Equations différentielles

Une équation différentielle est une équation pour laquelle l'inconnue recherchée n'est pas une valeur mais une fonction et pour laquelle l'égalité proposée fait intervenir la dérivée de cette fonction. Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions dérivables qui vérifient l'égalité.

On propose ci-dessous plusieurs équations différentielles que vous savez déjà résoudre.

1. Résoudre l'équation différentielle $f'(x) = 2x$.
2. Résoudre l'équation différentielle $f'(x) = 3x^2$.
3. Résoudre l'équation différentielle $f'(x) = e^x$.
4. Résoudre l'équation différentielle $f'(x) = 1/x$.
5. Résoudre l'équation différentielle $f'(x) = -1/x^2$.
6. Résoudre l'équation différentielle $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$.

Equations différentielles, solutions uniques ?

Que pensez-vous de l'équation différentielle $f'(x) = 0$? Reprendre à l'aide de cette remarque les équations différentielles précédentes et donner dans chaque cas toutes les solutions possibles.

Unicité de la solution lorsqu'une condition initiale est proposée

1. Trouver la solution de l'équation $f'(x) = 2x$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.
2. Trouver la solution de l'équation $f'(x) = 3x^2$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 2$.
3. Trouver la solution de l'équation $f'(x) = e^x$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 3$.
4. Trouver la solution de l'équation $f'(x) = 1/x$ vérifiant la condition initiale $f(1) = 1$.
5. Trouver la solution de l'équation $f'(x) = -1/x^2$ vérifiant la condition initiale $f(1) = 2$.
6. Trouver la solution de l'équation $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$ vérifiant la condition initiale $f(1) = 3$.

Définition

On appelle **primitive** de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F dérivable sur l'intervalle I et dont la dérivée F' est la fonction f.

$$\boxed{f \underset{\text{a pour dérivée}}{\overset{\text{a pour primitive}}{\rightleftarrows}} F}$$

Propriétés

- Si f admet une primitive F, k étant une constante réelle quelconque, alors toute fonction G telle que $G(x) = F(x) + k$ est aussi une primitive de f. Réciproquement, si F et G sont deux primitives de la fonction f, alors $G(x) = F(x) + k$.

- Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle. Parmi toutes les primitives une seule s'annule en un point de l'intervalle I.

Primitives des fonctions usuelles

Compléter le tableau ci-dessous présentant les primitives de certaines fonctions usuelles :

	Fonction f	Primitives F	Domaine de validité
Constante	$f(x)=a$		$\mathbb{R}$
Identité	$f(x)=x$		$\mathbb{R}$
Carré	$f(x)=x^2$		$\mathbb{R}$
Cube	$f(x)=x^3$		$\mathbb{R}$
Puissance n	$f(x)=x^n$		$\mathbb{R}$
Inverse	$f(x)=\frac{1}{x}$		$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
Exponentielle	$f(x)=e^x$		$\mathbb{R}$
Inverse du carré	$f(x)=\frac{1}{x^2}$		$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
Inverse de la racine	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$		$]0;+\infty[$

Rappel sur la dérivée d'une exponentielle composée et conséquences sur les primitives

Exponentielle composée	Dérivée
e^u	$u'\times e^u$

Utiliser le rappel ci-dessus pour déterminer les primitives des quatre fonctions ci-dessous :

$$f(x)=e^{2x+3} \qquad g(x)=20e^{5x+2} \qquad h(x)=\frac{1}{x}+e^{2x} \qquad k(x)=x^3+e^{-5x}$$

Rappel sur la dérivée d'un logarithme composé et conséquence sur la primitive

Logarithme composé	Dérivée
$\ln(u)$	u'/u

Utiliser le rappel ci-dessus pour déterminer les primitives des quatre fonctions ci-dessous :

$$f(x)=\frac{2}{2x+1} \qquad g(x)=\frac{1}{5x+2} \qquad h(x)=\frac{2x-1}{x^2-x} \qquad k(x)=\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

Résoudre une équation différentielle

Le but du travail suivant est de comprendre la notation suivante : $\boxed{y' = 2y}$

On considère la fonction suivante : $f(x) = e^{2x}$

- Calculer $f(0)$.
- Calculer $f'(x)$.
- Nous décidons de noter $y = f(x)$. Exprimer y' en fonction de y.

On considère la fonction suivante : $g(x) = 3e^{2x}$

- Calculer $g(0)$.
- Calculer $g'(x)$.
- Nous décidons de noter $y = g(x)$. Exprimer y' en fonction de y.

On considère la fonction suivante : $h(x) = -4e^{2x}$

- Calculer $h(0)$.
- Calculer $h'(x)$.
- Nous décidons de noter $y = h(x)$. Exprimer y' en fonction de y.

Conclusion

- Résoudre l'équation différentielle $\boxed{y' = 2y}$ c'est trouver **toutes les fonctions** qui vérifient cette égalité. Toutes ces fonctions sont des fonctions **exponentielles composées** qui ont la forme suivante $\boxed{f(x) = Ce^{2x}}$.

- Pour déterminer la constante C il est nécessaire d'avoir une information supplémentaire appelée **condition initiale**.

Généralisation

Soit a un réel quelconque. Déterminer **toutes** les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$.

Autres formes prises par l'équation différentielle

Lorsque la forme de l'équation différentielle n'est pas $y' = ay$, on peut essayer de s'y ramener comme pour les situations suivantes. Déterminer la fonction vérifiant l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ et la condition initiale $f(0) = 3$. Déterminer la fonction vérifiant l'équation différentielle $4y - y' = 0$ et la condition initiale $f(0{,}5) = 1$. Déterminer la fonction vérifiant l'équation différentielle $2y - 4y' = 0$ et la condition initiale $f(2) = 1$. Déterminer la fonction vérifiant l'équation différentielle $200y' + 50y = 0$ et la condition initiale $f(0) = 5$. Déterminer la fonction vérifiant l'équation différentielle $0{,}1y' - 3y = 0$ et la condition initiale $f(10) = 10$.

Théorème 1

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions du type $f(x) = Ce^{ax}$

Cela signifie que si une fonction est du type $f(x) = Ce^{ax}$, alors elle est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, mais aussi que si une fonction est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, alors elle s'écrit sous la forme $f(x) = Ce^{ax}$. Le but du travail ci-dessous est de démontrer ces deux implications qui font le théorème.

- Supposons que f soit une fonction du type $f(x) = Ce^{ax}$, démontrons que c'est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$. Pour cela calculer $f'(x)$. Puis, En notant $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$, exprimer y' en fonction de y. Conclure.

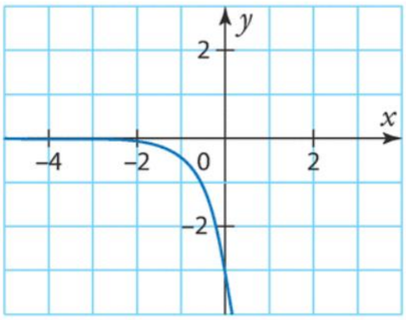
- Supposons que f soit une solution de $y' = ay$, démontrons que f est une fonction du type $f(x) = Ce^{ax}$. Considérons la fonction g définie par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$ et calculons $g'(x)$. Que peut-on dire de la fonction g ? Conclure.

Exercice d'application directe

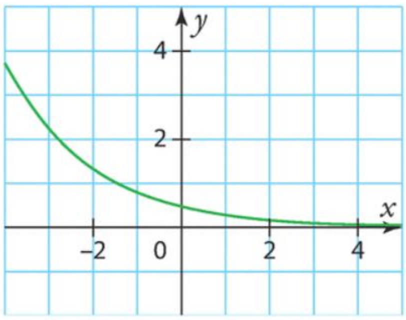
Associer à chaque courbe proposée l'expression de la fonction f qui lui correspond.

Associer ensuite à chaque courbe et fonction associée une équation différentielle qui puisse leur correspondre.

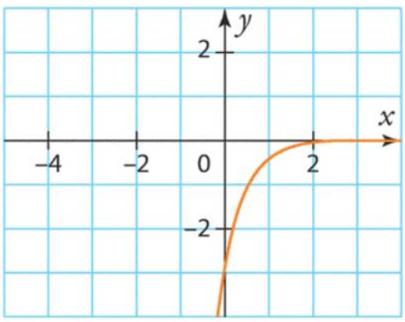
①



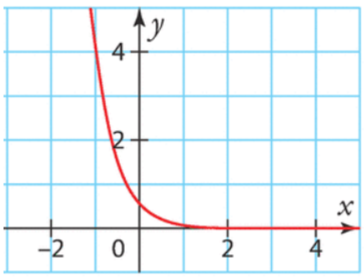
②



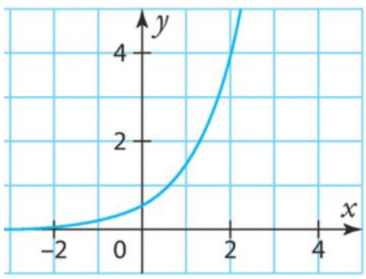
③



④



⑤



a) $f(x) = -3e^{2x}$ **b)** $f(x) = 0{,}5e^{x}$ **c)** $f(x) = 0{,}5e^{-2x}$ **d)** $f(x) = -3e^{-2x}$ **e)** $f(x) = 0{,}5e^{-0{,}1x}$

équa diff 1	*équa diff 2*	*équa diff 3*	*équa diff 4*	*équa diff 5*	*équa diff 6*
$y' + y = 0$	$y' - y = 0$	$y' + 2y = 0$	$y' - 2y = 0$	$10y' + y = 0$	$10y' - y = 0$

Théorème 2

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions du type $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$

Cela signifie que si une fonction est du type $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, alors elle est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$, mais aussi que si une fonction est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$, alors elle s'écrit sous la forme $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$. Le but du travail ci-dessous est de démontrer ces deux implications qui font le théorème.

- Supposons que f soit une fonction du type $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, démontrons que c'est une solution de $y' = ay + b$. Calculons $f'(x)$. En notant $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$, exprimer y' en fonction de y. Conclure.

- Supposons que f soit une solution de $y' = ay + b$, démontrons que f est un fonction du type $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$. Considérons pour cela la fonction g définie par $g(x) = e^{-ax} \times \left[f(x) + \frac{b}{a} \right]$. Calculons $g'(x)$. Que peut-on dire de g ? Conclure.

Exercices d'application directe

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y + 1$.
   Préciser parmi toutes les solutions la solution vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle $4y' + 3y = 2$.
   Préciser parmi toutes les solutions la solution vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

Evolution d'une température

Un courant d'intensité constante passe dans un conducteur. Par effet Joule, ce conducteur s'échauffe et on note $\theta(t)$ sa température en °C à l'instant t exprimé en secondes. On suppose que lors de la mise sous tension, à l'instant $t = 0$, la température du conducteur est égale à $0°C$.

Le bilan énergétique se traduit par l'équation différentielle suivante : $10 \times \theta' + \theta = 20$.

1. Montrer que $\theta(t) = 20\left(1 - e^{-0,1t}\right)$. Détailler votre raisonnement.
   Déterminer les variations de la fonction θ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. Calculer la limite de $\theta(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
   Quel est le temps nécessaire pour que la température atteigne $19°C$?

Evolution d'une autre température

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C. On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four. On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degrés Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four. Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C. On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y'+6y=150$.

1. Préciser la valeur de $f(0)$.

2. Résoudre l'équation différentielle $y'+6y=150$.
   En déduire que pour tout réel $t \geq 0$, on a $f(t)=200\times e^{-6t}+25$.

3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$ Cette valeur était-elle prévisible ?

4. Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40 °C. On note t_0 le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon. Déterminer la valeur exacte de t_0 et donner sa valeur approchée sous forme d'un nombre entier de minutes.

Evolution de la vitesse d'un cycliste

Lors d'une course, un cycliste professionnel descend une route rectiligne, pentue et très longue.

On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t où le temps t est exprimé en secondes et la vitesse $v(t)$ est exprimée en m/s. Au départ de la course, la vitesse initiale est nulle. Un modèle simple permet de considérer que la vitesse v du cycliste au cours de la descente est solution de l'équation différentielle $10v'+v=30$.

1. Préciser la valeur de $v(0)$.

2. Résoudre l'équation différentielle $10v'+v=30$.
   En déduire que pour tout réel $t \geq 0$, on a $v(t)=-30e^{-0,1t}+30$.

3. Calculer la limite de la fonction v en $+\infty$ Interpréter la valeur obtenue.

4. La vitesse du cycliste est dite « stabilisée » lorsque son accélération $v'(t)$ (en physique l'accélération est la dérivée de la vitesse) est inférieure à 0,1 m/s^2. Déterminer à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste sera dite stabilisée.

Théorème 3

Les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b(x)$ où b n'est plus une constante mais une fonction de la variable x sont les fonctions du type $f(x) = Ce^{ax} + g(x)$ où C est une constante réelle et g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

Illustration à travers l'étude d'un exemple

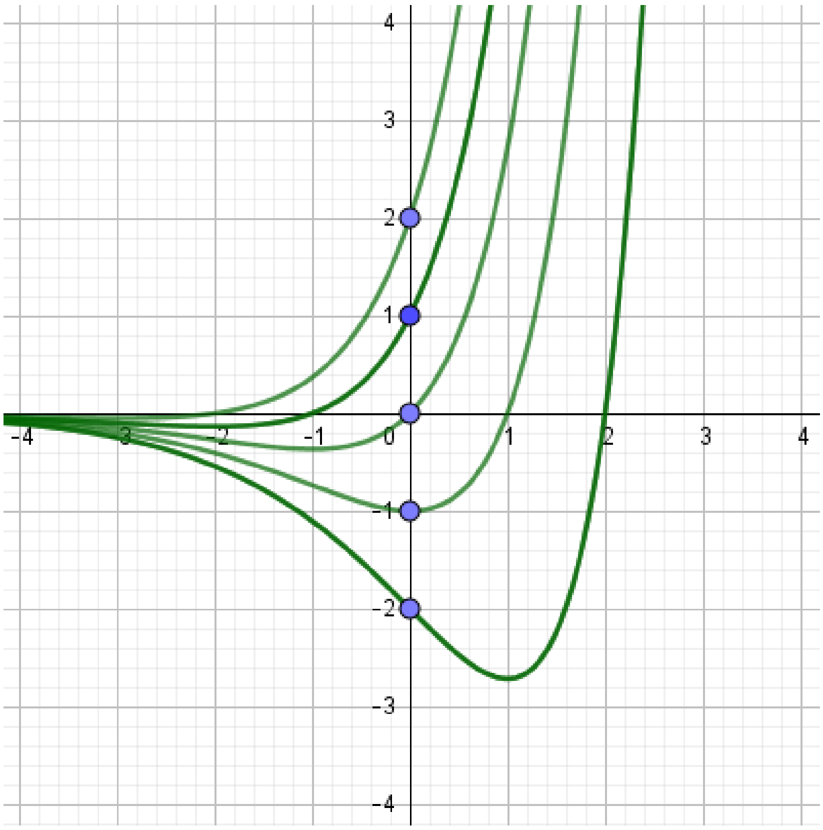
On a représenté ci-dessous cinq fonctions solutions de l'équation différentielle $(E)\, y' = y + e^x$.

1. Montrer que la fonction $g(x) = xe^x$ est une solution particulière de l'équation (E).

2. Démontrer qu'une fonction f est solution de l'équation (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation $(E')\, y' = y$.

3. En déduire l'expression générale de l'ensemble des solutions de l'équation (E).

4. Déterminer l'expression des cinq fonctions proposées ci-contre.



Exercices supplémentaires

Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = (x+1)e^{-2x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E)\, y' = -2y + e^{-2x}$. Démontrer qu'une fonction f est solution de l'équation (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation $(E')\, y' = -2y$. En déduire l'expression générale de l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = x^3 - e^{3x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E)\, y' = 3y + 3x^2 - 3x^3$. Démontrer qu'une fonction f est solution de l'équation (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation $(E')\, y' = 3y$. En déduire l'expression générale de l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Dans le domaine de l'économie

On cherche à modéliser l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un écran plat en fonction de l'année.

On note $f(x)$ la fonction qui représente cette évolution à partir de l'année 2005 représentée par $x=0$ au cours de laquelle on recensait un million de foyers équipés. On a donc $f(0)=1$.

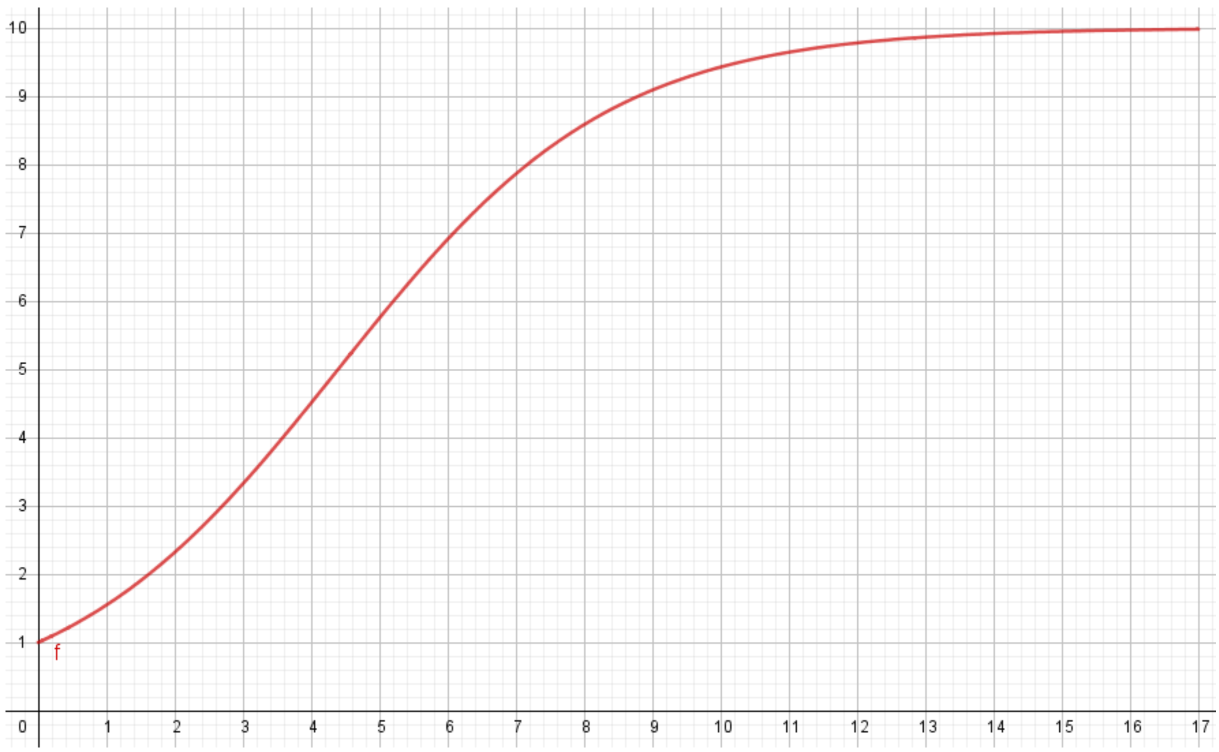
On admet, selon les indications d'experts économistes, que la fonction f qui représente cette évolution vérifie l'équation différentielle $(E)\, y'=\frac{1}{20}y(10-y)$ et on souhaite déterminer $f(x)$.

1. On pose $z=\frac{1}{y}$ où z et y sont deux fonctions. Montrer que y est solution de $(E)\, y'=\frac{1}{20}y(10-y)$ si et seulement si z est solution de $(E')\, z'=-\frac{1}{2}z+\frac{1}{20}$. Pour traiter cette question, on rappelle que si $z=\frac{1}{y}$ alors sa dérivée $z'=-\frac{y'}{y^2}$.

2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E') puis l'ensemble des solutions de (E).

3. A l'aide de la condition initiale $f(0)=1$ déterminer l'expression de la fonction f.

4. On propose ci-dessous la courbe représentative de la fonction f et on demande de déterminer graphiquement, puis par le calcul à partir de quelle année l'équipement en écran plat a dépassé le seuil des 9 millions de foyer selon cette modélisation.

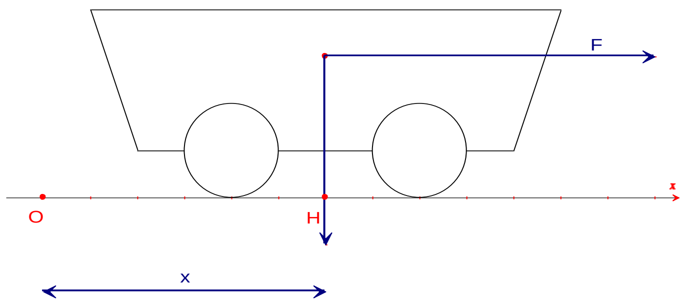


Dans le domaine de la physique et de l'étude du mouvement

Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\vec{F}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire. Le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 N m^{-1} s^{-1}.

La position du chariot est repérée par la distance x en mètres du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0;+\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle $(E) \Leftrightarrow 25x' + 200x'' = 50$ où x' est la dérivée de x par rapport au temps t, x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.

On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t. On rappelle que $v(t) = x'(t)$. Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) suivante $(F) \Leftrightarrow v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$.



Résoudre l'équation différentielle (F). On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a $x(0) = 0$ et $v(0) = 0$. Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$. En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-t/8}$. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

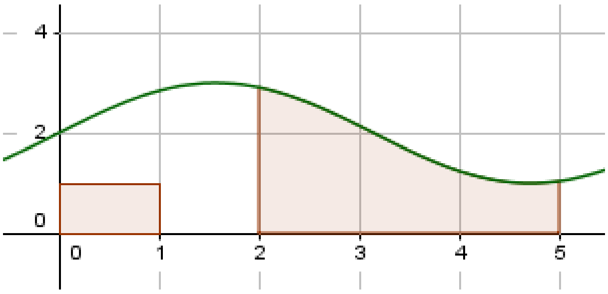
Autre exercice dans le domaine de la physique et de l'étude du mouvement

Une locomotive de 48 tonnes se déplace sur une voie ferrée rectiligne d'origine O. Le moteur de la locomotive génère une force d'entrainement constante E de valeur 36000 kN. Les forces de frottement F sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire et le coefficient de proportionnalité est égal à 240000 N km^{-1} h^{-1}. On note $x(t)$ la distance en kilomètres parcourue par la locomotive en fonction du temps t. Au temps t sa vitesse est $x'(t)$ et son accélération est $x''(t)$. Les lois de Newton conduisent à $(E) \Leftrightarrow 48000 \times x''(t) + 240000 \times x'(t) = 36000000$.

On note $v(t)$ la vitesse au temps t. On rappelle que $v(t) = x'(t)$. Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle $(F) \Leftrightarrow v' = -5v + 750$. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a $x(0) = 0$ et $v(0) = 0$. Déterminer l'expression de $x(t)$ en fonction de t. Etudier les variations de la fonction v sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et déterminer la limite de $v(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Au bout de combien de temps la vitesse de la locomotive dépassera-t-elle 120 km/h. Justifier de manière précise et détaillée la réponse.

Définition

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle I contenant a et b deux nombres tels que $a < b$. La représentation graphique est tracée dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

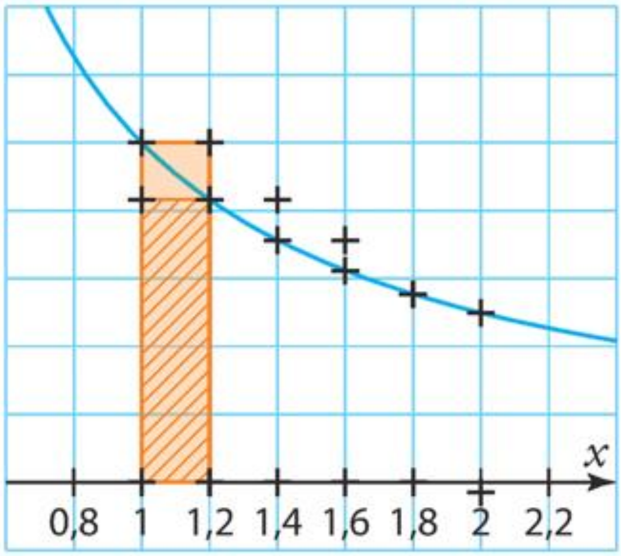


On appelle **intégrale** de f entre a et b l'aire de la surface délimitée par la courbe, l'axe des abscisses, la droite verticale d'équation $x = a$ et la droite verticale d'équation $x = b$. Le rectangle coloré représente **une unité d'aire**. Les nombres a et b sont appelés les **bornes de l'intégrale.** L'intégrale représente **le nombre d'unités d'aires** comprises dans la zone ainsi délimitée.

Cette intégrale est notée $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$

Avec la fonction inverse

On considère la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $I = [1;2]$.

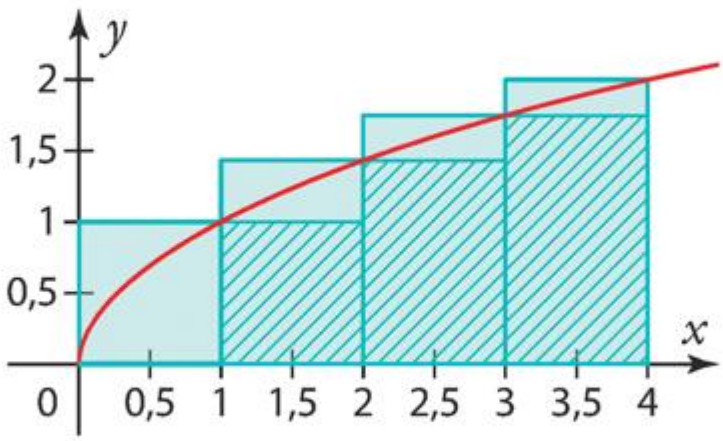


On partage l'intervalle I en 5 sous intervalles de même amplitude et on considère les 5 rectangles situés sous la courbe et les 5 rectangles situés au-dessus de la courbe.

En détaillant de manière méthodique tous les calculs effectués proposer un encadrement de l'intégrale suivante : $\int_1^2 \dfrac{1}{x}\,dx$.

Avec la fonction racine

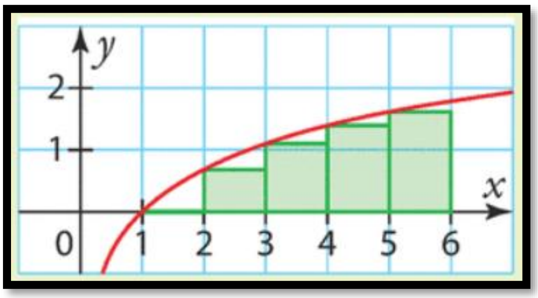
Proposer en détaillant la méthode employée et les calculs effectués un encadrement de l'intégrale suivante $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$.



Affiner l'encadrement de cette intégrale en réduisant la base de chaque rectangle de moitié et en doublant le nombre de rectangles.

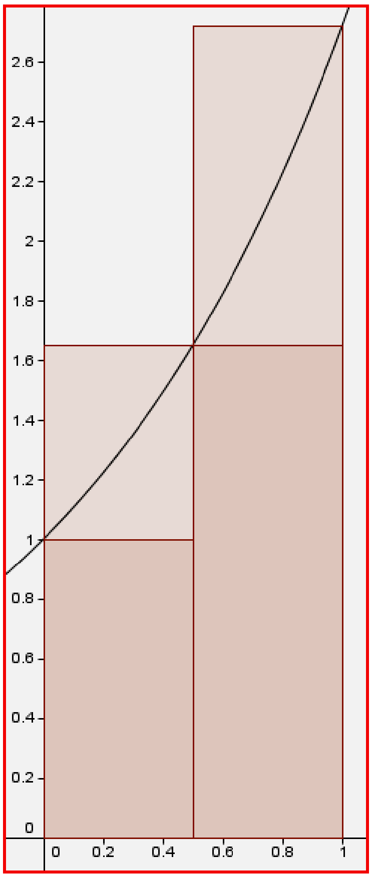
Avec la fonction logarithme

On considère l'intégrale $I = \int_1^6 \ln(x)\,dx$. A l'aide de la méthode des rectangles proposée ci-dessous pour un découpage de l'intervalle $[1;6]$ en cinq sous intervalles égaux, montrer que $\ln(120) < I < \ln(720)$. Quelle est l'amplitude de cet encadrement ?

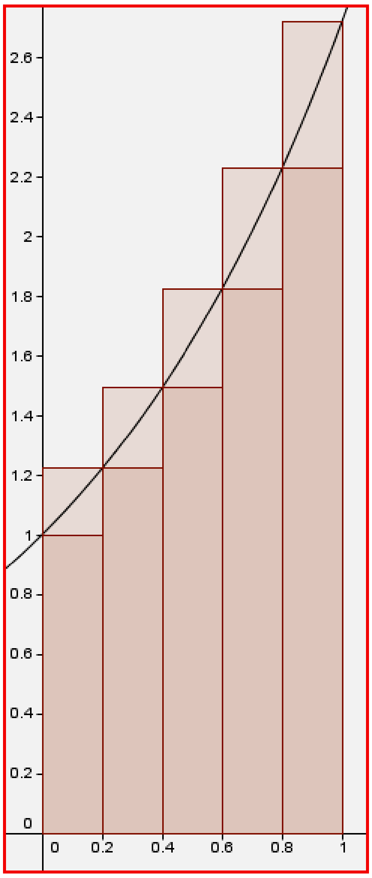


Avec la fonction exponentielle

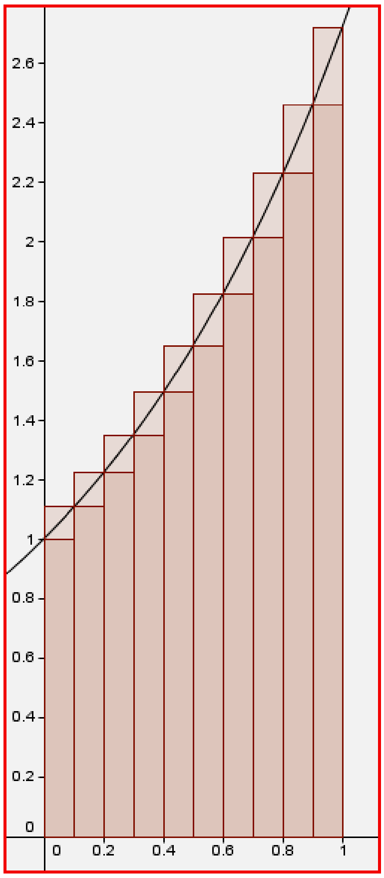
On considère $\int_0^1 e^x dx$ et on s'intéresse aux sommes $s_n = \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $S_n = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.



Calculer s_2 et S_2. Proposer un encadrement de J, dont vous préciserez l'amplitude.



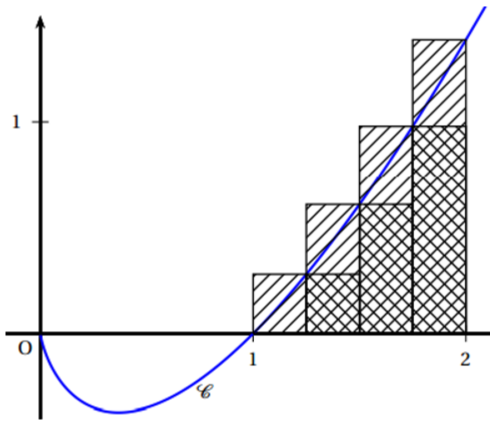
Calculer s_5 et S_5. Proposer un encadrement de J, dont vous préciserez l'amplitude.



Calculer s_{10} et S_{10}. Proposer un encadrement de J, dont vous préciserez l'amplitude.

Un algorithme pour encadrer une intégrale

On propose ci-dessous, un graphique et un algorithme. Déterminer ce que représentent U et V puis proposer une valeur approchée de U et de V. Que peut-on en déduire pour $\int_1^2 x\ln(x)\,dx$?



Variables
k et n sont des entiers naturels
U, V sont des nombres réels
Initialisation
U prend la valeur 0
V prend la valeur 0
n prend la valeur 4
Traitement
Pour k allant de 0 à $n-1$
Affecter à U la valeur $U+\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$
Affecter à V la valeur $V+\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
Fin pour
Affichage
Afficher U
Afficher V

On propose par la suite de considérer les quantités U_n et V_n définies ci-dessous :

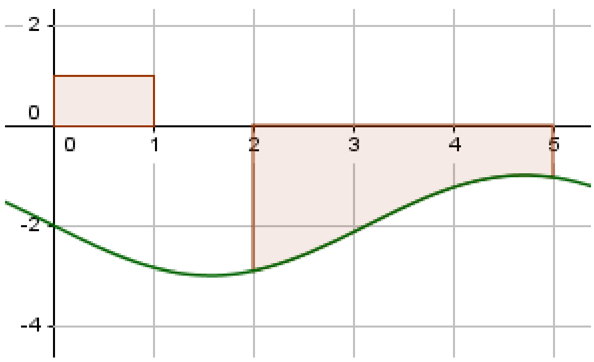
- $U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(f(1)+f\left(1+\frac{1}{n}\right)+f\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right)$,
- $V_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(f\left(1+\frac{1}{n}\right)+f\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)+f(2)\right)$.

Déterminer le plus petit entier n tel que $V_n-U_n<0{,}1$. En déduire, en modifiant légèrement l'algorithme précédent, un encadrement d'amplitude inférieure au dixième de $A=\int_1^2 x\ln(x)\,dx$.

Extension de la définition

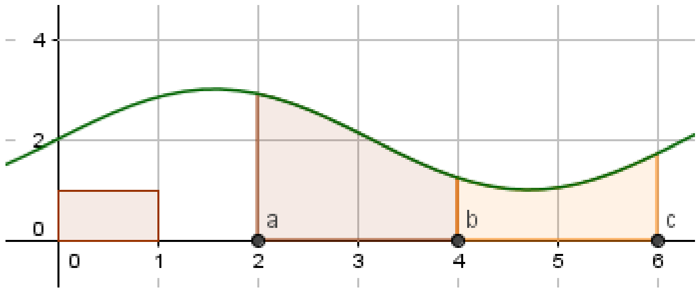
Si la fonction est **continue** et **négative** sur l'intervalle I alors l'intégrale de la fonction f entre a et b (avec $a<b$) est l'opposée de l'aire définie entre l'axe des abscisses, la courbe et les deux droites verticales $x=a$ et $x=b$.

Une aire étant positive, et l'opposé d'un positif étant négatif, nous pouvons affirmer que **l'intégrale d'une fonction négative est négative**.



Si la fonction f **change de signe** sur l'intervalle I, on **découpe** l'intervalle en intervalles sur lesquels elle **garde un signe constant** puis on applique les définitions.

La relation de Chasles



$\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Une évidence

$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

La relation de Chasles

$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Une conséquence

Linéarité de l'intégrale

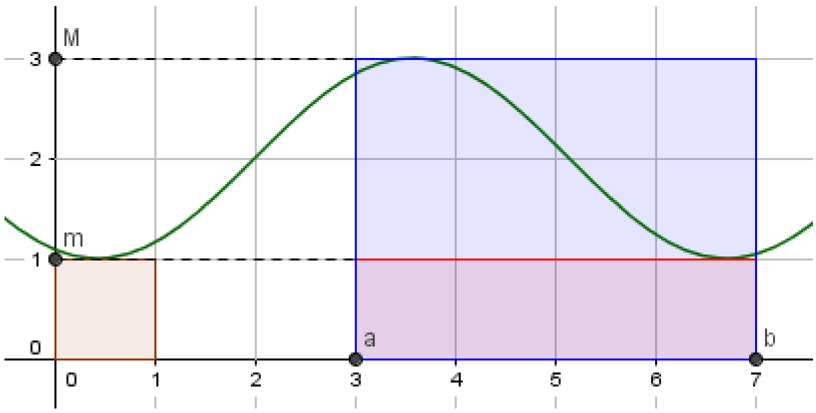
$\int_a^b k \times f(x)\,dx = k \times \int_a^b f(x)\,dx$

Multiplication par une constante

$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Addition de deux fonctions

Inégalités



Si $f(x) \leq g(x)$ **alors**

$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Une évidence

Si $m \leq f(x) \leq M$ **alors**

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

Inégalités de la moyenne

Calcul approché d'une intégrale

La méthode des rectangles, **par encadrement par deux fonctions en escaliers**, permet de calculer une **valeur approchée** de l'intégrale. La **réitération** du procédé avec un **découpage plus fin** de l'intervalle permet de **réduire l'amplitude** de l'encadrement obtenu et ainsi **gagner en précision** quant à la valeur de l'intégrale cherchée.

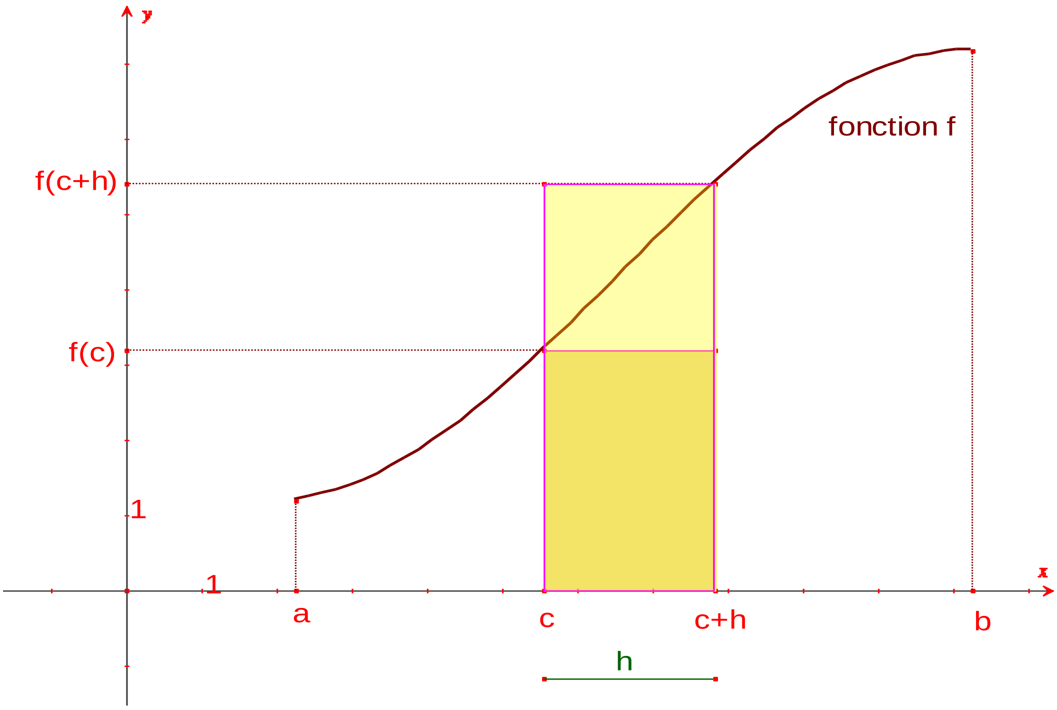
Une fonction construite à l'aide d'une intégrale

Soit f une fonction **continue** sur l'intervalle $[a;b]$.
On suppose ici que la fonction est **croissante** et **positive** sur $[a;b]$.

On considère la fonction F définie pour tout x de l'intervalle $[a;b]$ par $\boxed{F(x)=\int_a^x f(t)\,dt}$.

Le but du travail proposé est de montrer que F est **dérivable** sur $[a;b]$ et que $\boxed{F'(x)=f(x)}$.

Soit $c\in[a;b]$ un réel quelconque de l'intervalle $[a;b]$. On considère la configuration suivante :



1. Montrer que $F(c+h)-F(c)=\int_c^{c+h} f(t)\,dt$. Que représente cette quantité ?

2. En déduire l'encadrement $h\times f(c)\leq F(c+h)-F(c)\leq h\times f(c+h)$. Expliquer.

3. Calculer $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(c+h)-\mathrm{F}(c)}{h}$. Le raisonnement sera clairement détaillé.

4. La fonction F est-elle dérivable en $x=c$? Quel est le nombre dérivé $F'(c)$?

5. Calculer $F(a)$.

Le raisonnement présenté ici pour une fonction positive et croissante pourrait être mené de manière analogue pour une fonction de signe ou de variations différentes. Le résultat obtenu serait identique. Une condition ne peut pas être occultée : la **continuité** de la fonction f .

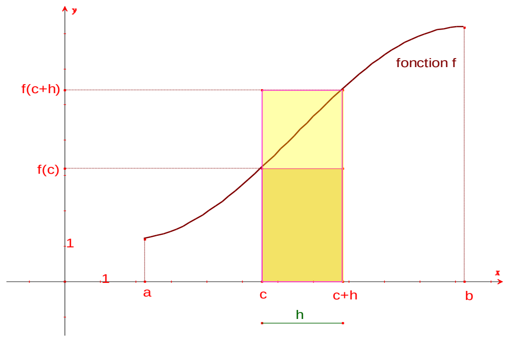
Théorème fondamental

f est une fonction **continue** sur un intervalle I.

Pour tout nombre réel $a \in I$, la fonction F définie par :

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$

est **l'unique primitive** de f s'annulant en $x = a$



Conséquence

Si G est une **primitive quelconque** de f sur l'intervalle I, si a et b sont deux réels de l'intervalle I, alors :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)}$$

Démonstration

F est la primitive qui s'annule en $x = a$. G est une primitive quelconque. On peut donc écrire $G(x) = F(x) + k$. Calculer la quantité $G(b) - G(a)$ et montrer qu'elle est égale à $\int_a^b f(t)\,dt$.

Notation

$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$ s'écrit aussi sous la forme $\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \left[G(x)\right]_a^b}$.

Cette notation se lit « une **primitive** de f **prise entre les bornes** a et b ».

Calculs d'intégrales

Ainsi le **calcul d'une intégrale** se réduit au **calcul d'une primitive** dont on calculera la valeur **en deux endroits** pour enfin les **soustraire**. Effectuer le calcul des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 x^2 dx \qquad B = \int_0^1 e^x dx \qquad C = \int_1^2 \frac{1}{x} dx \qquad D = \int_1^2 \ln(x)\,dx$$

Indication pour le calcul de D : on pourra dériver la fonction définie par $g(x) = x \times \ln(x) - x$.

Même consigne pour les dix intégrales suivantes :

$$\int_1^3 x^3 dx \qquad \int_0^1 e^{3x+1} dx \qquad \int_0^1 e^{1-2x} dx \qquad \int_0^1 2xe^{x^2} dx \qquad \int_1^2 xe^{-x^2} dx$$

$$\int_2^3 \frac{3x^2-1}{x^3-x} dx \qquad \int_1^e \frac{x}{1+x^2} dx \qquad \int_2^3 \frac{x^3}{x^4+1} dx \qquad \int_5^{15} \frac{3}{x-4} dx \qquad \int_0^{\ln(3)} \frac{e^x}{e^x+2} dx$$

Théorème d'intégration par parties

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur $[a;b]$ qui admettent des dérivées u' et v' continues alors on a l'égalité suivante : $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$.

Démonstration :

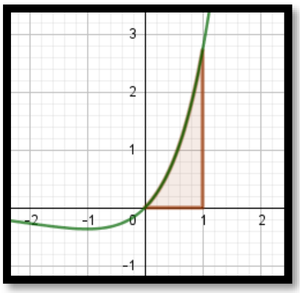
$$\int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b (u(x)v'(x) + u'(x)v(x))dx$$

Or nous savons que $(u(x)\times v(x))' = u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x)$.

Donc nous en déduisons que $u(x)\times v(x)$ est une primitive de $u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x)$.

Par conséquent $\int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)\times v(x)]_a^b$ et la formule est démontrée.

Application directe n°1



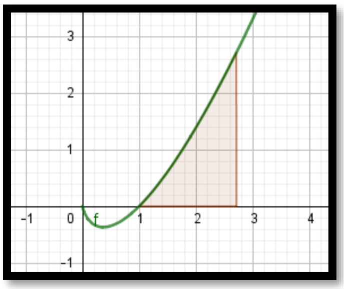
On cherche à déterminer $I = \int_0^1 x \times e^x dx$

On suggère une intégration par parties en posant :

$u(x) = x \quad v'(x) = e^x$

$u'(x) = 1 \quad v(x) = e^x$

Application directe n°2



On cherche à déterminer $J = \int_1^e x \times \ln(x) dx$

On suggère une intégration par parties en posant :

$u(x) = \ln(x) \quad v'(x) = x$

$u'(x) = \dfrac{1}{x} \quad v(x) = \dfrac{x^2}{2}$

Exercices d'entrainement

On cherche à déterminer l'intégrale $K = \int_0^1 x^2 \times e^x dx$. A l'aide d'une intégration par parties que vous expliciterez et du résultat obtenu pour I, déterminer la valeur exacte de l'intégrale K.

On cherche à déterminer l'intégrale $L = \int_1^e x^2 \times \ln(x) dx$. A l'aide d'une intégration par parties que vous expliciterez, déterminer la valeur exacte de l'intégrale L.

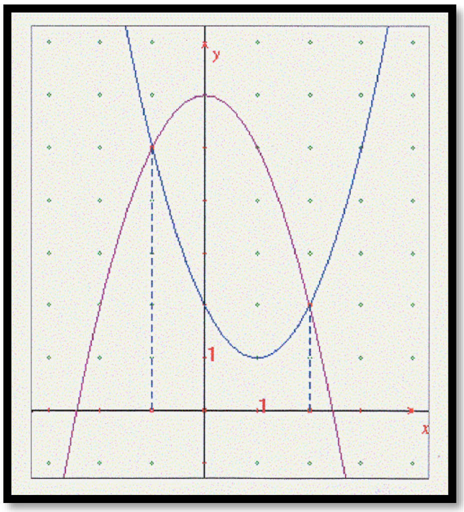
On cherche à déterminer l'intégrale $M = \int_1^e \dfrac{\ln(x)}{x} dx$ à l'aide d'une intégration par parties. On cherche également à déterminer l'intégrale $N = \int_1^e \dfrac{\ln(x)}{x^2} dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

Surface délimitée par deux courbes

On considère deux fonctions continues f et g telles que $f(x) \leq g(x)$ sur l'intervalle $[a;b]$.

L'intégrale $A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$ représente l'aire, mesurée en unités d'aires de la surface comprise entre :

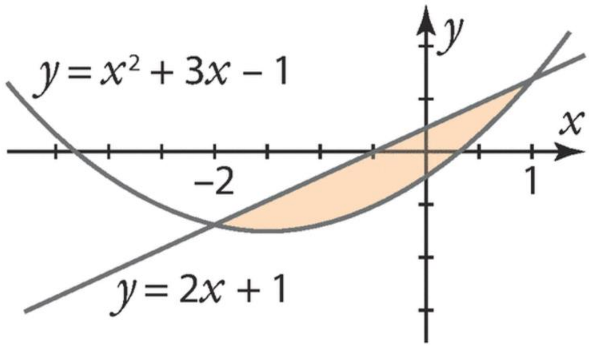
- La courbe représentative de f,
- La courbe représentative de g,
- Les deux droites $x = a$ et $x = b$.



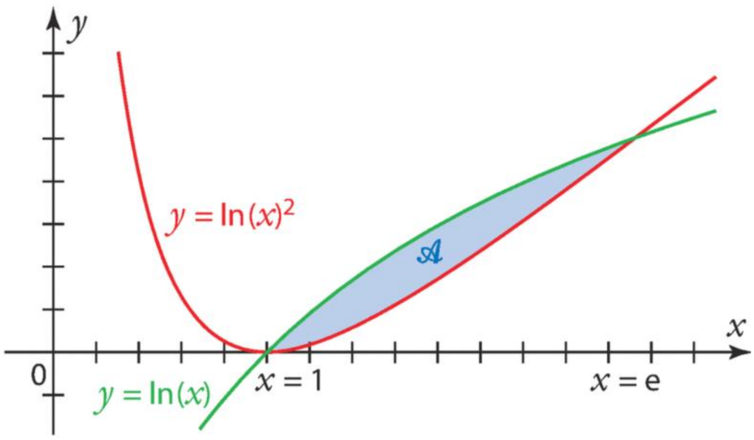
Exemple : on a représenté ci-dessus les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 2x + 2$ et $g(x) = -x^2 + 6$. Déterminer l'aire comprise entre les deux courbes sur l'intervalle $[-1;2]$.

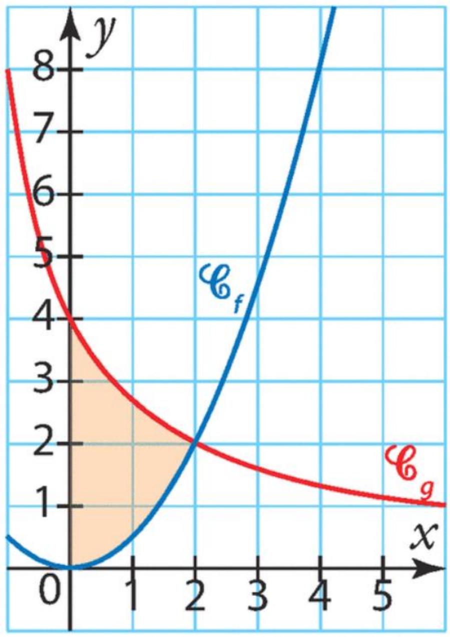
Exercices d'application directe

Calculer, en faisant apparaitre le détail des calculs et du raisonnement, l'aire des surfaces colorées proposées ci-contre et ci-dessous.



Pour la situation proposée ci-dessous on pourra procéder par intégration par parties et se souvenir que la fonction $x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction de référence $\ln(x)$.



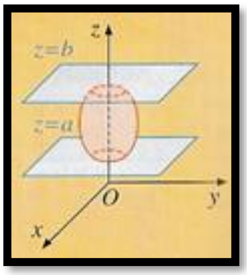


Pour la situation proposée ci-contre dans laquelle sont représentées les courbes C_f et C_g on travaillera avec les fonctions définies par $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ et $g(x) = \dfrac{8}{x+2}$.

Une propriété admise

Soit $S(z)$ l'aire de la section d'un solide par un plan parallèle au plan $(x0y)$, de côte z telle que $a \leq z \leq b$. On admettra dans cette activité que le volume du solide est donné par le calcul suivant :

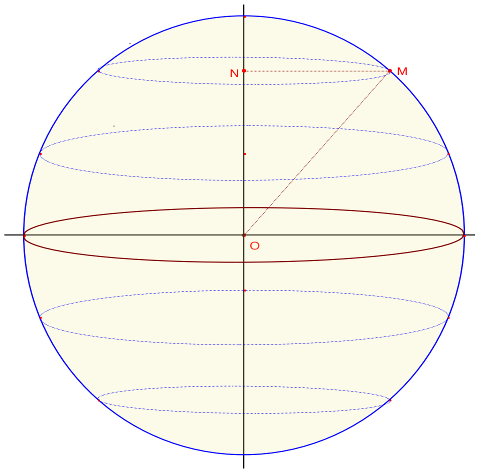
$$\boxed{V = \int_a^b S(z)dz}$$



Volume d'une sphère

Le but du travail ci-dessous est de retrouver le volume de la sphère de centre O et de rayon R.

Pour tout z tel que $-R \leq z \leq R$ on pose $z = ON$ et on considère le disque, section de la sphère par un plan horizontal de hauteur z.

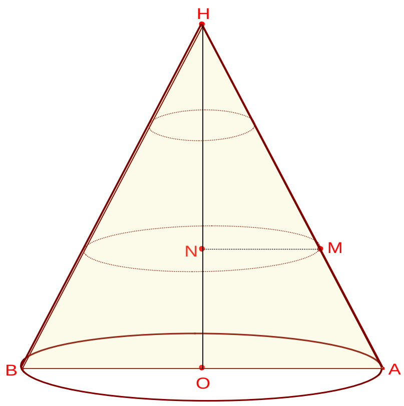


1. Exprimer la longueur MN rayon du disque en fonction de R et z.
2. En déduire l'aire $S(z)$ de la surface du disque.
3. Ecrire le volume de la sphère sous la forme d'une intégrale dont vous calculerez la valeur.

Volume d'un cône de révolution

Le but du travail ci-dessous est de retrouver le volume du cône de révolution de hauteur h et de base un disque de rayon R.

Pour tout z tel que $0 \leq z \leq h$ on pose $z = ON$ et on considère le disque, section du cône par un plan horizontal de hauteur z.

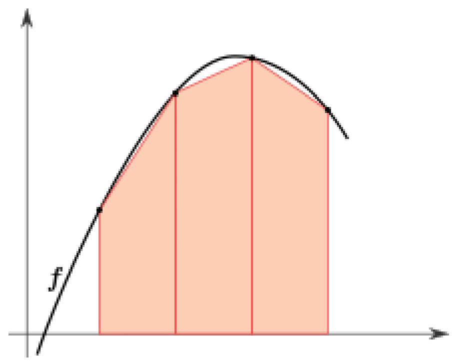


1. Justifier l'égalité $\dfrac{HN}{HO} = \dfrac{MN}{OA}$.
2. Exprimer alors la longueur MN en fonction de R, h et z.
3. En déduire l'aire $S(z)$ de la surface du disque.
4. Ecrire le volume du cône sous la forme d'une intégrale dont vous calculerez la valeur.

La méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à approximer la fonction par des segments comme le montre la figure ci-contre. On parle alors de fonction affine par morceaux.

La formule de l'aire d'un trapèze, appliquée à plusieurs reprises sur un intervalle donné, permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire sous la courbe sur cet intervalle.



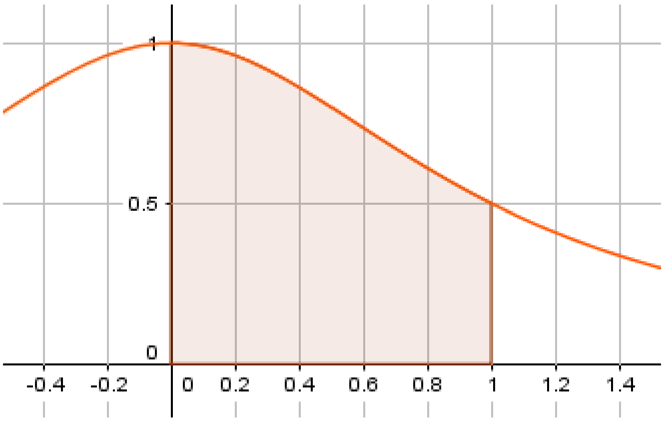
Application 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. On procédera dans un premier temps à une analyse complète de la fonction f sur son intervalle de définition en déterminant les limites aux bornes, en étudiant les variations de la fonction, en précisant l'extremum local.

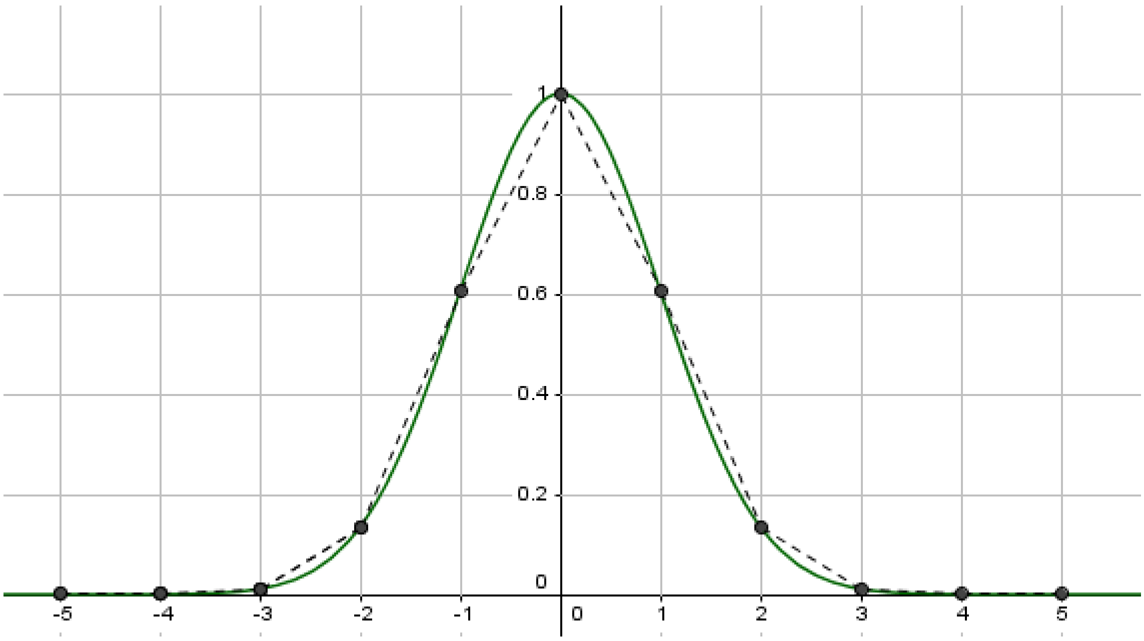
On souhaite proposer une valeur approchée de $C=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ à l'aide de la méthode des trapèzes. On considère :

$$U_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\times\frac{\left(f\left(\frac{k}{n}\right)+k\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)}{2}$$

Que permet de calculer le terme U_5 ?



Application 2



On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$. On procédera dans un premier temps à une analyse complète de la fonction g sur son intervalle de définition en déterminant les limites aux bornes, en étudiant les variations de la fonction, en précisant l'extremum local, en dressant le tableau de signe et en précisant la parité de la fonction.

On souhaite proposer une valeur approchée de $B=\int_{-5}^{5} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ à l'aide de la méthode des trapèzes.

On découpe pour cela l'intervalle $[0;5]$ en cinq intervalles d'amplitude 1 comme l'indique la figure proposée ci-dessus, on calcule et on somme l'aire des cinq trapèzes ainsi définis pour obtenir une valeur approchée de la moitié de B puis une valeur approchée de B en multipliant ce résultat par 2. Déterminer une valeur approchée de B en suivant la méthode décrite.

Des intégrales et des suites

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :
pour tout entier naturel n, $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}+u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
   b) En déduire la valeur exacte de u_1.
3. a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Aide :

pour traiter la question 2a
on utilisera le fait que :
$x^{n+1}+x^n = x^n(x+1)$

Variables :	i et n sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur ...
Traitement :	Pour i variant de 1 à ...
	|Affecter à u la valeur ...
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

   b) À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,6931	0,3069	0,1931	0,1402	0,1098	0,0902	0,0475	0,0099	0,0050

   Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?
4. a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $\ell = 0$.

Des intégrales et des suites bis

Partie I

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^x$$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.
On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** On désigne par F_1 la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$F_1(x) = (x-1)\mathrm{e}^x.$$

   Vérifier que F_1 est une primitive de la fonction f_1.

   b. Calculer I_1.

2. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout n supérieur ou égal à 1 ,

$$I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n.$$

3. Calculer I_2.

4. On considère la fonction mystere écrite dans le langage Python :

```
from math import e # la constante d'Euler e

def mystere(n):
  a = 1
  L = [a]
  for i in range(1,n):
    a = e - (i + 1)*a
    L.append(a)
  return L
```

   À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel mystere(5).

Partie II

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}$ et C_{30}.

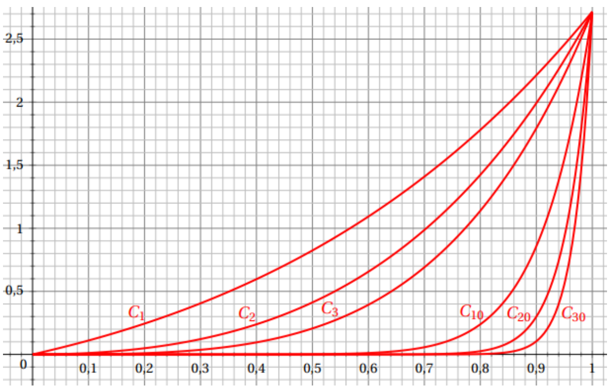
   a. Donner une interprétation graphique de I_n.

   b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x.$$

3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.



Des intégrales et des suites ter

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x + \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Justifier que $\mathscr{C}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0\,;1)$.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1. On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right) \mathrm{d}x.$$

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{-nx}.$$

   Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathscr{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = 1$.

   a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.

   b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^{x}\right) \mathrm{d}x.$$

   En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).