Définition de la fonction exponentielle

Définition

La **fonction exponentielle** notée exp vérifie :
- $\exp(0) = 1$;
- pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Notation employée

Notation de la fonction exp et nombre e

- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto e^x$
- $e = \exp(1)$ $\qquad e \approx 2{,}718$

Propriétés de la fonction exponentielle

Propriétés algébriques

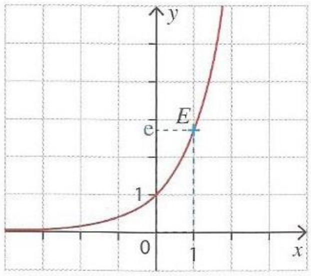
- $e^x > 0$
- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

Variation et courbe représentative

Signe et variation

Pour tout réel x, $e^x > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	↗		



- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$
- $e^a \geqslant e^b \Leftrightarrow a \geqslant b$

Comportement asymptotique

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

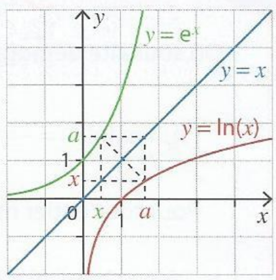
Croissance comparée avec les puissances

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ pour tout } n \geq 1$$

Définition et propriétés du logarithme

Appliquer la définition et les propriétés du logarithme

- La fonction **logarithme népérien** est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est définie sur $]0\,;+\infty[$ et est notée **ln**.
  $$y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$$
- Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$
- Pour tout réel $a > 0$, $e^{\ln(a)} = a$
- Pour tout réel a, $\ln(e^a) = a$



Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$:
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

Pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier relatif n :
- $\ln(x^n) = n\ln(x)$
- $\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$

Dérivées et variations

Étudier les variations de la fonction ln

- **Dérivées**

Pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Si $u(x) > 0$, $(\ln \circ u)' = \dfrac{u'}{u}$.

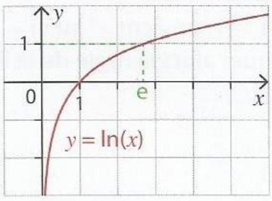
- **Variations**

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-\infty$ ↗	0	↗	$+\infty$

Limites et croissances comparées

Déterminer des limites

- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- La courbe de la fonction ln admet une **asymptote verticale** d'équation $x = 0$.



- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln(x) = 0$

Equations et inéquations

Résoudre des équations ou des inéquations

Soient a et b des réels strictement positifs.

- $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln(b)$.
- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$.
- $\ln(a) \leqslant \ln(b) \Leftrightarrow a \leqslant b$.
- $\ln(a) \leqslant 0 \Leftrightarrow a \in]0\,;1]$.
- $\ln(a) \geqslant 0 \Leftrightarrow a \in [1\,;+\infty[$.