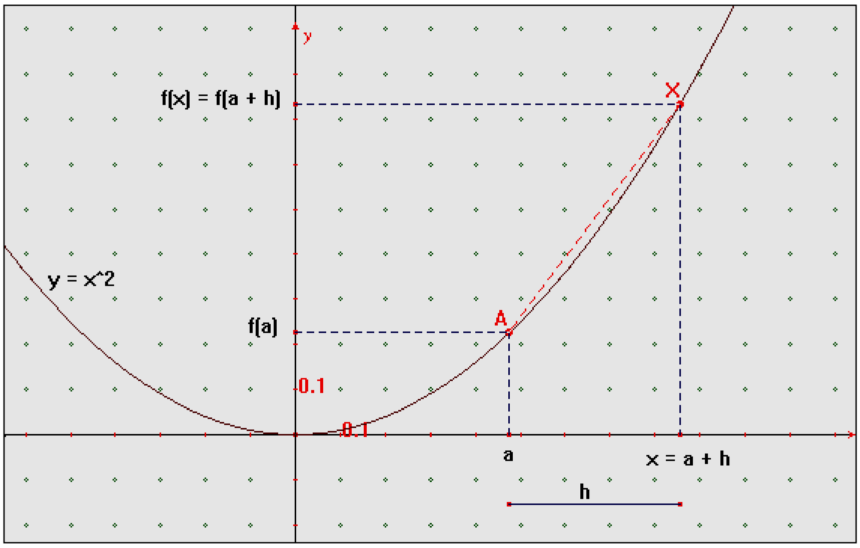
Rappels

Le taux d'accroissement d'une fonction f entre a et $a+h$ est égal à :

$$\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Une fonction est **dérivable** en a si le taux d'accroissement de cette fonction admet une **unique** limite **finie** quand $h \to 0$.



La relation d'Euler

Si h est « **petit** » alors : $\boxed{f(a+h) \approx f(a)+hf'(a)}$ $\langle Euler \rangle$. Cette égalité est la relation d'Euler.

Recherche d'une nouvelle fonction

Le but de cette activité est de représenter graphiquement la fonction f qui vérifie les deux conditions suivantes : $f(0)=1$ et $f'(x)=f(x)$ pour tout x réel.

La relation d'Euler pour un h petit et positif

1. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0$ et $h=0{,}1$. Déterminer $f(0{,}1)$.
2. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0{,}1$ et $h=0{,}1$. Déterminer $f(0{,}2)$.
3. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0{,}2$ et $h=0{,}1$. Déterminer $f(0{,}3)$ à 10^{-2} près.
4. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0{,}3$ et $h=0{,}1$. Déterminer $f(0{,}4)$ à 10^{-2} près.
5. Continuer le travail. Etablir le tableau des valeurs de cette fonction sur l'intervalle $[0;2]$

La relation d'Euler pour un h petit et négatif

1. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0$ et $h=-0{,}1$. Déterminer $f(-0{,}1)$.
2. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=-0{,}1$ et $h=-0{,}1$. Déterminer $f(-0{,}2)$.
3. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=-0{,}2$ et $h=-0{,}1$. Déterminer $f(-0{,}3)$ à 10^{-2} près.
4. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=-0{,}3$ et $h=-0{,}1$. Déterminer $f(-0{,}4)$ à 10^{-2} près.
5. Continuer le travail. Etablir le tableau des valeurs de cette fonction sur l'intervalle $[-2;0]$.

Utilisation d'un tableur pour tracer la représentation graphique

Tracer la représentation graphique de la fonction exponentielle à l'aide de la méthode d'Euler…

La fonction exponentielle

La fonction exponentielle que l'on notera $f(x)=\exp(x)$ est dérivable et continue. Sa dérivée est égale à elle-même. L'image de 0 par cette fonction est 1. $[\exp(x)]'=\exp(x)$ et $\exp(0)=1$.

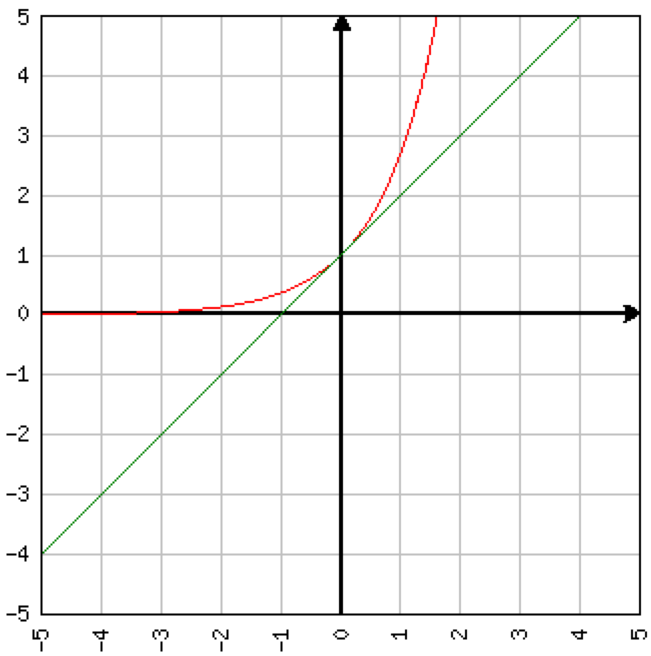
Les propriétés de la fonction exponentielle

- La fonction exponentielle ainsi définie est unique.
- La fonction exponentielle ainsi définie ne s'annule pas.
- La fonction exponentielle ainsi définie est toujours positive.
- La fonction exponentielle ainsi définie vérifie $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$.
- La fonction exponentielle ainsi définie vérifie $\exp(-a)=\dfrac{1}{\exp(a)}$.
- La fonction exponentielle ainsi définie vérifie pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\exp(a^n)=n\exp(a)$.

Détermination des limites en l'infini

Considérons la fonction f définie par $f(x)=\exp(x)-x$.

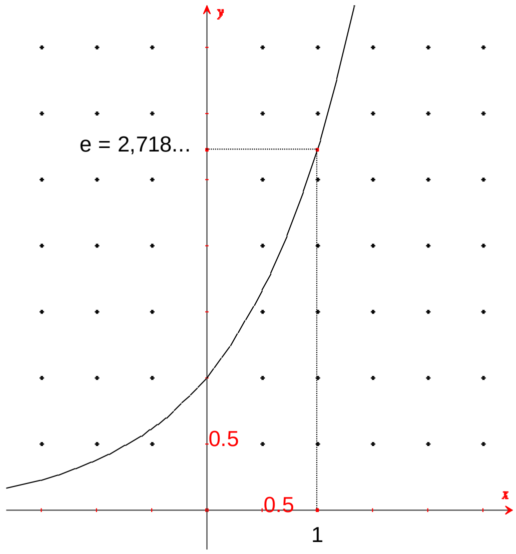
1. Calculer $f'(x)$. Déterminer les variations de la fonction f puis le signe de $f(x)$.
2. Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp(x)$.
3. Procédons au changement de variable $X=-x$. Comment évolue x quand $X\to-\infty$? A l'aide de ce changement montrer que $\lim\limits_{X\to-\infty}\exp(X)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\exp(x)}$
4. En déduire $\lim\limits_{X\to-\infty}\exp(X)$.



Une limite particulière

1. Calculer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\exp(x)-1}{x}$.
2. Interpréter graphiquement.

Deux tangentes à la courbe



L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e.

Le nombre e est un réel tel que $e \approx 2,718...$

Ce nombre, comme le nombre $\pi \approx 3,141...$ n'est pas un nombre rationnel. Sa partie décimale est infinie. Sa valeur approchée est obtenue grâce à la méthode d'Euler.

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de l'exponentielle en $x = 0$.
2. Tracer cette tangente dans le repère ci-contre.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative en $x = 1$. Tracer cette tangente dans le repère ci-contre.

Deux limites importantes

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0}$$

Démonstrations

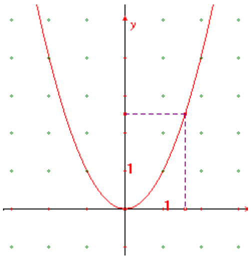
Considérons sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction f définie par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

1. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
2. Après étude du signe de $f''(x)$, déterminer les variations de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.
3. Après étude du signe de $f'(x)$, déterminer les variations de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.
4. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$ puis l'inégalité $e^x \geq \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
5. Par un raisonnement précis que vous préciserez, calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$.

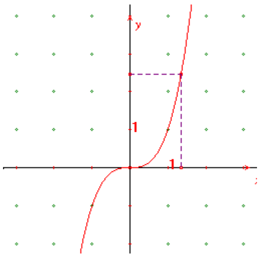
Effectuons le changement de variable $X = -x$.

6. Comment évolue X quand $x \to -\infty$?
   Montrer que $xe^x = -\frac{X}{e^X}$. En déduire $\lim_{x \to -\infty} xe^x$.

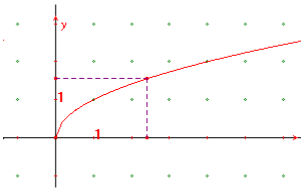
Quatre fonctions de référence



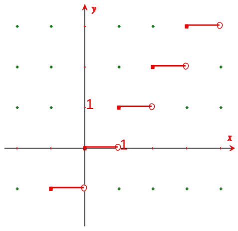
Carrée



Cube



Racine carrée



Partie entière

Définition

La fonction f réalise une **bijection** de I sur J lorsque tout élément de J admet **un unique antécédent** dans I. C'est le cas lorsque la fonction est **monotone** et **continue**.

Contre exemples et exemples

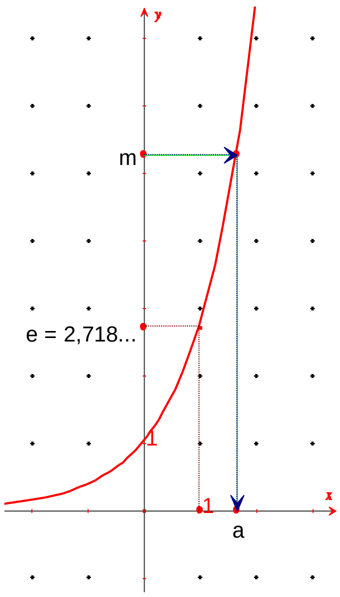
La fonction carrée ne réalise pas de bijection de son intervalle de son intervalle de départ $]-\infty;+\infty[$ sur son intervalle image $[0;+\infty[$ car une même image peut avoir plusieurs antécédents. C'est également le cas de la fonction partie entière.

Par contre la fonction cube réalise une bijection de son intervalle de son intervalle de départ $]-\infty;+\infty[$ sur son intervalle image $]-\infty;+\infty[$ tout comme la fonction racine de son intervalle de départ $[0;+\infty[$ sur son intervalle image $[0;+\infty[$. Toute image admet un unique antécédent.

La fonction logarithme népérien

On a établi que la fonction exponentielle réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Ceci signifie que quelque soit le réel strictement positif m, l'équation $e^a = m$ admet une unique solution.



Définition

On appelle logarithme népérien du réel strictement positif m l'unique solution de l'équation $e^a = m$. On note $\ln(m)$ cette solution qui se lit « logarithme népérien de m ».

On dit que la fonction logarithme népérien est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle.

Applications directes

Déterminer le logarithme népérien de 1 puis du nombre e. Quel est l'ensemble de définition de la fonction logarithme népérien ? Si x est un réel quelconque, que pouvez-vous dire de $\ln(e^x)$? Si x est un réel strictement positif, que pouvez-vous dire de $e^{\ln(x)}$?

La dérivée de la fonction logarithme népérien

Soit $a>0$. On se propose d'étudier la limite du quotient $\dfrac{\ln(x)-\ln(a)}{x-a}$ lorsque $x \to a$.

On appelle $t(x)=\dfrac{\ln(x)-\ln(a)}{x-a}$. On pose les changements de variable $X=\ln(x)$, $A=\ln(a)$.

1. Comment évolue X lorsque $x \to a$?
2. Que représente la quantité $t(x)$? Montrer que le quotient $t(x)$ peut s'écrire $\dfrac{X-A}{e^X-e^A}$.
3. Que représente le quotient $\dfrac{e^X-e^A}{X-A}$? Quelle est sa limite lorsque $X \to A$?
4. En déduire $\lim\limits_{x \to a} t(x)$. Quel est le nombre dérivé de la fonction logarithme en a ?
5. La fonction logarithme est-elle dérivable ? Quelle est sa dérivée ?

Propriété fondamentale

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Que pouvez-vous dire de $e^{\ln(a\times b)}$?
2. Que pouvez-vous dire de $e^{\ln(a)+\ln(b)}$?
3. Que peut-on en déduire pour les quantités $e^{\ln(a\times b)}$ et $e^{\ln(a)+\ln(b)}$?
4. Et pour les quantités $\ln(a\times b)$ et $\ln(a)+\ln(b)$?

Corollaires

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Si n est un entier naturel non nul, que dire de $\ln\left(a^n\right)$? Expliquer.
2. Que dire de $\ln\left(\frac{1}{b}\right)$? Expliquer.
3. Que dire de $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$? Expliquer.
4. Que dire de $\ln\left(\sqrt{a}\right)$? Expliquer.

Tracé de la courbe représentative – Comportement asymptotique

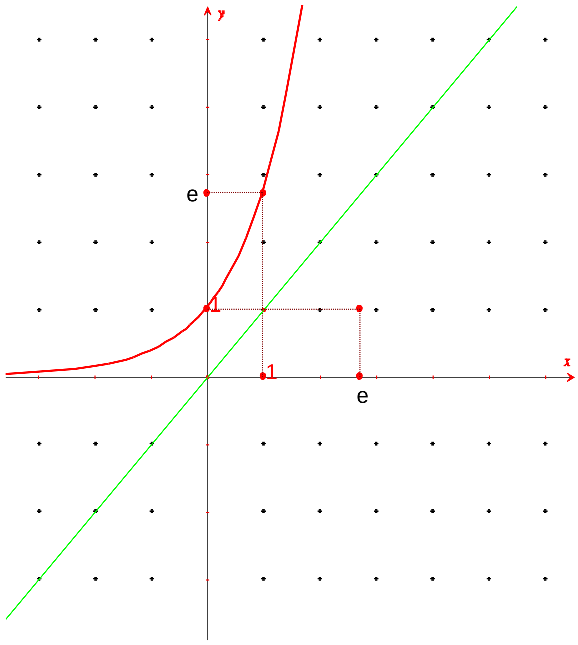
On a représenté ci-contre la représentation graphique de la fonction exponentielle dont on fournit un tableau de valeurs.

x	0	1	a
e^x	1	e	b

1. Remplir le tableau de valeurs :

x	1	e	b
$\ln(x)$			

2. Que peut-on dire des points de la courbe représentative de la fonction logarithme par rapport à ceux de la courbe de l'exponentielle ?



3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative du logarithme en $x = 1$.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative du logarithme en $x = e$.
5. Tracer la courbe représentative du logarithme et les deux tangentes.
6. Conjecturer $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x)$. Quelle en est la conséquence graphique ?

Rappels sur la fonction exponentielle

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0}$$

Deux limites importantes

On cherche ici à déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.

S'agit-il d'un cas d'indétermination ? Lequel ?

On pose le changement de variable $X = \ln(x)$

1. Exprimer $\frac{\ln(x)}{x}$ en fonction de X.
2. Comment évolue X lorsque $x \to +\infty$
3. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.

On cherche ici à déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} x \times \ln(x)$.

S'agit-il d'un cas d'indétermination ? Lequel ?

On pose le changement de variable $X = \ln(x)$

1. Exprimer $x \times \ln(x)$ en fonction de X.
2. Comment évolue X lorsque $x \to 0^+$?
3. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} x \times \ln(x)$.

Logarithme et algorithmes de seuil

Situation 1

On observe au temps $t=0$ la présence de 10000 bactéries. Ce nombre est multiplié par 1,5 toutes les heures. On modélise la situation par une suite u_n représentant le nombre de bactéries n heures après l'observation initiale. Au bout de combien d'heures le nombre de bactéries aura dépassé le million ?

Situation 2

On place 2500 euros dans une banque qui propose des intérêts composés (le taux s'applique chaque année au montant de l'année précédente) au taux annuel de 1,75%. Combien d'années faudra-t-il pour doubler le capital ?

Situation 3

Un capital de 1200 euros est placé à un taux annuel composé de 2%. Au bout de combien d'années ce capital aura-t-il triplé ?

Situation 4

On tire successivement et avec remise n boules d'une urne contenant 5 boules blanches et 25 boules noires. Combien faut-il effectuer de tirages pour que la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche soit supérieure à 99% ?

Situation 5

Un couple souhaite avoir une fille. En partant du principe que, pour ce couple, la probabilité d'avoir une fille est identique à celle d'avoir un garçon, on se pose la question suivante : combien d'enfants ce couple doit-il prévoir de faire pour être sûr à 99% d'avoir au moins une fille ?

Situation 6

On joue maintenant avec deux dés à six faces bien équilibrées. A partir de combien de lancers pourra-t-on « parier avec avantage » sur l'obtention d'au moins un « double six ». On indique que « parier avec avantage » correspond à une probabilité supérieure à « une chance sur deux ».

Situation 7

Un lycée présente des candidats au recrutement dans une école. On admet que la probabilité pour qu'un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres. Combien le lycée doit-il présenter de candidat pour être sûr à 99% qu'au moins un élève de ce lycée soit admis dans cette école ?

Situation 8

On modélise par $T_n = 70\times 0,8^n + 10$ la température d'un café à l'instant n, avec T_n exprimé en degrés Celsius et n en minute. On est sûr de « ne pas se bruler » lorsque la température du café a rejoint 37,5°C, température corporelle. Au bout de combien de temps pourra-t-on le boire ?

Logarithme composé – Savoir dériver

On appelle logarithme composé toute fonction s'écrivant sous la forme $\ln\left[u(x)\right]$.

1. Rappeler la formule générale permettant de dériver la composée de deux fonctions.
2. En déduire l'expression de la dérivée du logarithme composé $\ln\left[u(x)\right]$.
3. Calculer la dérivée de $f(x)=\ln\left[2x^2+1\right]$. Calculer la dérivée de $g(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

Logarithme composé – Savoir déterminer son domaine de définition

1. Quand $f(x)=\ln[2x-4]$ existe-t-il ? En déduire le domaine de définition de f.
2. Quand $g(x)=\ln\left[(2x+4)(-x+3)\right]$ existe-t-il ? En déduire le domaine de définition g.
3. Quand $h(x)=\ln\left[\dfrac{x-1}{x+1}\right]$ existe-t-il ? En déduire le domaine de définition de h.
4. Quand $k(x)=\ln\left[1+e^{-x}\right]$ existe-t-il ? En déduire le domaine de définition de k.

Logarithme composé – Savoir déterminer les variations et étudier les limites

On considère la fonction $k(x)=\ln\left[1+e^{-x}\right]$

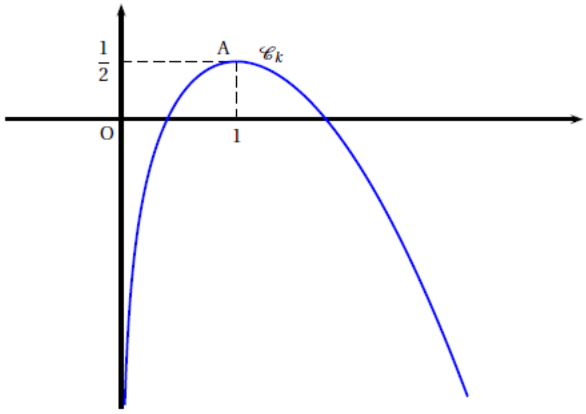
1. Rappeler le domaine de définition de k.
2. Calculer $k'(x)$ et étudier son signe. En déduire les variations de k.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$

Un calcul de limite

1. Etudier les variations et le signe de $f(x)=x-\ln(1+x)$ définie sur $]0;+\infty[$.
2. Etudier les variations et le signe de $g(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$ définie sur $]0;+\infty[$.
3. En déduire que pour tout $x\in\,]0;+\infty[$ on a $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$
4. En expliquant clairement votre raisonnement en déduire $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Etude d'une famille de fonctions

Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f_k(x)=\ln(x)-kx^2+1$.



1. Déterminer la limite de la fonction f_k lorsque x tend vers 0. Déterminer la limite de la fonction f_k lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, on a $f_k'(x)=\dfrac{1-2kx^2}{x}$.

3. Pour un nombre réel k strictement positif, on donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f_k. Justifier les renseignements concernant les variations de la fonction ainsi que les coordonnées du maximum local.

4. On a tracé ci-dessus la courbe C_k représentative d'une fonction f_k pour une certaine valeur du nombre réel k strictement positif. Le point $A\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_k.

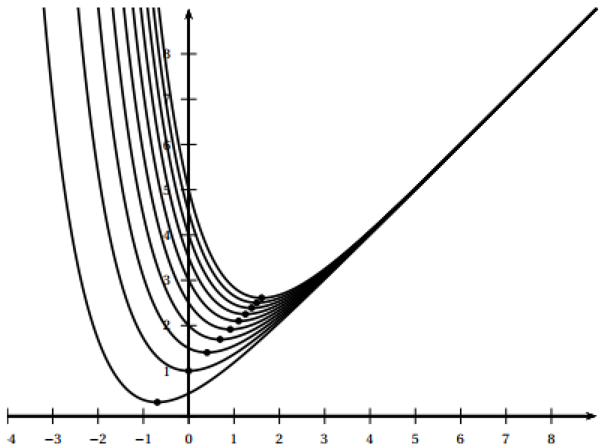
x	0 ‖	$\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$	$+\infty$
$f_k(x)$	‖ ↗	$\dfrac{1-\ln(2k)}{2}$	↘

Quelle est la valeur du nombre réel k correspondant ? Justifier votre réponse.

Etude d'une autre famille de fonctions

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies par $f_k(x)=x+ke^{-x}$.

Le but de cet exercice est de démontrer l'alignement des points A_k minimum de f_k.



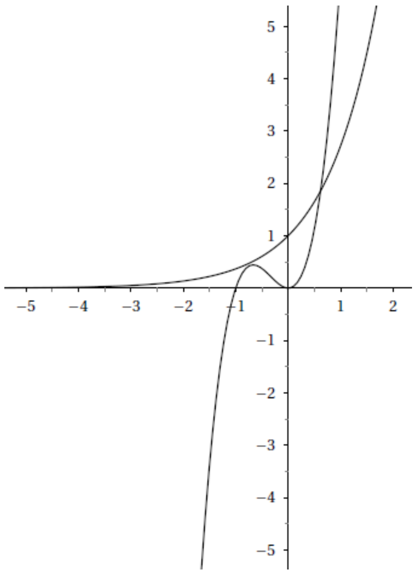
1. Calculer les limites de f_k aux bornes du domaine. Calculer $f_k'(x)$

2. Etudier le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction.

3. Déterminer les coordonnées du minimum local de chaque fonction f_k et conclure quant à l'alignement.

Intersection de l'exponentielle avec un polynôme de degré 3

On considère l'équation $(E)\ e^x = 3\left(x^2 + x^3\right)$.



Partie A – Conjecture graphique

Le graphique ci-contre donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur IR par $f(x) = 3\left(x^2 + x^3\right)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.

A l'aide du graphique, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B – Etude de la validité de la conjecture graphique

1. Etudier selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty; -1]$. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E).

2. On considère la fonction h définie pour tout nombre réel $x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ par $h(x) = \ln(3) + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x$. Montrer que sur l'intervalle $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ l'équation (E) est équivalente à l'équation $h(x) = 0$.

3. Montrer que $h'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}$. En déduire les variations de h sur $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$.

4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur approchée au centième de chaque solution. Conclure quant à la conjecture de la partie A.

Combien de points d'intersections ?

Déterminer, en fonction de n entier naturel non nul, le nombre de points d'intersection de la fonction exponentielle et de la fonction puissance n. On démontrera que l'équation $(E_1) \Leftrightarrow e^x - x^n = 0$ modélise le problème. On démontrera ensuite que cette équation est équivalente à l'équation $(E_2) \Leftrightarrow \ln(x) - \dfrac{x}{n} = 0$. Après analyse des variations de la fonction auxiliaire $f(x) = \ln(x) - \dfrac{x}{n}$ et du signe de son maximum local, on s'intéressera au nombre de solutions de (E_2) et on apportera une réponse au problème initial.

Intersection de l'inverse et du logarithme

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) - 1$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0. On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. Montrer que $f'(x) = \ln(x) + 1$. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$ et montrer que f admet un minimum local de coordonnées $\left(e^{-1};-1-e^{-1}\right)$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$ et déterminer un encadrement de α au centième près.

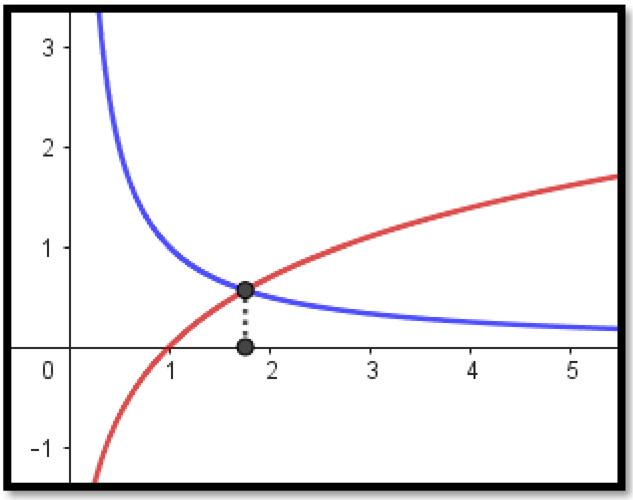
Partie B

On a représenté ci-contre les courbes représentatives des fonctions g et h définies par $g(x) = \ln(x)$ et $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

On souhaite déterminer l'abscisse du point d'intersection de ces deux courbes.

1. Montrer que $g(x) = h(x)$ est équivalente à $f(x) = 0$.

2. En déduire une réponse au problème étudié dans cette partie.



Tangentes perpendiculaires ? Tangentes parallèles ?

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x}$.

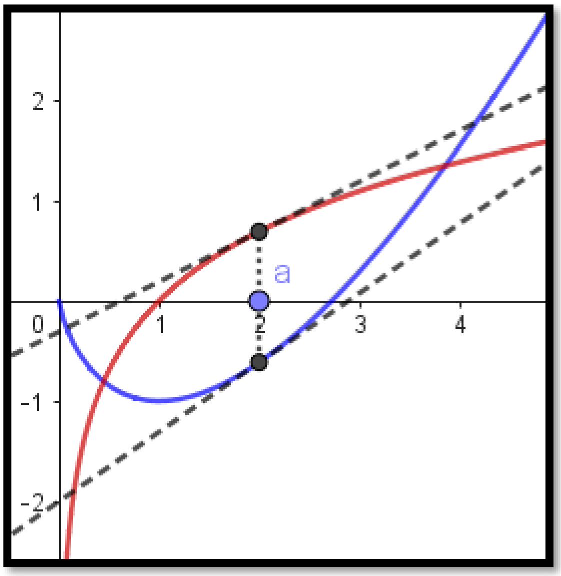
1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

   Montrer que $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$ et déterminer un encadrement de α au centième près.

Partie B

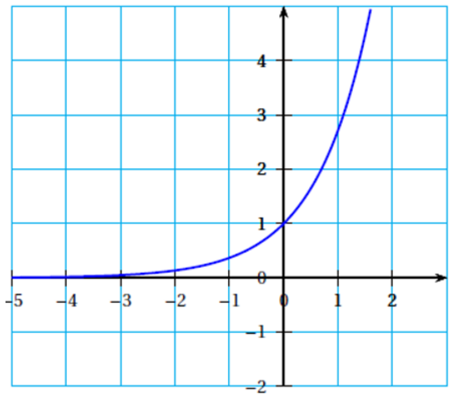
On a représenté ci-contre les courbes représentatives des fonctions g et h définies par $g(x)=x\ln(x)-x$ et $h(x)=\ln(x)$ et les tangentes respectives T_a et D_a au point d'abscisse a. On recherche une éventuelle valeur de a pour laquelle les deux tangentes T_a et D_a sont perpendiculaires.



1. Déterminer en fonction de a les coefficients directeurs de T_a et D_a et apporter une réponse au problème.
2. En vous basant sur les résultats obtenus dans l'exercice précédent, sauriez-vous déterminer la valeur de a pour laquelle les deux tangentes T_a et D_a sont parallèles ?

L'intersection de l'exponentielle avec une famille de droites

On considère la courbe C d'équation $y=e^x$ tracée ci-contre. Pour tout réel $m>0$ on note D_m la droite d'équation $y=mx$.



Conjecturer, selon les valeurs prises par m, le nombre de points d'intersection de la courbe C avec la droite D_m.

Le but est de démontrer ces conjectures.

1. Déterminer l'expression de la dérivée $g_m'(x)$ de la fonction g_m définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $m>0$ par $g_m(x)=e^x-mx$. Dresser le tableau de signe de $g_m'(x)$ et en déduire les variations de g_m sur $\mathbb{R}$. Démontrer que g_m admet un minimum local lorsque $x=\ln(m)$ qui vaut $m(1-\ln(m))$.

2. On propose dans cette question un raisonnement par disjonction de cas. Si $m>e$, déterminer le signe de $m(1-\ln(m))$ et en déduire le nombre de points d'intersection entre C et D_m. Si $m<e$, déterminer le signe de $m(1-\ln(m))$ et en déduire le nombre de points d'intersection entre C et D_m. Si $m=e$, déterminer la valeur de $m(1-\ln(m))$ et en déduire le nombre de points d'intersection entre C et D_m.