Détermination d'une primitive d'une fonction

Déterminer une primitive d'une fonction

- Une **primitive** d'une fonction f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
- Résoudre sur I l'**équation différentielle** $y' = f$, c'est trouver toutes les primitives F de f sur I.
- Quels que soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.
- Toutes les primitives de f sur I sont les fonctions F définies sur I par $F(x) = G(x) + C$, où C est une constante réelle et G une primitive donnée de f sur I.
- Soient F et G deux primitives respectives de f et de g.
  $F + G$ est une primitive de $f + g$ et kF est une primitive de kf (k réel donné).

Calculer une primitive d'une fonction

Fonction $f : x \mapsto \ldots$	Une primitive $F : x \mapsto \ldots$
a (constante réelle)	ax
x^n ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ et $n \neq -1$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
e^x	e^x

Fonction f de la forme…	Une primitive F :
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert)$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u
$(v' \circ u) \times u'$	$v \circ u$

Résolution d'une équation différentielle

Résoudre $y' = ay$

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (a réel) sont les fonctions :
$$x \mapsto Ce^{ax}$$
où C est une constante réelle.

Résoudre $y' = ay + b$

- L'unique solution particulière constante de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$ et b réel) est la fonction $x \mapsto -\dfrac{b}{a}$.
- Les solutions de l'équation sont les fonctions :
$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$
où C est une constante réelle.

Résoudre $y' = ay + f$

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ (a réel et f une fonction) sont les fonctions :
$$x \mapsto Ce^{ax} + g(x)$$
où C est une constante réelle et g une solution particulière de l'équation différentielle.

Le calcul intégral

Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive

Soient f une fonction continue sur I et a et b deux réels appartenant à I :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur I.

Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I et soient a et b deux réels appartenant à I.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$$

Calculer une intégrale à l'aide de propriétés

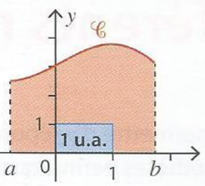
Soient f une fonction continue sur I ; a, b et c trois réels appartenant à I et λ un réel.

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
- **Relation de Chasles :**
$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$
- **Linéarité :**
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$$
- **Positivité :**
si $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.
- **Ordre :**
si $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.
- Si f est paire, alors $\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$.
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^0 f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx$.

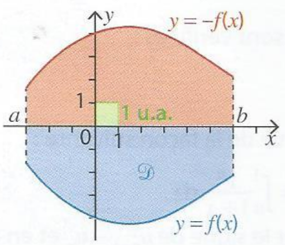
Le calcul des aires

Calculer des aires

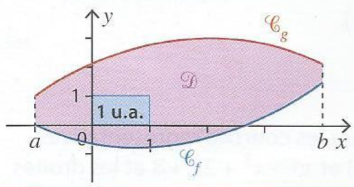
- **f continue et positive sur $[a\,;b]$.**
L'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b f(x)\,dx$.



- **f continue et négative $[a\,;b]$.**
L'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b (-f(x))\,dx$.



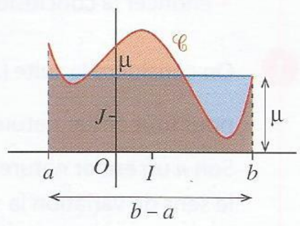
- **$g \geqslant f$ sur $[a\,;b]$.**
L'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :
$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx.$$



Calculer la valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ $(a < b)$.
On appelle **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$ le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$



Si $f \geqslant 0$, l'aire du rectangle bleu est égale à $\mu(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$.