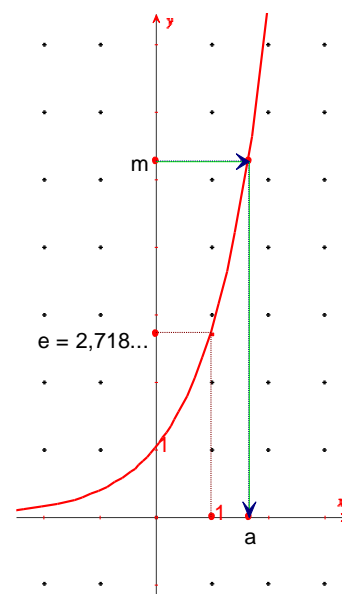
On a établi que la fonction exponentielle réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty; +\infty[$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Ceci signifie que quelque soit le réel strictement positif m , l'équation $e^a = m$ admet une unique solution.

Définition

On appelle logarithme népérien du réel strictement positif m l'unique solution de l'équation $e^a = m$. On note $\ln(m)$ cette solution qui se lit « logarithme népérien de m ».

On dit que la fonction logarithme népérien est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle.

**Applications directes**

Déterminer le logarithme népérien de 1 puis du nombre e . Quel est l'ensemble de définition de la fonction logarithme népérien ? Si x est un réel quelconque, que pouvez-vous dire de $\ln(e^x)$? Si x est un réel strictement positif, que pouvez-vous dire de $e^{\ln(x)}$?

Logarithme et algorithmes de seuilSituation 1

On observe au temps $t = 0$ la présence de 10000 bactéries. Ce nombre est multiplié par 1,5 toutes les heures. On modélise la situation par une suite u_n représentant le nombre de bactéries n heures après l'observation initiale. Au bout de combien d'heures le nombre de bactéries aura dépassé le million ?

Situation 2

On place 2500 euros dans une banque qui propose des intérêts composés (le taux s'applique chaque année au montant de l'année précédente) au taux annuel de 1,75%. Combien d'années faudra-t-il pour doubler le capital ?

Situation 3

Un capital de 1200 euros est placé à un taux annuel composé de 2%. Au bout de combien d'années ce capital aura-t-il triplé ?

Situation 4

On tire successivement et avec remise n boules d'une urne contenant 5 boules blanches et 25 boules noires. Combien faut-il effectuer de tirages pour que la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche soit supérieure à 99% ?

Situation 5

Un couple souhaite avoir une fille. En partant du principe que, pour ce couple, la probabilité d'avoir une fille est identique à celle d'avoir un garçon, on se pose la question suivante : combien d'enfants ce couple doit-il prévoir de faire pour être sûr à 99% d'avoir au moins une fille ?

Situation 6

On joue maintenant avec deux dés à six faces bien équilibrées. A partir de combien de lancers pourra-t-on « parier avec avantage » sur l'obtention d'au moins un « double six ». On indique que « parier avec avantage » correspond à une probabilité supérieure à « une chance sur deux ».

Situation 7

Un lycée présente des candidats au recrutement dans une école. On admet que la probabilité pour qu'un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres. Combien le lycée doit-il présenter de candidat pour être sûr à 99% qu'au moins un élève de ce lycée soit admis dans cette école ?

Situation 8

On modélise par $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$ la température d'un café à l'instant n , avec T_n exprimé en degrés Celsius et n en minute. On est sûr de « ne pas se brûler » lorsque la température du café a rejoint $37,5^\circ\text{C}$, température corporelle. Au bout de combien de temps pourra-t-on le boire ?

La dérivée de la fonction logarithme népérien

Soit $a > 0$. On se propose d'étudier la limite du quotient $\frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a}$ lorsque $x \rightarrow a$.

On appelle $t(x) = \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a}$. On pose les changements de variable $X = \ln(x)$, $A = \ln(a)$.

1. Comment évolue X lorsque $x \rightarrow a$?
2. Que représente la quantité $t(x)$? Montrer que le quotient $t(x)$ peut s'écrire $\frac{X - A}{e^X - e^A}$.
3. Que représente le quotient $\frac{e^X - e^A}{X - A}$? Quelle est sa limite lorsque $X \rightarrow A$?
4. En déduire $\lim_{x \rightarrow a} t(x)$. Quel est le nombre dérivé de la fonction logarithme en a ?
5. La fonction logarithme est-elle dérivable ? Quelle est sa dérivée ?

Propriété fondamentale

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Que pouvez-vous dire de $e^{\ln(ab)}$?
2. Que pouvez-vous dire de $e^{\ln(a) + \ln(b)}$?
3. Que peut-on en déduire pour les quantités $e^{\ln(ab)}$ et $e^{\ln(a) + \ln(b)}$?
4. Et pour les quantités $\ln(a \times b)$ et $\ln(a) + \ln(b)$?

Corollaires

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Si n est un entier naturel non nul, que dire de $\ln(a^n)$? Expliquer.
2. Que dire de $\ln\left(\frac{1}{b}\right)$? Expliquer.
3. Que dire de $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$? Expliquer.
4. Que dire de $\ln(\sqrt{a})$? Expliquer.

Tracé de la courbe représentative – Comportement asymptotique

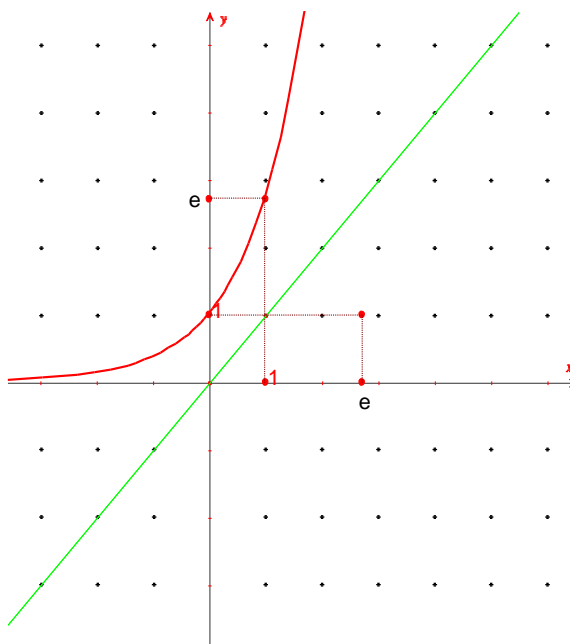
On a représenté ci-contre la représentation graphique de la fonction exponentielle dont on fournit un tableau de valeurs.

| | | | |
|-------|---|-----|-----|
| x | 0 | 1 | a |
| e^x | 1 | e | b |

1. Remplir le tableau de valeurs :

| | | | |
|----------|---|-----|-----|
| x | 1 | e | b |
| $\ln(x)$ | | | |

2. Que peut-on dire des points de la courbe représentative de la fonction logarithme par rapport à ceux de la courbe de l'exponentielle ?



- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative du logarithme en $x = 1$.
- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative du logarithme en $x = e$.
- Tracer la courbe représentative du logarithme et les deux tangentes.
- Conjecturer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)$. Quelle en est la conséquence graphique ?

Rappels sur la fonction exponentielle

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

Deux limites importantes

On cherche ici à déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.
 S'agit-il d'un cas d'indétermination ? Lequel ?
 On pose le changement de variable $X = \ln(x)$

- Exprimer $\frac{\ln(x)}{x}$ en fonction de X .
- Comment évolue X lorsque $x \rightarrow +\infty$
- En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.

On cherche ici à déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \ln(x)$.
 S'agit-il d'un cas d'indétermination ? Lequel ?
 On pose le changement de variable $X = \ln(x)$

- Exprimer $x \times \ln(x)$ en fonction de X .
- Comment évolue X lorsque $x \rightarrow 0^+$?
- En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \ln(x)$.

Logarithme composé – Savoir dériver

On appelle logarithme composé toute fonction s'écrivant sous la forme $\ln[u(x)]$.

1. Rappeler la formule générale permettant de dériver la composée de deux fonctions.
2. En déduire l'expression de la dérivée du logarithme composé $\ln[u(x)]$.
3. Calculer la dérivée de $f(x) = \ln[2x^2 + 1]$. Calculer la dérivée de $g(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

Logarithme composé – Savoir déterminer son domaine de définition

1. Quand $f(x) = \ln[2x - 4]$ existe-t-il ? En déduire le domaine de définition de f .
2. Quand $g(x) = \ln[(2x + 4)(-x + 3)]$ existe-t-il ? En déduire le domaine de définition g .
3. Quand $h(x) = \ln\left[\frac{x-1}{x+1}\right]$ existe-t-il ? En déduire le domaine de définition de h .
4. Quand $k(x) = \ln[1 + e^{-x}]$ existe-t-il ? En déduire le domaine de définition de k .

Logarithme composé – Savoir déterminer les variations et étudier les limites

On considère la fonction $k(x) = \ln[1 + e^{-x}]$

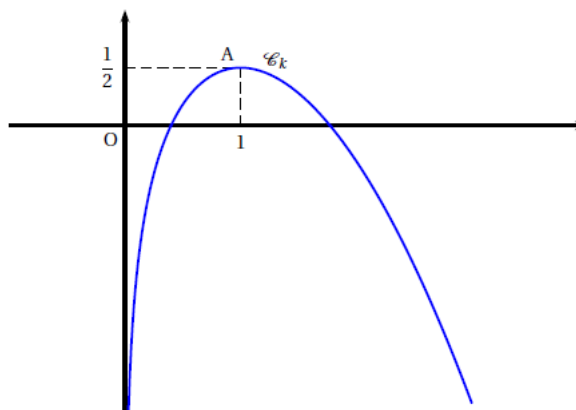
1. Rappeler le domaine de définition de k .
2. Calculer $k'(x)$ et étudier son signe. En déduire les variations de k .
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x)$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$

Un calcul de limite

1. Etudier les variations et le signe de $f(x) = x - \ln(1+x)$ définie sur $]0; +\infty[$.
2. Etudier les variations et le signe de $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ définie sur $]0; +\infty[$.
3. En déduire que pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$
4. En expliquant clairement votre raisonnement en déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Etude d'une famille de fonctions

Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f_k(x) = \ln(x) - kx^2 + 1$.



- Déterminer la limite de la fonction f_k lorsque x tend vers 0 .
Déterminer la limite de la fonction f_k lorsque x tend vers $+\infty$.
- Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, on a $f'_k(x) = \frac{1-2kx^2}{x}$.
- Pour un nombre réel k strictement positif, on donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f_k . Justifier les renseignements concernant les variations de la fonction ainsi que les coordonnées du maximum local.

| | | | |
|----------|---|-------------------------|-----------|
| x | 0 | $\frac{1}{\sqrt{2k}}$ | $+\infty$ |
| $f_k(x)$ | | $\frac{1 - \ln(2k)}{2}$ | |

- On a tracé ci-dessus la courbe C_k représentative d'une fonction f_k pour une certaine valeur du nombre réel k strictement positif. Le point $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_k .

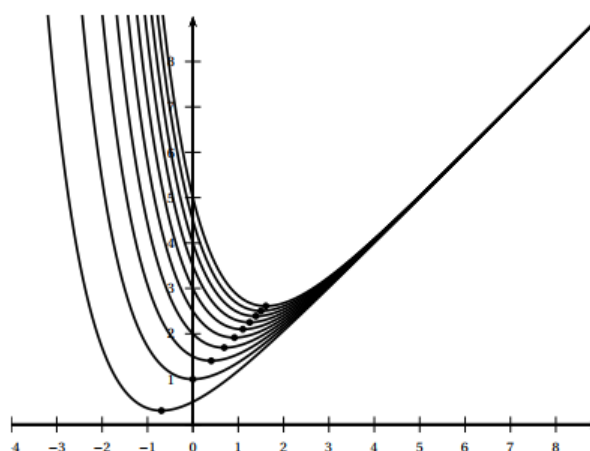
Quelle est la valeur du nombre réel k correspondant ? Justifier votre réponse.

Etude d'une autre famille de fonctions

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies par $f_k(x) = x + ke^{-x}$.

Le but de cet exercice est de démontrer l'alignement des points A_k minimum de f_k .

- Calculer les limites de f_k aux bornes du domaine. Calculer $f'_k(x)$
- Etudier le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction.
- Déterminer les coordonnées du minimum local de chaque fonction f_k et conclure quant à l'alignement.

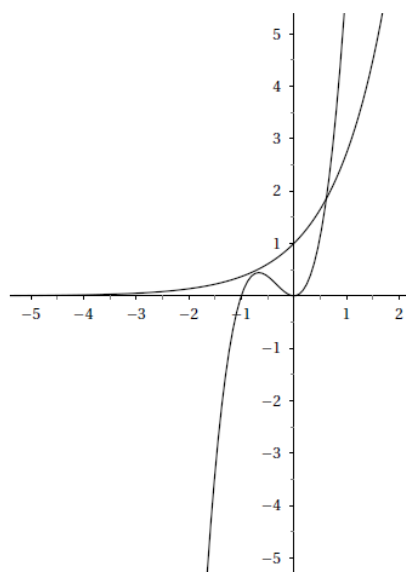


Intersection de l'exponentielle avec un polynôme de degré 3

On considère l'équation $(E) e^x = 3(x^2 + x^3)$.

Partie A – Conjecture graphique

Le graphique ci-contre donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3(x^2 + x^3)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



A l'aide du graphique, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B – Etude de la validité de la conjecture graphique

1. Etudier selon les valeurs de x , le signe de $x^2 + x^3$. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty; -1]$. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E) .
2. On considère la fonction h définie pour tout nombre réel $x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ par $h(x) = \ln(3) + \ln(x^2) + \ln(1+x) - x$. Montrer que sur l'intervalle $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ l'équation (E) est équivalente à l'équation $h(x) = 0$.
3. Montrer que $h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}$. En déduire les variations de h sur $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$.
4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur approchée au centième de chaque solution. Conclure quant à la conjecture de la partie A.

Combien de points d'intersections ?

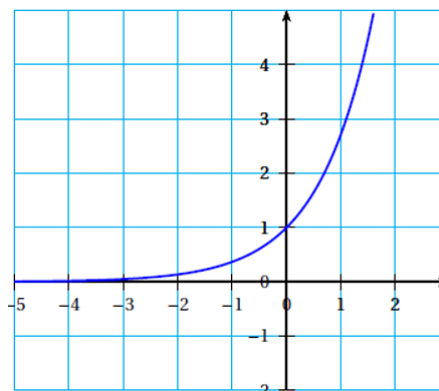
Déterminer, en fonction de n entier naturel non nul, le nombre de points d'intersection de la fonction exponentielle et de la fonction puissance n . On démontrera que l'équation $(E_1) \Leftrightarrow e^x - x^n = 0$ modélise le problème. On démontrera ensuite que cette équation est équivalente à l'équation $(E_2) \Leftrightarrow \ln(x) - \frac{x}{n} = 0$. Après analyse des variations de la fonction auxiliaire $f(x) = \ln(x) - \frac{x}{n}$ et du signe de son minimum local, on s'intéressera au nombre de solutions de (E_2) et on apportera une réponse au problème initial.

L'intersection de l'exponentielle avec une famille de droites

On considère la courbe C d'équation $y = e^x$ tracée ci-contre. Pour tout réel $m > 0$ on note D_m la droite d'équation $y = mx$.

Conjecturer, selon les valeurs prises par m , le nombre de points d'intersection de la courbe C avec la droite D_m .

Le but est de démontrer ces conjectures.



- Déterminer l'expression de la dérivée $g_m'(x)$ de la fonction g_m définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $m > 0$ par $g_m(x) = e^x - mx$.
- Dresser le tableau de signe de $g_m'(x)$ et en déduire les variations de g_m sur \mathbb{R} . Démontrer que g_m admet un minimum local lorsque $x = \ln(m)$ qui vaut $m(1 - \ln(m))$.
- On propose dans cette question un raisonnement par disjonction de cas. Si $m > e$, déterminer le signe de $m(1 - \ln(m))$ et en déduire le nombre de points d'intersection entre C et D_m . Si $m < e$, déterminer le signe de $m(1 - \ln(m))$ et en déduire le nombre de points d'intersection entre C et D_m . Si $m = e$, déterminer la valeur de $m(1 - \ln(m))$ et en déduire le nombre de points d'intersection entre C et D_m .

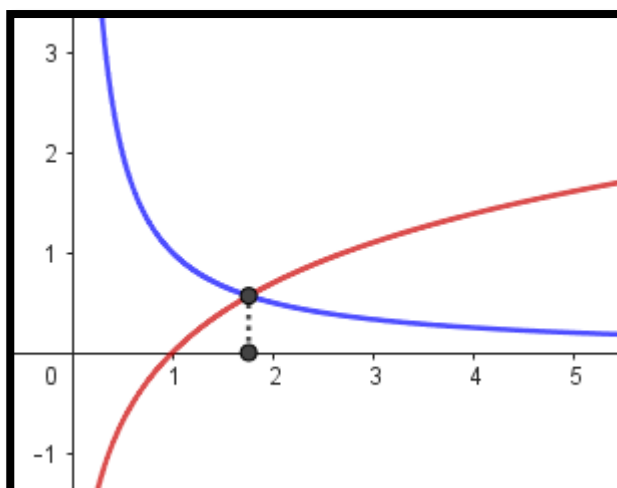
Intersection de l'inverse et du logarithmePartie A

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) - 1$.

- Déterminer la limite de la fonction f en 0. On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$.
- Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- Montrer que $f'(x) = \ln(x) + 1$. En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$ et montrer que f admet un minimum local de coordonnées $(e^{-1}; -1 - e^{-1})$.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ et déterminer un encadrement de α au centième près.

Partie B

On a représenté ci-contre les courbes représentatives des fonctions g et h définies par $g(x) = \ln(x)$ et $h(x) = \frac{1}{x}$.
On souhaite déterminer l'abscisse du point d'intersection de ces deux courbes.



1. Montrer que $g(x) = h(x)$ est équivalente à $f(x) = 0$.
2. En déduire une réponse au problème étudié dans cette partie.

Tangentes perpendiculaires ? Tangentes parallèles ?Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}$.

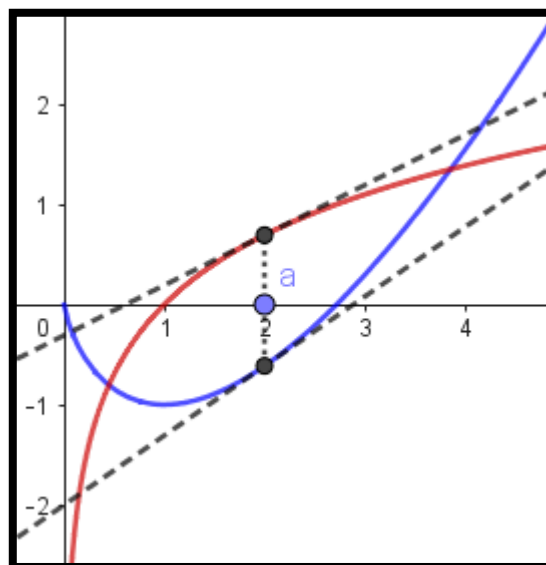
1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

Montrer que $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$. En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ et déterminer un encadrement de α au centième près.

Partie B

On a représenté ci-contre les courbes représentatives des fonctions g et h définies par $g(x) = x \ln(x) - x$ et $h(x) = \ln(x)$ et les tangentes respectives T_a et D_a au point d'abscisse a . On recherche une éventuelle valeur de a pour laquelle les deux tangentes T_a et D_a sont perpendiculaires.



1. Déterminer en fonction de a les coefficients directeurs de T_a et D_a et apporter une réponse au problème.
2. En vous basant sur les résultats obtenus dans l'exercice précédent, sauriez-vous déterminer la valeur de a pour laquelle les deux tangentes T_a et D_a sont parallèles ?