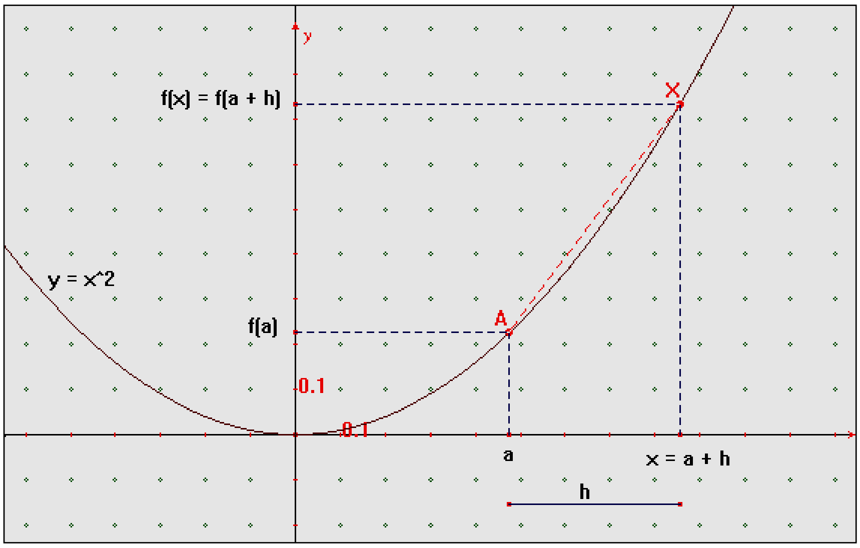
Rappels

Le taux d'accroissement d'une fonction f entre a et $a+h$ est égal à :

$$\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Une fonction est **dérivable** en a si le taux d'accroissement de cette fonction admet une **unique** limite **finie** quand $h \to 0$.



La relation d'Euler

Si h est « **petit** » alors : $\boxed{f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)}$ $\langle Euler \rangle$. Cette égalité est la relation d'Euler.

Recherche d'une nouvelle fonction

Le but de cette activité est de représenter graphiquement la fonction f qui vérifie les deux conditions suivantes : $f(0)=1$ et $f'(x)=f(x)$ pour tout x réel.

La relation d'Euler pour un h petit et positif

1. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0$ et $h=0{,}1$. Déterminer $f(0{,}1)$.
2. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0{,}1$ et $h=0{,}1$. Déterminer $f(0{,}2)$.
3. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0{,}2$ et $h=0{,}1$. Déterminer $f(0{,}3)$ à 10^{-2} près.
4. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0{,}3$ et $h=0{,}1$. Déterminer $f(0{,}4)$ à 10^{-2} près.
5. Continuer le travail. Etablir le tableau des valeurs de cette fonction sur l'intervalle $[0;2]$

La relation d'Euler pour un h petit et négatif

1. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=0$ et $h=-0{,}1$. Déterminer $f(-0{,}1)$.
2. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=-0{,}1$ et $h=-0{,}1$. Déterminer $f(-0{,}2)$.
3. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=-0{,}2$ et $h=-0{,}1$. Déterminer $f(-0{,}3)$ à 10^{-2} près.
4. Ecrire la relation $\langle Euler \rangle$ pour $a=-0{,}3$ et $h=-0{,}1$. Déterminer $f(-0{,}4)$ à 10^{-2} près.
5. Continuer le travail. Etablir le tableau des valeurs de cette fonction sur l'intervalle $[-2;0]$.

Utilisation d'un tableur et d'un grapheur

Geogebra présente les deux fonctionnalités « tableur » et « grapheur ». Utilisez ce logiciel pour tracer la représentation graphique de la fonction exponentielle à l'aide de la méthode d'Euler.

La fonction exponentielle

La fonction exponentielle que l'on notera $f(x)=\exp(x)$ est dérivable et continue. Sa dérivée est égale à elle-même. L'image de 0 par cette fonction est 1. $\left[\exp(x)\right]'=\exp(x)$ et $\exp(0)=1$.

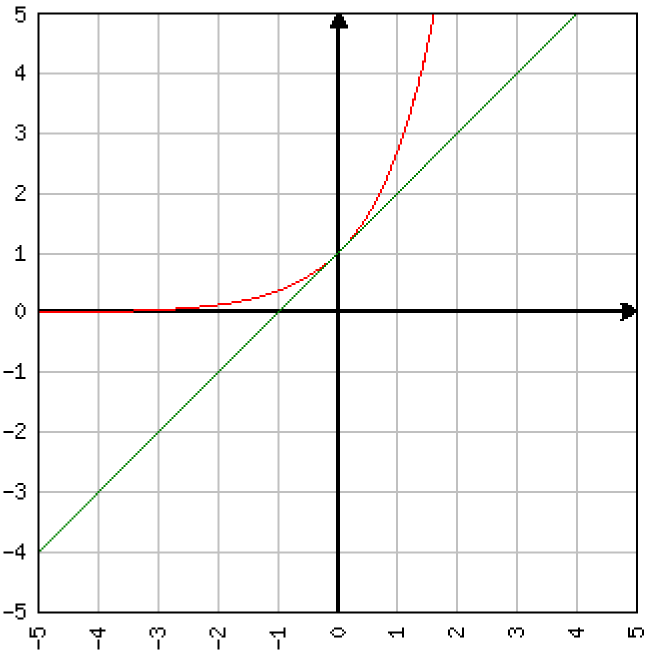
Les propriétés de la fonction exponentielle

- La fonction exponentielle ainsi définie est unique.
- La fonction exponentielle ainsi définie ne s'annule pas.
- La fonction exponentielle ainsi définie est toujours positive.
- La fonction exponentielle ainsi définie vérifie $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$.
- La fonction exponentielle ainsi définie vérifie $\exp(-a)=\dfrac{1}{\exp(a)}$.
- La fonction exponentielle ainsi définie vérifie pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\exp\left(a^n\right)=n\exp(a)$.

Détermination des limites en l'infini

Considérons la fonction f définie par $f(x)=\exp(x)-x$.

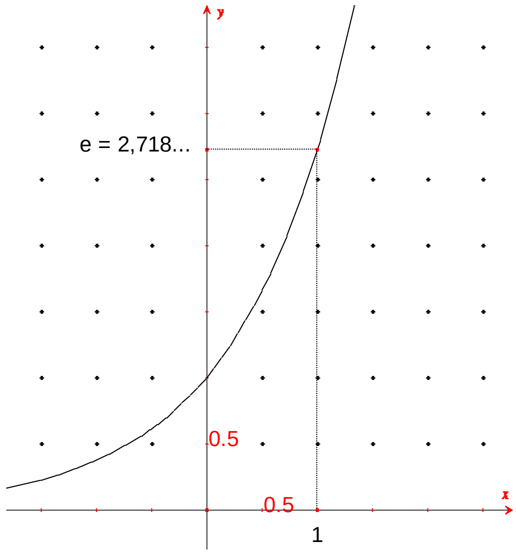
1. Calculer $f'(x)$. Déterminer les variations de la fonction f puis le signe de $f(x)$.
2. Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp(x)$.
3. Procédons au changement de variable $X=-x$. Comment évolue x quand $X\to-\infty$? A l'aide de ce changement montrer que $\lim\limits_{X\to-\infty}\exp(X)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\exp(x)}$
4. En déduire $\lim\limits_{X\to-\infty}\exp(X)$.



Une limite particulière

1. Calculer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\exp(x)-1}{x}$.
2. Interpréter graphiquement.

Deux tangentes à la courbe



L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e.

Le nombre e est un réel tel que $e \approx 2,718...$

Ce nombre, comme le nombre $\pi \approx 3,141...$ n'est pas un nombre rationnel. Sa partie décimale est infinie. Sa valeur approchée est obtenue grâce à la méthode d'Euler.

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de l'exponentielle en $x = 0$.

2. Tracer cette tangente dans le repère ci-contre.

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative en $x = 1$.
   Tracer cette tangente dans le repère ci-contre.

Deux limites importantes

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0}$$

Démonstrations

Considérons sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction f définie par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

1. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.

2. Après étude du signe de $f''(x)$, déterminer les variations de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

3. Après étude du signe de $f'(x)$, déterminer les variations de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

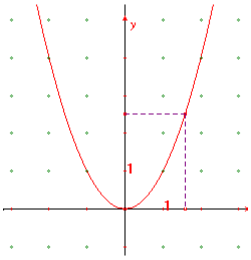
4. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$ puis l'inégalité $e^x \geq \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

5. Par un raisonnement précis que vous préciserez, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$.

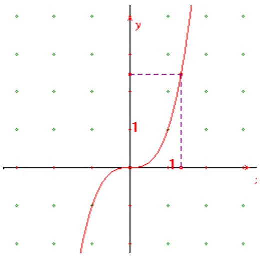
Effectuons le changement de variable $X = -x$.

6. Comment évolue X quand $x \to -\infty$?
   Montrer que $xe^x = -\frac{X}{e^X}$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$.

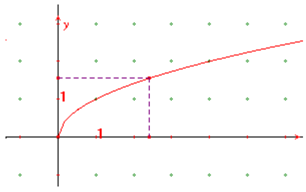
Quatre fonctions de référence



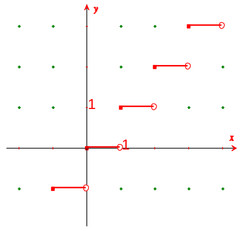
Carrée



Cube



Racine carrée



Partie entière

Définition

La fonction f réalise une **bijection** de I sur J lorsque tout élément de J admet **un unique antécédent** dans I .

Contre exemples

Déterminer le(s) antécédent(s) de 4 par la fonction carré. La fonction carré peut-t-elle réaliser une bijection ? Expliquer. Déterminer le(s) antécédent(s) de 1,5 par la fonction partie entière. La fonction partie entière peut-t-elle réaliser une bijection ? Expliquer.

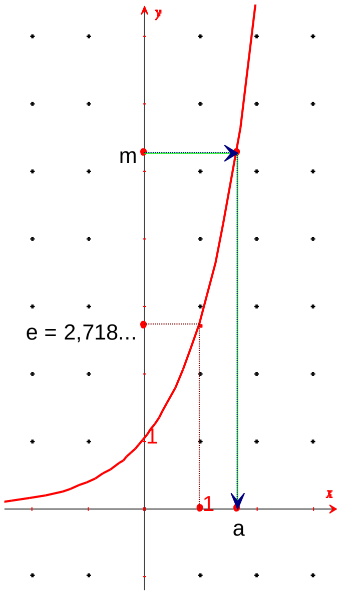
Exemples

Que pensez-vous des fonctions cube et racine ? Réalisent-elles une bijection ? Déterminer les conditions nécessaires pour qu'une fonction réalise une bijection.

La fonction logarithme népérien

On a établi que la fonction exponentielle réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Ceci signifie que quelque soit le réel strictement positif m , l'équation $e^a = m$ admet une unique solution.



Définition

On appelle logarithme népérien du réel strictement positif m l'unique solution de l'équation $e^a = m$. On note $\ln(m)$ cette solution qui se lit « logarithme népérien de m ».

On dit que la fonction logarithme népérien est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle.

Applications directes

Déterminer le logarithme népérien de 1 puis du nombre e. Quel est l'ensemble de définition de la fonction logarithme népérien ? Si x est un réel quelconque, que pouvez-vous dire de $\ln(e^x)$? Si x est un réel strictement positif, que pouvez-vous dire de $e^{\ln(x)}$?

La dérivée de la fonction logarithme népérien

Soit $a>0$. On se propose d'étudier la limite du quotient $\dfrac{\ln(x)-\ln(a)}{x-a}$ lorsque $x \to a$.

On appelle $t(x)=\dfrac{\ln(x)-\ln(a)}{x-a}$. On pose les changements de variable $X=\ln(x)$, $A=\ln(a)$.

1. Comment évolue X lorsque $x \to a$?
2. Que représente la quantité $t(x)$? Montrer que le quotient $t(x)$ peut s'écrire $\dfrac{X-A}{e^X-e^A}$.
3. Que représente le quotient $\dfrac{e^X-e^A}{X-A}$? Quelle est sa limite lorsque $X \to A$?
4. En déduire $\lim\limits_{x\to a} t(x)$. Quel est le nombre dérivé de la fonction logarithme en a ?
5. La fonction logarithme est-elle dérivable ? Quelle est sa dérivée ?

Propriété fondamentale

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Que pouvez-vous dire de $\mathrm{e}^{\ln(a\times b)}$?
2. Que pouvez-vous dire de $e^{\ln(a)+\ln(b)}$?
3. Que peut-on en déduire pour les quantités $\mathrm{e}^{\ln(a\times b)}$ et $e^{\ln(a)+\ln(b)}$?
4. Et pour les quantités $\ln(a\times b)$ et $\ln(a)+\ln(b)$?

Corollaires

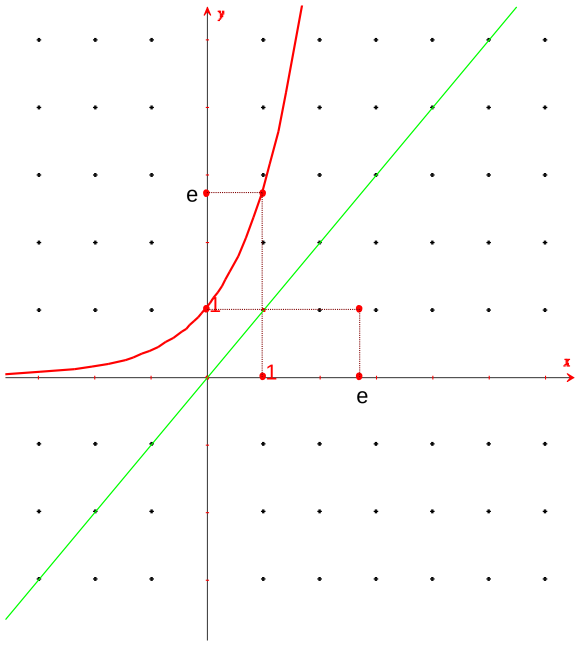
Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Si n est un entier naturel non nul, que dire de $\ln(a^n)$? Expliquer.
2. Que dire de $\ln\left({}^{1}\!/_{b}\right)$? Expliquer.
3. Que dire de $\ln\left({}^{a}\!/_{b}\right)$? Expliquer.
4. Que dire de $\ln\left(\sqrt{a}\right)$? Expliquer.

Tracé de la courbe représentative – Comportement asymptotique

On a représenté ci-contre la représentation graphique de la fonction exponentielle dont on fournit un tableau de valeurs.

x	0	1	a
e^x	1	e	b



1. Remplir le tableau de valeurs :

x	1	e	b
$\ln(x)$			

2. Que peut-on dire des points de la courbe représentative de la fonction logarithme par rapport à ceux de la courbe de l'exponentielle ?

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative du logarithme en $x = 1$.

4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative du logarithme en $x = e$.

5. Tracer la courbe représentative du logarithme et les deux tangentes.

6. Conjecturer $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x)$. Quelle en est la conséquence graphique ?

Rappels sur la fonction exponentielle

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0}$$

Deux limites importantes

On cherche ici à déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$.

S'agit-il d'un cas d'indétermination ? Lequel ?

On pose le changement de variable $X = \ln(x)$

1. Exprimer $\dfrac{\ln(x)}{x}$ en fonction de X.

2. Comment évolue X lorsque $x \to +\infty$

3. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$.

On cherche ici à déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} x \times \ln(x)$.

S'agit-il d'un cas d'indétermination ? Lequel ?

On pose le changement de variable $X = \ln(x)$

1. Exprimer $x \times \ln(x)$ en fonction de X.

2. Comment évolue X lorsque $x \to 0^+$?

3. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} x \times \ln(x)$.

Logarithme composé – Savoir dériver

On appelle logarithme composé toute fonction s'écrivant sous la forme $\ln\left[u(x)\right]$.

1. Rappeler la formule générale permettant de dériver la composée de deux fonctions.
2. En déduire l'expression de la dérivée du logarithme composé $\ln\left[u(x)\right]$.
3. Calculer la dérivée de $f(x)=\ln\left[2x^2+1\right]$. Calculer la dérivée de $g(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

Logarithme composé – Savoir déterminer son domaine de définition

1. Quand $f(x)=\ln[2x-4]$ existe-t-il ? En déduire le domaine de définition de f.
2. Quand $g(x)=\ln\left[(2x+4)(-x+3)\right]$ existe-t-il ? En déduire le domaine de définition g.
3. Quand $h(x)=\ln\left[\dfrac{x-1}{x+1}\right]$ existe-t-il ? En déduire le domaine de définition de h.
4. Quand $k(x)=\ln\left[1+e^{-x}\right]$ existe-t-il ? En déduire le domaine de définition de k.

Logarithme composé – Savoir déterminer les variations et étudier les limites

On considère la fonction $k(x)=\ln\left[1+e^{-x}\right]$

1. Rappeler le domaine de définition de k.
2. Calculer $k'(x)$ et étudier son signe. En déduire les variations de k.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$

Un calcul de limite

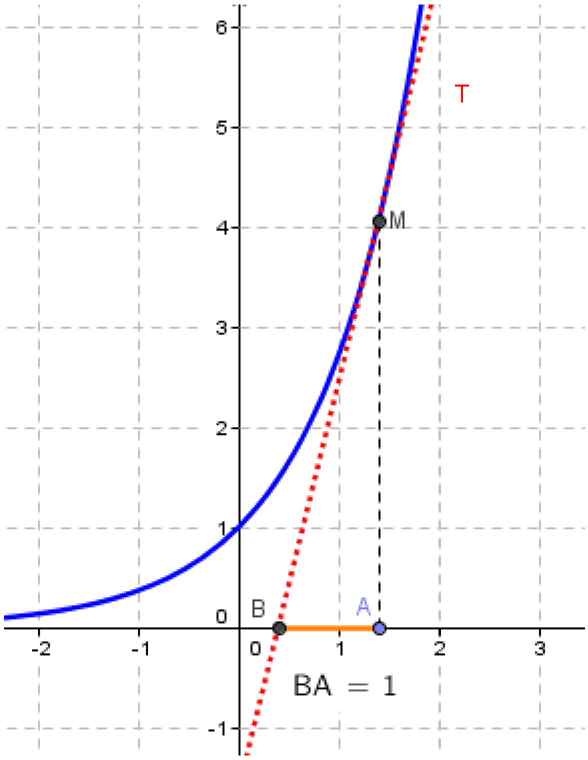
1. Etudier les variations et le signe de $f(x)=x-\ln(1+x)$ définie sur $]0;+\infty[$.
2. Etudier les variations et le signe de $g(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$ définie sur $]0;+\infty[$.
3. En déduire que pour tout $x\in]0;+\infty[$ on a $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$
4. En expliquant clairement votre raisonnement en déduire $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Une courbe, une tangente

On considère la courbe C représentative de la fonction exponentielle $f(x)=e^{x}$ dans un repère orthonormé du plan.

On considère a un réel quelconque.

Le point M est le point de la courbe C d'abscisse a. La droite T est la tangente à la courbe C passant par M. Cette droite coupe l'axe des abscisses en B.



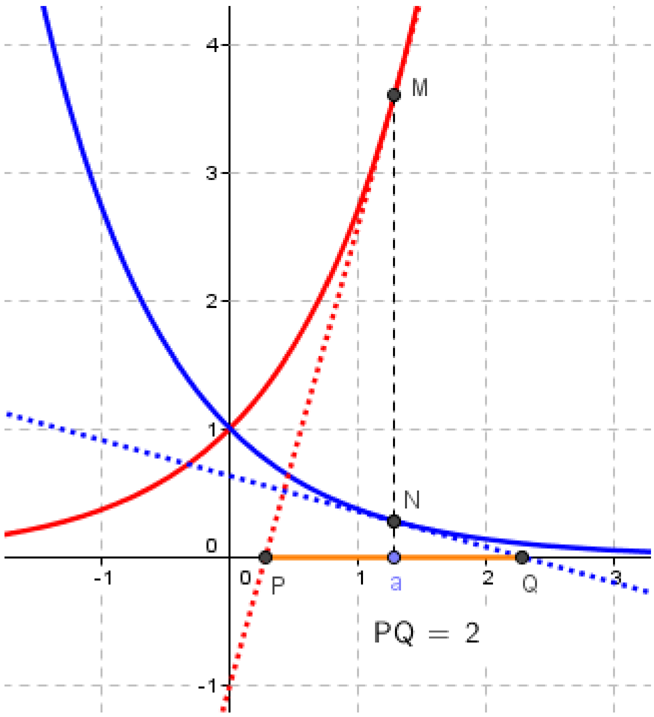
- A l'aide du logiciel Geogebra, construire la courbe C, le point A, le point M, la tangente T et le point B.
- Emettre une conjecture sur la longueur du segment [BA] appelé sous-tangente.
- Démontrer cette conjecture.

Deux courbes, deux tangentes

On considère les courbes C1 et C2 représentatives des fonctions $f_1(x)=e^{x}$ et $f_2(x)=e^{-x}$ dans un repère orthonormé du plan.

On considère a un réel quelconque.

Les points M et N sont les points de C1 et de C2 d'abscisse a. Les droites T1 et T2 sont les tangentes à C1 et C2 en M et N. Ces deux droites coupent l'axe des abscisses respectivement en P et Q.



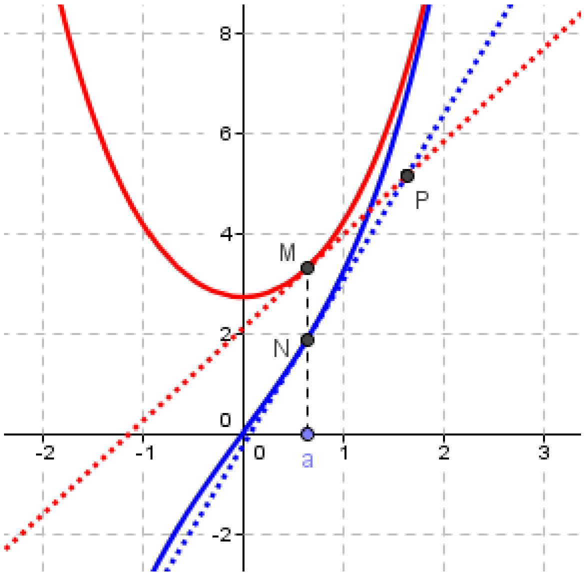
- A l'aide du logiciel Geogebra construire les courbes, les tangentes et les points P et Q.
- Emettre une conjecture sur la position relative des droites T1 et T2. Emettre une conjecture sur la longueur du segment [PQ]. Démontrer les deux conjectures énoncées.

Un lieu de points

On considère les fonctions f et g définies par $f(x)=\dfrac{e^{1+x}+e^{1-x}}{2}$ et $g(x)=\dfrac{e^{1+x}-e^{1-x}}{2}$.

On note C_f et C_g les courbes représentatives des deux fonctions f et g. On considère un réel a quelconque. On note M le point de C_f d'abscisse a. On note N le point de C_g d'abscisse a. Les tangentes aux courbes C_f et C_g aux points M et N se coupent en P.

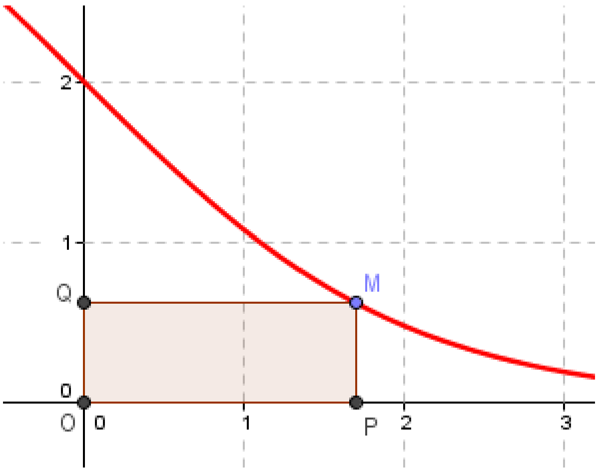
Le but est d'étudier le lieu des points P.



- A l'aide du logiciel Geogebra, construire les courbes C_f et C_g, les points M, N et P.
- Emettre une conjecture sur le lieu des points P. Démontrer la conjecturé énoncée.

Une aire maximale

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{4}{e^x+1}$. Pour tout x réel on note M P et Q les point de coordonnées respectives $(x;f(x))$, $(x;0)$ et $(0;f(x))$. A l'aide du logiciel Geogebra, construire la courbe représentative de f, les points M, P et Q ainsi que le rectangle OPMQ. Donner une valeur approchée de la valeur de x pour laquelle l'aire de OPMQ est maximale.

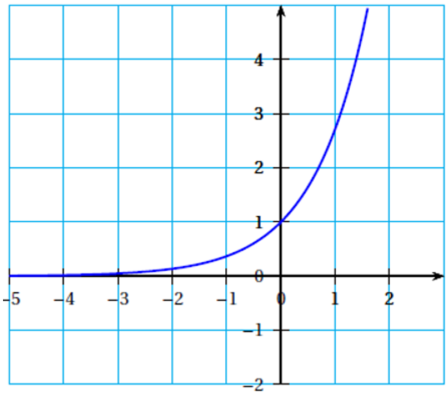


Soit g la fonction définie par $g(x)=e^x-xe^x+1$. Etudier les variation de g. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α située dans l'intervalle $[0;1]$. Déterminer un encadrement de α au centième près. Déterminer le signe de $g(x)$. Démontrer que $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

Soit h la fonction définie par $h(x)=\dfrac{4x}{e^x+1}$. Etudier les variations de h. Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α. Déterminer un encadrement de cette aire maximale. Sauriez-vous démontrer que la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse α (valeur pour laquelle l'aire du rectangle est maximale) est alors tangente à la diagonale (PQ).

L'intersection de l'exponentielle avec une famille de droites

On considère la courbe C d'équation $y = e^x$ tracée ci-contre. Pour tout réel $m > 0$ on note D_m la droite d'équation $y = mx$.



Conjecturer, selon les valeurs prises par m, le nombre de points d'intersection de la courbe C avec la droite D_m.

Le but est de démontrer ces conjectures.

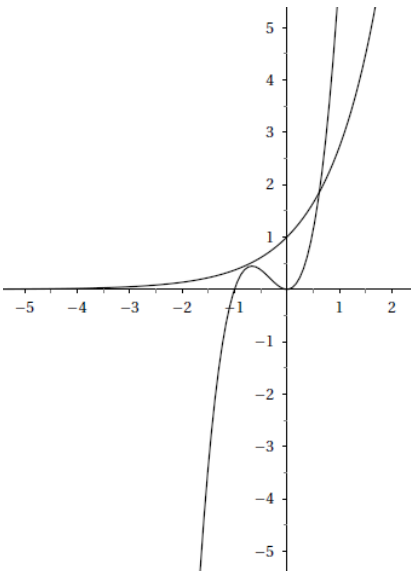
1. Déterminer l'expression de la dérivée $g_m'(x)$ de la fonction g_m définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $m > 0$ par $g_m(x) = e^x - mx$.

2. Dresser le tableau de signe de $g_m'(x)$ et en déduire les variations de g_m sur $\mathbb{R}$. Démontrer que g_m admet un minimum local lorsque $x = \ln(m)$ qui vaut $m(1-\ln(m))$.

3. On propose dans cette question un raisonnement par disjonction de cas. Si $m > e$, déterminer le signe de $m(1-\ln(m))$ et en déduire le nombre de points d'intersection entre C et D_m. Si $m < e$, déterminer le signe de $m(1-\ln(m))$ et en déduire le nombre de points d'intersection entre C et D_m. Si $m = e$, déterminer la valeur de $m(1-\ln(m))$ et en déduire le nombre de points d'intersection entre C et D_m.

Intersection de l'exponentielle avec un polynôme de degré 3

On considère l'équation (E) $e^x = 3(x^2 + x^3)$.



Partie A – Conjecture graphique

Le graphique ci-contre donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur IR par $f(x) = 3(x^2 + x^3)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.

A l'aide du graphique, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B – Etude de la validité de la conjecture graphique

1. Etudier selon les valeurs de x, le signe de x^2+x^3. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty;-1]$. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E).

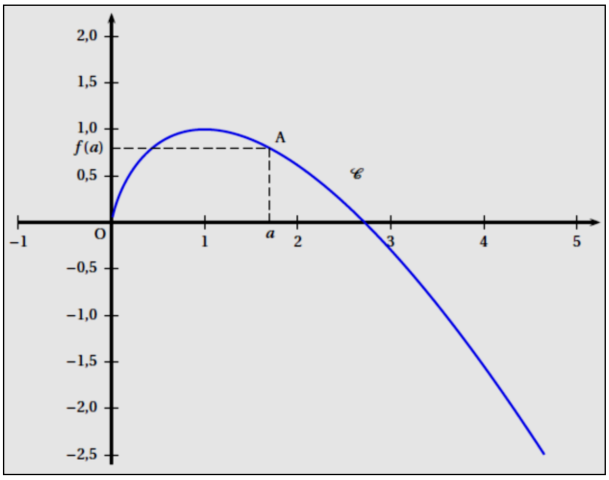
2. On considère la fonction h définie pour tout nombre réel $x\in]-1;0[\cup]0;+\infty[$ par $h(x)=\ln(3)+\ln(x^2)+\ln(1+x)-x$. Montrer que sur l'intervalle $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ l'équation (E) est équivalente à l'équation $h(x)=0$.

3. Montrer que $h'(x)=\dfrac{-x^2+2x+2}{x(x+1)}$. En déduire les variations de h sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$.

4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x)=0$ et donner une valeur approchée au centième de chaque solution. Conclure quant à la conjecture de la partie A.

Construction de la tangente à une courbe en un point

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=x(1-\ln x)$. Sa courbe représentative C est proposée ci-contre.

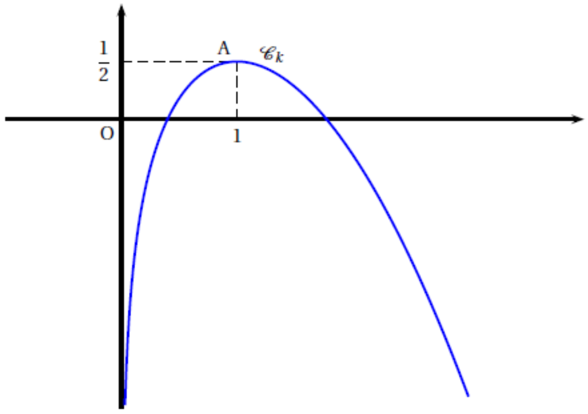


1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'ensemble de définition. Calculer la dérivée de la fonction. Etudier le signe de la dérivée et dresser le tableau de variations. Dresser également le tableau de signe de la fonction.

2. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente T_a au point A de la courbe C d'abscisse a. Déterminer en détaillant votre raisonnement l'équation de la tangente T_a au point A. En déduire en fonction du nombre réel a, les coordonnées du point A', point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.

3. Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente T_a au point A de la courbe C d'abscisse a. Construire la tangente T_a au point A placé sur la figure.

Etude d'une famille de fonctions



Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f_k(x)=\ln(x)-kx^2+1$.

1. Déterminer la limite de la fonction f_k lorsque x tend vers 0. Déterminer la limite de la fonction f_k lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, on a $f_k'(x)=\dfrac{1-2kx^2}{x}$.
3. Pour un nombre réel k strictement positif, on donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f_k. Justifier les renseignements concernant les variations de la fonction ainsi que les coordonnées du maximum local.
4. On a tracé ci-dessus la courbe C_k représentative d'une fonction f_k pour une certaine valeur du nombre réel k strictement positif. Le point $A\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_k.

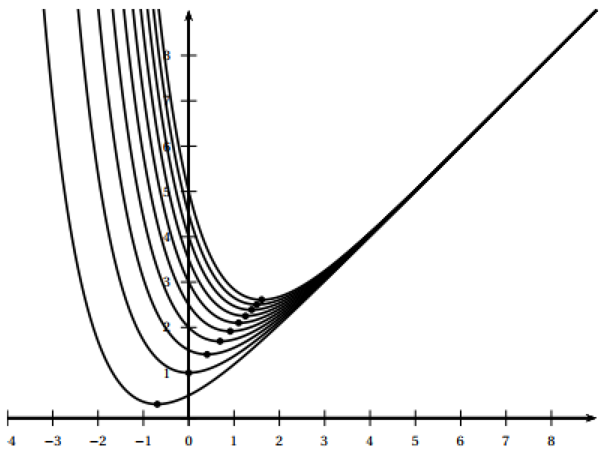
x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$		$+\infty$
$f_k(x)$	‖	$\nearrow$	$\dfrac{1-\ln(2k)}{2}$	$\searrow$	

Quelle est la valeur du nombre réel k correspondant ? Justifier votre réponse.

Etude d'une autre famille de fonctions

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies par $f_k(x)=x+ke^{-x}$.

Le but de cet exercice est de démontrer l'alignement des points A_k minimum de f_k.



1. Calculer les limites de f_k aux bornes du domaine. Calculer $f_k'(x)$
2. Etudier le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction.
3. Déterminer les coordonnées du minimum local de chaque fonction f_k et conclure quant à l'alignement.