Des probabilités sous condition

Une dame nourrit son chat Gédéon avec des aliments en boîte.

Chaque jour elle choisit une boîte au hasard parmi les trois variétés : volaille, bœuf ou lapin.

Cette dame a remarqué que :

- Si on lui sert de la volaille, Gédéon finit toujours sa gamelle.
- Si on lui sert du bœuf, Gédéon finit sa gamelle une fois sur deux.
- Si on lui sert du lapin, Gédéon finit sa gamelle une fois sur trois seulement.

Calculer la probabilité pour que, un jour donné, Gédéon finisse sa gamelle.

Aujourd'hui, Gédéon a fini sa gamelle. Calculer la probabilité pour qu'il ait mangé du lapin.

1	volaille	finit
2	boeuf	finit
3	lapin	finit
2	boeuf	ne finit pas
3	lapin	ne finit pas
2	boeuf	finit
3	lapin	finit
3	lapin	finit
2	boeuf	finit
1	volaille	finit
3	lapin	ne finit pas
2	boeuf	finit
3	lapin	finit
2	boeuf	finit
2	boeuf	ne finit pas
2	boeuf	ne finit pas
1	volaille	finit
3	lapin	ne finit pas
2	boeuf	ne finit pas
1	volaille	finit
2	boeuf	ne finit pas
2	boeuf	finit
3	lapin	ne finit pas
1	volaille	finit
1	volaille	finit

Test anti-dopage

Une agence de lutte contre le dopage a mis au point un test pour détecter un nouveau produit dopant. On estime que :

- 2% des sportifs utilisent ce produit dopant,
- Si un sportif a ingéré ce produit, le test est positif dans 99% des cas,
- Si un sportif n'a pas ingéré ce produit, le test est positif dans 1,5% des cas.

1. Un sportif est testé positif. Peut-on prendre le risque de dire qu'il s'est dopé ?
2. Un sportif est testé négatif. Peut-on prendre le risque de dire qu'il ne s'est pas dopé ?

Logiciel anti-virus

Chaque jour, 3% des mails reçus par Benjamin sont indésirables. Parmi les mails indésirables seulement 95% sont supprimés par son logiciel anti-virus. Parmi les mails qui ne sont pas indésirables l'antivirus en supprime 2% par erreur. On note : I l'événement : « le mail reçu est indésirable », S l'événement : « le mail reçu est supprimé ».

1. Un mail vient d'être supprimé par l'anti-virus : est-on sûr que c'était un mail indésirable ?
2. Un mail n'a pas été supprimé par l'anti-virus : prend-on un risque en l'ouvrant ?

Allergies et antécédents familiaux

On étudie une certaine allergie et son lien éventuel avec un antécédent familial (parent ou grand parent souffrant de la même allergie). On prélève au hasard une personne dans la population étudiée. On note A l'événement : « la personne est allergique » et F l'événement : « la personne présente un antécédent familial ». On suppose que :

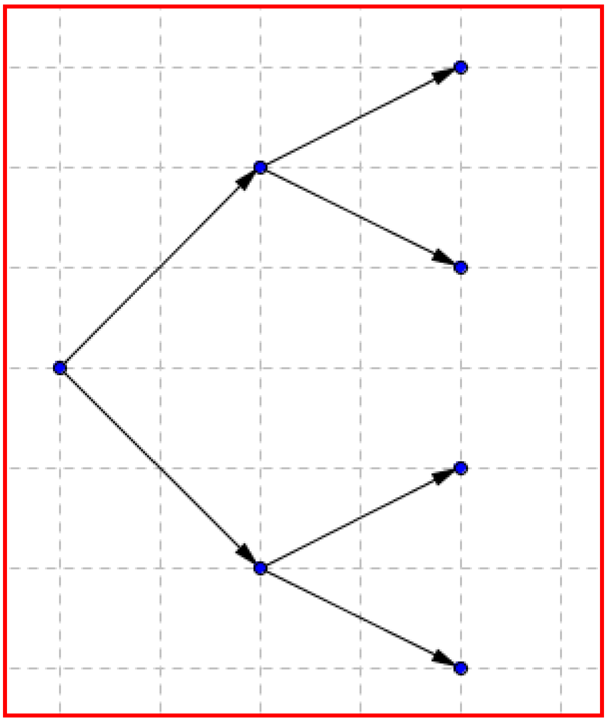
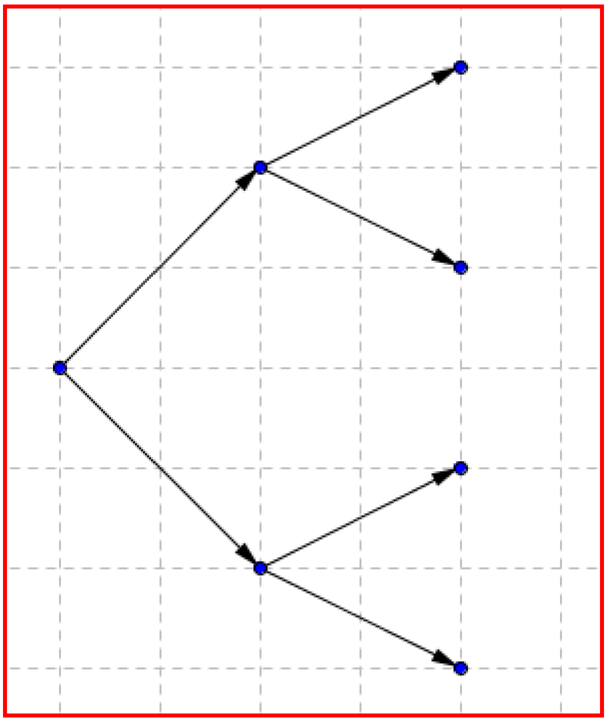
- 10% de la population présente une allergie,
- Parmi les personnes allergiques, 70% ont un antécédent familial,
- Parmi les personnes non allergiques, seulement 2% ont un antécédent familial.

On s'intéresse à la probabilité $p(F)$ qu'un individu de cette population ait un antécédent familial. On s'intéresse à la probabilité $p_F(A)$ qu'un individu de cette population soit allergique, sachant qu'il a un antécédent familial. Sauriez-vous déterminer $\dfrac{p_F(A)}{p_{\overline{F}}(A)}$? Interpréter ce résultat…

Test de dépistage

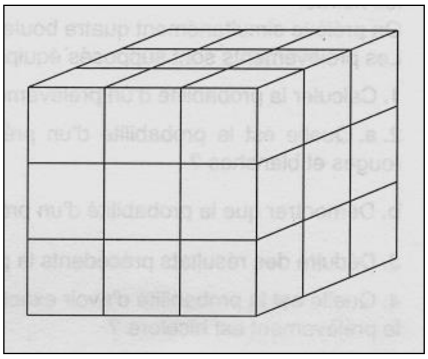
Dans un pays, 2% de la population est contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes : dans 99% des cas une personne contaminée a un test positif (il s'agit de la sensibilité du test), dans 97% des cas une personne non contaminée a un test négatif (il s'agit de la spécificité du test). Une revue scientifique affirme que « dans ces conditions, si le test effectué sur une personne quelconque est positif, il n'y a environ que 40% de chances que la personne soit contaminée ». Que pensez-vous de cette affirmation ? Qu'en est-il de la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée sachant que son test est négatif ?

Deux arbres pour s'organiser

Variable aléatoire avec un cube

On dispose d'un cube en bois de 3 cm d'arête peint en bleu. On le découpe, parallèlement aux faces, en 27 cubes de 1 cm d'arête. On place ces 27 cubes dans un sac. On tire au hasard l'un des 27 cubes du sac.



On suppose que les tirages sont équiprobables.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de faces peintes sur le cube tiré.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Variable aléatoire avec une roulette

On considère une roulette que l'on fait tourner. Lorsqu'elle s'arrête on peut considérer que la flèche s'immobilise au hasard sur l'un des quinze numéros. On suppose que les quinze secteurs angulaires sont égaux. On notera Y la variable aléatoire représentant le gain du joueur. Les règles du jeu sont les suivantes :

- On mise 2€ sur un numéro (la mise est automatiquement perdue),
- Si le numéro misé sort, on gagne 20€, si l'un des numéros voisins sort, on gagne 3€,
- Sinon on ne gagne rien.

1. Déterminer les différentes valeurs prises par la variable aléatoire Y.

2. Etablir dans un tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

3. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire ? A quoi correspond cette valeur ?

Variable aléatoire avec des boules

Une urne contient 2 boules vertes, 5 boules blanches et 8 boules rouges. Après avoir misé, un joueur tire au hasard une boule de l'urne. La mise est un nombre réel noté m.

Les règles du jeu sont les suivantes :

- Si la boule est verte il reçoit 16€,
- Si elle est blanche il récupère sa mise,
- Si elle est rouge il perd sa mise.

On appelle Z la variable aléatoire représentant le gain du joueur à l'issue de la partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de Z.

2. Déterminer la mise m pour que le jeu soit équitable.

Variable aléatoire avec une loterie

Lors d'une loterie, un joueur mise 1 euro. S'il gagne la partie, il reçoit 5 euros. S'il perd la partie, il ne reçoit rien. La probabilité que le joueur gagne la partie est $\frac{7}{30}$. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter.
3. Ce jeu est-il favorable ou défavorable au joueur ? Justifier.

Variable aléatoire avec deux dés

Un joueur mise m euros et lance deux dés équilibrés. Si la somme des deux nombres est égale à 7, il gagne 15 euros, sinon, il ne gagne rien. On appelle Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue de la partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de Y.
2. Quand peut-on dire qu'un jeu d'argent est équitable ?
3. Déterminer la valeur de la mise pour que ce jeu d'argent soit équitable.

Variable aléatoire avec une roulette

On considère une roulette que l'on fait tourner. Lorsqu'elle s'arrête on peut considérer que la flèche s'immobilise au hasard sur l'un des quinze numéros. On suppose que les quinze secteurs angulaires sont égaux. On notera Z la variable aléatoire représentant le gain du joueur. Les règles du jeu sont les suivantes :

- On mise 2€ sur un numéro (la mise est automatiquement perdue),
- Si le numéro misé sort, on gagne 20€, si l'un des numéros voisins sort, on gagne 3€,
- Sinon on ne gagne rien.

Déterminer les différentes valeurs prises par la variable aléatoire Z. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z. Le jeu est-il favorable ou défavorable au joueur ? Justifier.

Variable aléatoire avec un jeu électronique

Un jeu de hasard électronique est composé d'une cible (voir ci-contre) et d'un dispositif allumant de manière aléatoire une des cases.

B	B	B	B	B	B
B	J	V	V	J	B
B	J	R	R	J	B
B	J	V	V	J	B
B	B	B	B	B	B

La mise pour une partie est de m euros. Chaque case a la même probabilité de s'allumer.

- Si une case rouge s'allume, le joueur gagne 16€,
- Si une case verte s'allume, le joueur gagne 7€,
- Si une case jaune s'allume, le joueur ne gagne rien,
- Si une case bleue s'allume, le joueur perd 2€.

On note G la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur. Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire. Déterminer la valeur de m pour que le jeu soit équitable.

Produit des faces de deux dés

Un joueur mise 4 euros (la mise est immédiatement perdue) et lance deux dés équilibrés.

- Si le **produit des deux nombres est impair**, il gagne 36 euros,
- Sinon, il ne gagne rien.

On appelle Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue de la partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de Y.
2. Calculer l'espérance de Y.
3. Le jeu est-il équitable ?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
2	*2*	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*
3	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*
4	*4*	*8*	*12*	*16*	*20*	*24*
5	*5*	*10*	*15*	*20*	*25*	*30*
6	*6*	*12*	*18*	*24*	*30*	*36*

Somme des faces de deux dés

Un joueur mise 6 euros (la mise est immédiatement perdue) et lance deux dés équilibrés.

- Si la **somme des deux nombres est égale à 7**, il gagne 30 euros,
- Sinon, il ne gagne rien.

On appelle Z la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue de la partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de Z.
2. Calculer l'espérance de Z.
3. Le jeu est-il équitable ?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
2	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
3	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
4	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
5	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
6	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*

Contrôle qualité

Une entreprise fabrique des casques audio. Dans sa production, 5% d'entre eux ne sont pas conformes (ils ont un défaut). Le contrôle de production mis en place rejette 96% des casques défaillants et malheureusement rejette aussi 7% des casques qui n'ont pas de défaut.

1. Quelle est la probabilité qu'un casque, choisi au hasard dans cette production, ne soit pas conforme et ne soit pas rejeté par le contrôle ?
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
3. Quelle est la probabilité qu'un casque pris au hasard ne soit pas rejeté ?

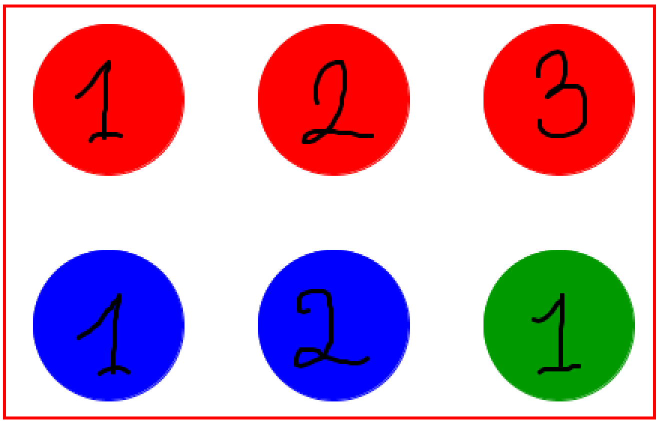
Un second contrôle est réalisé, indépendamment du premier. La probabilité qu'un casque de cette entreprise ne soit pas rejeté après ce deuxième contrôle est égale à 0,94. Un casque subit les deux contrôles : l'entreprise réalise un bénéfice de 89 euros s'il n'est rejeté par aucun contrôle, elle perd 40 euros s'il est rejeté par les deux contrôles, elle réalise un bénéfice de 29 euros sinon. On appelle B la variable aléatoire égale au bénéfice exprimé en euros. Déterminer l'espérance de B.

Définition

Les deux événements A et B sont **indépendants** lorsque $\boxed{p_A(B)=p(B)}$ ou $\boxed{p_B(A)=p(A)}$.

Dépendance, indépendance

On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant les six jetons représentés ci-contre. On considère trois événements :



- R = « le jeton est Rouge »,
- U = « le numéro est Un »,
- D = « le numéro est Deux ».

Les événements R et U sont-ils indépendants ? Les événements R et D sont-ils indépendants ?

Commentaire

Si l'indépendance de deux événements repose par définition sur un calcul de probabilités et n'est pas toujours prévisible, on peut dans l'exemple proposé au, départ « pressentir l'indépendance de R et D. En effet, en remarquant que la proportion des « 2 » dans l'ensemble des « rouges » est la même que celle des « 2 » dans l'ensemble des six boules, on s'attend à ce que la réalisation de « rouge » n'influence pas la probabilité d'obtenir un « 2 » et donc que les événements R et D soient indépendants. De manière analogue, la proportion des « 1 » dans l'ensemble des « rouges » étant différente de celle des « 1 » dans l'ensemble des six boules, on peut prévoir la non indépendance des événements R et U.

Sport et langue

On donne ci-contre la répartition de 150 étudiants selon la langue étudiée et l'activité sportive choisie.

	Tennis	**Equitation**	**Voile**
Anglais	45	18	27
Allemand	33	9	18

Les événements A = « étudier l'anglais » et T = « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ? Les événements D = « étudier l'allemand » et V = « pratiquer la voile » sont-ils indépendants ?

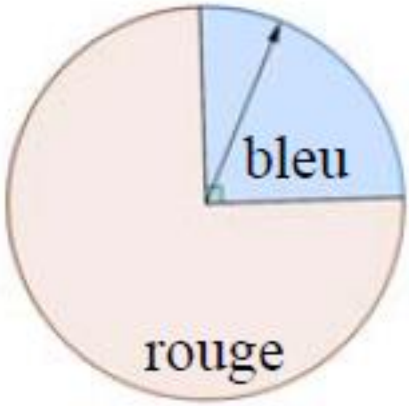
Jeu de cartes

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On envisage les événements suivants : A = « La carte est rouge », B = « La carte est un cœur » et C = « La carte est un roi ». Les événements A et B sont-ils indépendants ? Les événements B et C sont-ils indépendants ? Les événements A et C sont-ils indépendants ?

Propriété

Les deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si $\boxed{p(A\cap B)=p(A)\times p(B)}$.
Sauriez-vous démontrer cette propriété ?

Approche de la loi binomiale



On fait tourner la roue de loterie présentée ci-contre : on obtient la couleur « rouge » avec la probabilité 0,75 et la couleur « bleu » avec la probabilité 0,25. Le joueur est gagnant lorsque la flèche s'arrête sur la zone bleue comme sur la figure ci-contre.

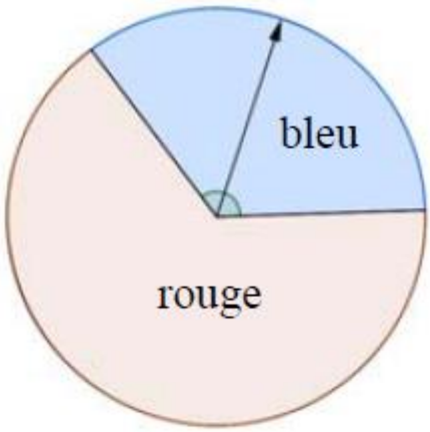
On décide de noter S (comme succès) cette éventualité et de noter E (comme échec) l'éventualité contraire c'est-à-dire « la flèche tombe sur la zone rouge ».

Déterminer la **loi de probabilité** de la **variable aléatoire** X qui compte le **nombre de succès** obtenus lorsque l'on fait tourner **de manière indépendante** 4 roues **identiques** à celle proposée ci-dessus. Déterminer **l'espérance mathématique** de cette variable aléatoire.

Vocabulaire

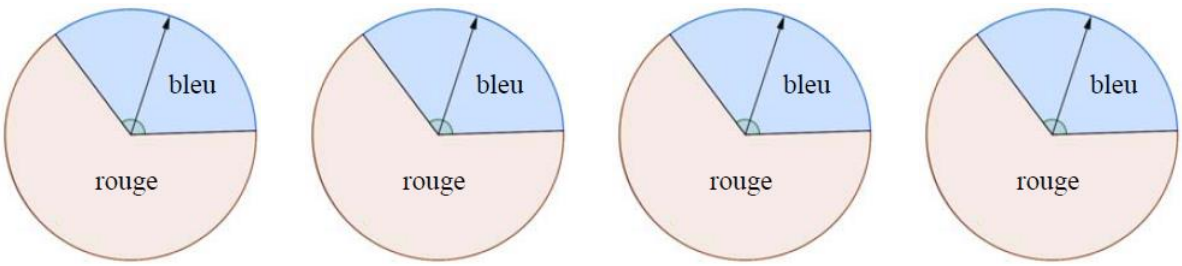
Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui ne comporte que **deux issues possibles** appelées « succès » noté S ou « échec » noté $E = \overline{S}$ de probabilités respectives p et $q = 1 - p$. Un **schéma de Bernoulli** est la **répétition** d'épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes** (c'est-à-dire que l'issue d'une épreuve **ne dépend pas** des épreuves précédentes).

Etude d'un schéma de Bernouilli – Cas n=4

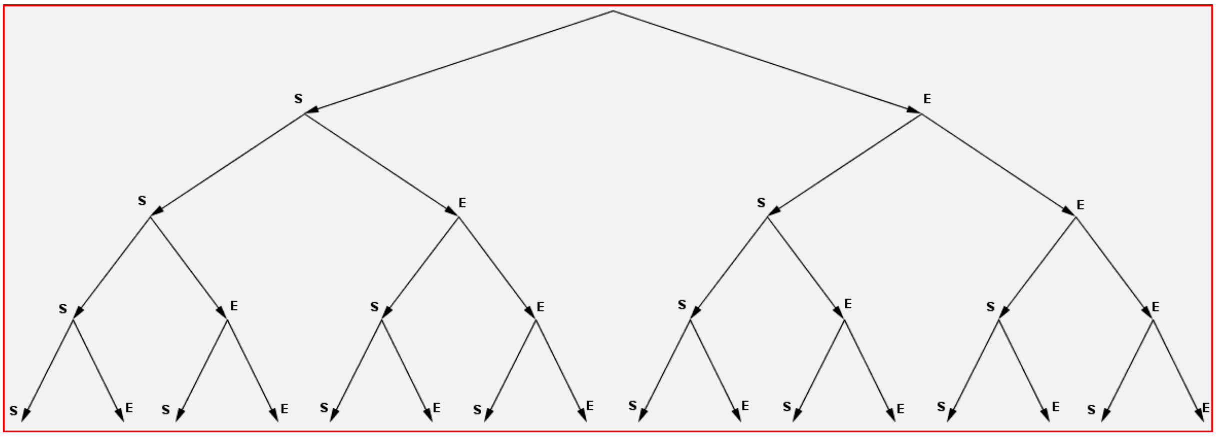


On fait maintenant tourner la roue de loterie présentée ci-contre : on obtient la couleur « Bleu » avec une probabilité qui dépend de l'angle indiqué sur la figure et qui est notée p.

On décide de noter S (comme succès) l'éventualité « la flèche tombe sur la zone bleue » et de noter E (comme échec) l'éventualité contraire c'est-à-dire « la flèche tombe sur la zone rouge ».



En faisant tourner ces quatre roues on se place dans le cadre d'un schéma de Bernoulli puisque l'on répète 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On dira que ce schéma de Bernoulli a pour paramètres n et p. Sauriez-vous préciser à quoi correspond le paramètre n ?



On considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenus à l'issue des 4 répétitions. A l'aide du schéma de Bernouilli présenté ci-dessus répondre aux questions :

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X en fonction de p et $q=1-p$.

2. La loi de probabilité ainsi construite présente cinq coefficients. A quoi correspondent-ils ?

3. Vérifier que $\sum_{k=0}^{4} p(X=k)=1$. On pourra pour cela utiliser le fait que $q=1-p$.

4. A quoi correspond la quantité $\sum_{k=0}^{4} k\times p(X=k)$? Montrer que $\sum_{k=0}^{4} k\times p(X=k)=4p$.

5. A quoi correspond la quantité $E(X^2)-E(X)^2$? Montrer que $E(X^2)-E(X)^2=4pq$.

Définition

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Un schéma de Bernoulli associé à n répétitions indépendantes de cette épreuve peut être représenté par un arbre pondéré qui comporte n générations. Par définition, la loi binomiale de paramètres n et p, notée $B(n,p)$ est la loi de la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès au cours des n répétitions.

Quelques cas particuliers

Calcul de $p(X=0)$ et de $p(X=n)$:

- L'événement $\{X=0\}$ est réalisé sur l'unique chemin de l'arbre qui ne comporte que des échecs, c'est-à-dire le dernier chemin de l'arbre qui est constitué de n branches qui ont toutes la même probabilité égale à $q=1-p$. D'où le résultat : $\boxed{p(X=0)=q^n}$.

- L'événement $\{X=n\}$ est réalisé sur l'unique chemin de l'arbre qui ne comporte que des succès, c'est-à-dire le premier chemin de l'arbre qui est constitué de n branches qui ont toutes la même probabilité égale p. D'où le résultat : $\boxed{p(X=0)=p^n}$.

Calcul de $p(X=1)$ et de $p(X=n-1)$:

- L'événement $\{X=1\}$ est réalisé sur les chemins de l'arbre qui comportent un unique succès et $n-1$ échecs. La probabilité de chacun de ces chemins est $p\times q^{n-1}$. Il reste à déterminer combien de chemins de ce type figurent dans l'arbre pondéré. Cette question est assez simple dans la mesure où il suffit de repérer à quel niveau de l'arbre figure l'unique succès. Il y a n possibilités et ainsi n chemins réalisent l'événement $\{X=1\}$. D'où le résultat $\boxed{p(X=1)=n\times p\times q^{n-1}}$.

- L'événement $\{X=n-1\}$ est réalisé sur les chemins de l'arbre qui comportent $n-1$ succès et un unique échec. La probabilité de chacun de ces chemins est $p^{n-1}\times q$. Il reste à déterminer combien de chemins de ce type figurent dans l'arbre pondéré. Cette question est assez simple dans la mesure où il suffit de repérer à quel niveau de l'arbre figure l'unique échec. Il y a n possibilités et ainsi n chemins réalisent l'événement $\{X=n-1\}$. D'où le résultat $\boxed{p(X=n-1)=n\times p^{n-1}\times q}$.

Les coefficients binomiaux

Pour déterminer $p(X=k)$, où k est un entier naturel tel que $0\le k\le n$, on procèderait de la même façon : la probabilité de chaque chemin qui réalise exactement k succès (et par conséquent réalise $n-k$ échecs est : $p(X=k)=p^k\times q^{n-k}$. Il faut ensuite multiplier cette probabilité par le nombre de chemins qui présentent exactement k succès et $n-k$ échecs dans l'arbre pondéré.

Soit n un entier naturel et k un entier tel que $0\le k\le n$.

On note $\binom{n}{k}$, et on lit « k parmi n » le nombre de chemins qui réalisent exactement k succès (et par conséquent $n-k$ échecs) dans l'arbre à n générations associé à un schéma de Bernoulli.

Ces nombres sont appelés coefficients binomiaux et correspondent au nombre de combinaisons possibles de k éléments pris dans un ensemble à n éléments (cf chapitre sur le dénombrement).

Cas particuliers

- $\boxed{\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1}$
- $\boxed{\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n}$

Symétrie

- $\boxed{\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}}$

Formule de Pascal

Si n est un entier naturel et si k est un entier tel que $0\le k\le n-1$ alors $\boxed{\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}}$

Cette relation (dite de « récurrence » permet de déterminer « pas à pas » la valeur des coefficients binomiaux. Pour cela on peut s'organiser dans un tableau triangulaire appelé « triangle de Pascal ».

Comprendre la formule de Pascal

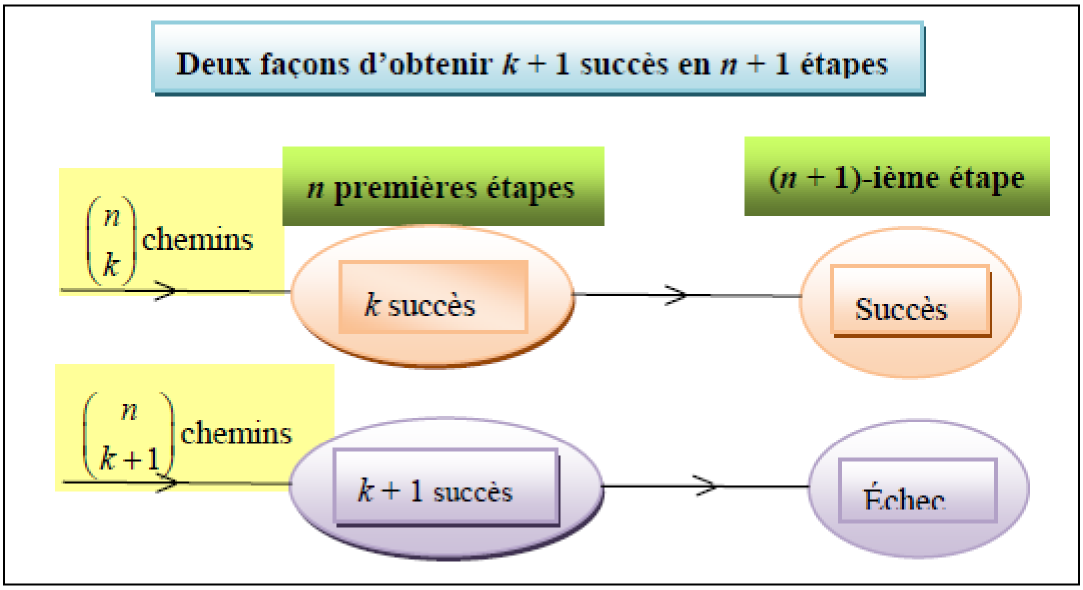
Par définition, le coefficient binomial $\binom{n+1}{k+1}$ donne le nombre de chemins qui réalisent exactement $k+1$ succès dans un arbre à $n+1$ générations associé à un schéma de Bernouilli.

Il y a deux façons d'obtenir $k+1$ succès suivant qu'à la dernière étape on obtient un succès ou bien un échec. Etudions ces deux cas de figure :

- Si la dernière étape donne un échec, il faut compter les chemins qui à la génération précédente conduisaient déjà à $k+1$ succès : $\binom{n}{k+1}$ chemins sont dans ce cas.
- Si la dernière étape donne un succès, il faut compter les chemins qui à la génération précédente conduisaient à exactement à k succès : $\binom{n}{k}$ chemins sont dans ce cas.

De cette façon on obtient l'égalité suivante : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. C'est la formule de Pascal.

Un schéma pour mieux comprendre



Somme des coefficients binomiaux

En ajoutant tous les coefficients binomiaux obtenus sur un arbre de n générations, on obtient le nombre total de chemins de l'arbre. Or cet arbre comporte n générations et à chaque génération on multiplie le nombre de chemins déjà existants par 2. Le nombre total de chemins est donc 2^n.

D'où la relation suivante : $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n}$

Retour sur la loi binomiale

On répète n fois de manière **indépendante** une **même** expérience aléatoire présentant **deux issues** S et $\overline{S}$ de probabilités respectives p et $q = 1 - p$. On considère la variable aléatoire X égale au **nombre de succès** S obtenus au cours de ces n expériences. La loi de probabilité de la variable aléatoire X s'appelle alors **loi binomiale** de paramètres n et p, notée $\mathrm{B}(n, p)$.

k	0	1	2	$\ldots$	$n-1$	n
$p(X=k)$	$\binom{n}{0}q^n$	$\binom{n}{1}pq^{n-1}$	$\binom{n}{2}p^2q^{n-2}$	$\ldots$	$\binom{n}{n-1}p^{n-1}q$	$\binom{n}{n}p^n$

On retrouve dans la loi binomiale **les coefficients binomiaux** qui correspondent au nombre de chemins de l'arbre pondéré permettant d'obtenir k « succès » au cours des n générations.

Une formule à retenir

Pour tout entier k tel que $0 \le k \le n$ on a : $\boxed{p(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$

Propriétés

Pour une loi binomiale, l'**espérance**, la **variance** et l'**écart type** sont donnés par les formules :

$$\boxed{E(X) = n \times p} \qquad \boxed{V(X) = n \times p \times q} \qquad \boxed{\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times q}}$$

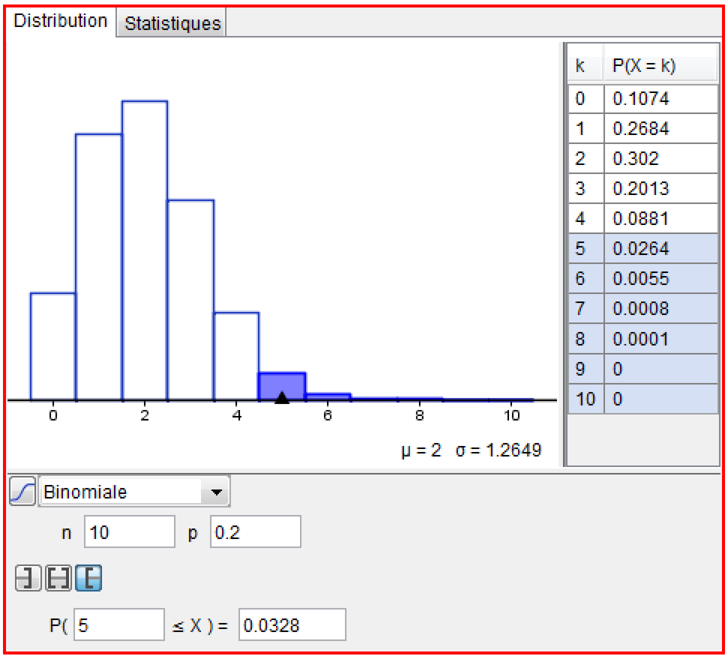
Le QCM

Un élève répond au hasard aux 10 questions d'un QCM. Pour chaque question, cinq réponses sont proposées dont une seule est exacte. X est la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ne rapporte aucun point.

Quelle est la probabilité pour cet élève d'obtenir la moyenne, c'est-à-dire d'avoir au moins 5 bonnes réponses ?

Calculer l'espérance mathématique du nombre de bonnes réponses.



Reprendre l'exercice avec un QCM comportant 10 questions et 3 réponses dont une seule exacte.
Reprendre l'exercice avec un QCM comportant 10 questions et 2 réponses dont une seule exacte.

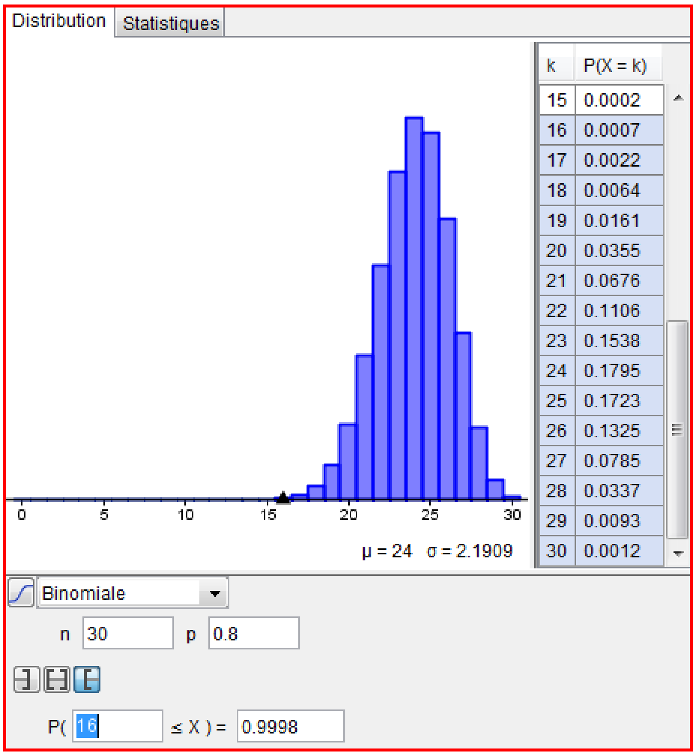
Le quorum

Une association comprenant 30 adhérents organise chaque année une assemblée générale. Les statistiques montrent que chaque adhérent assiste à l'assemblée avec la probabilité 80 %. Les décisions prises par l'assemblée n'ont de valeur légale que lorsque plus de la moitié des adhérents assiste à l'assemblée.

Quelle est la probabilité que, lors de la prochaine assemblée, le quorum soit atteint ?

Calculer l'espérance mathématique du nombre d'adhérents présents lors de la prochaine assemblée.

Reprendre le problème avec une probabilité de présence de chaque adhérent égale à 50%.

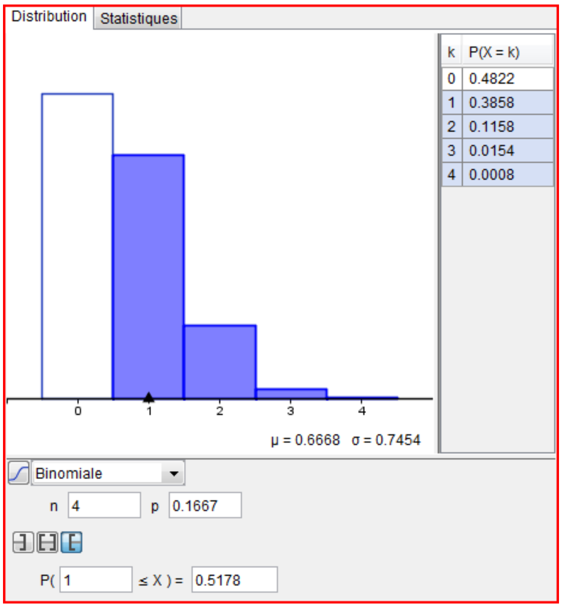


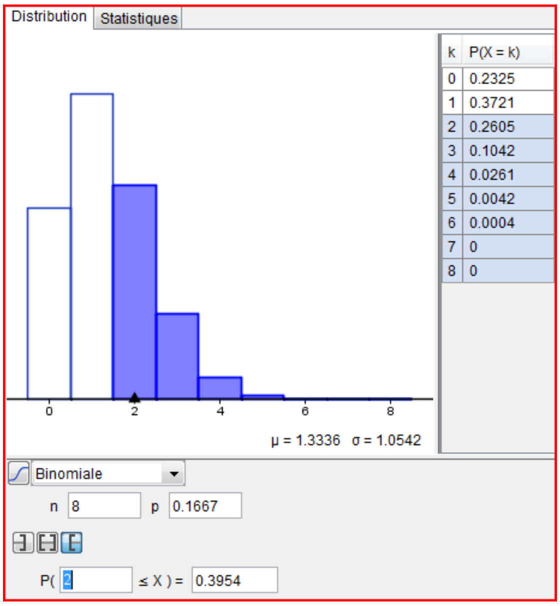
Un paradoxe

Paul affirme : « Avec un dé régulier, on a autant de chance d'obtenir au moins un six en 4 lancers que d'obtenir au moins deux six avec 8 lancers ».

Sara objecte : « Pas du tout. Dans le premier cas, la probabilité est supérieure à 0,5, dans le deuxième cas, elle est inférieure à 0,5 ».

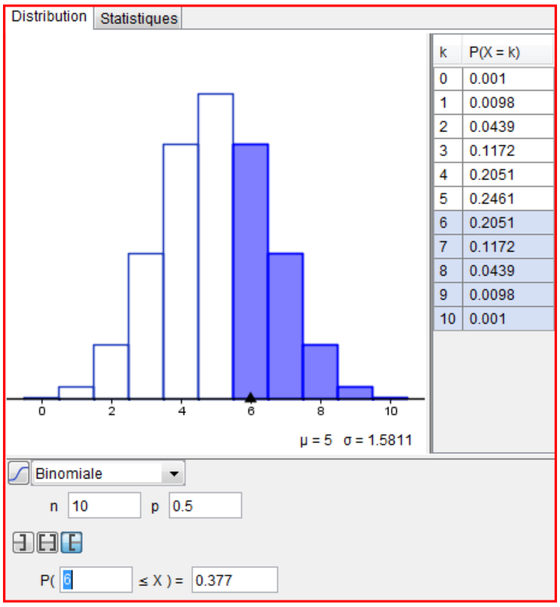
Qui a raison ?

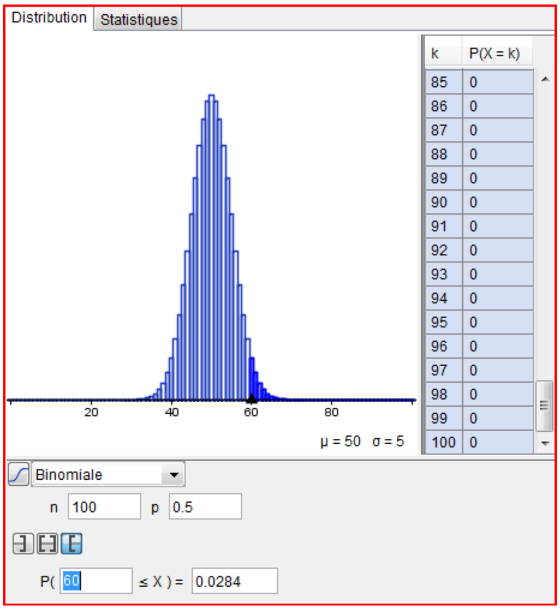




Lancers de pièce

On lance une pièce équilibrée n fois. On s'intéresse à la probabilité d'obtenir « face » dans 60 % des cas ou plus. Envisager les cas $n=10$, puis le cas $n=100$.

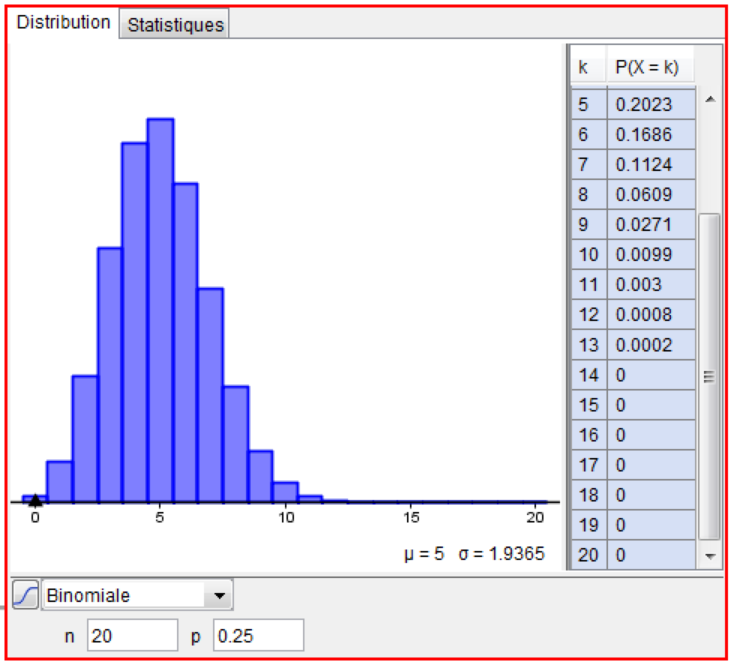




Un autre QCM

Un QCM comporte 20 questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est juste. Chaque réponse juste rapporte un point et il n'y a pas de pénalité pour une réponse fausse. Un candidat répond au hasard à chaque question. Quel nombre total de points peut-il espérer ?

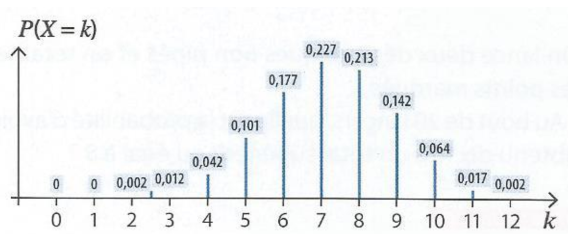
Quelle pénalité doit-on attribuer à une réponse fausse pour que le total espéré, en répondant entièrement au hasard, soit égal à 2 sur 20 ?



Recherche de seuil

On donne ci-contre la représentation graphique de la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n=12$ et $p=0,6$

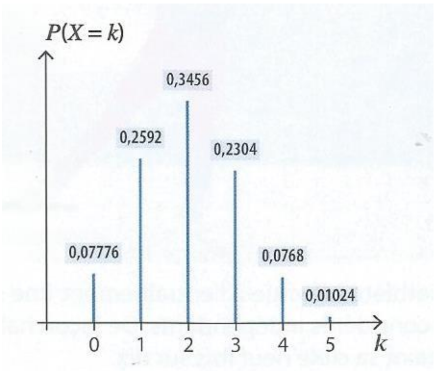
Déterminer la valeur minimale qu'il faut donner à N pour que $p(X \le N) > 0,60$.



Recherche des paramètres

On a représenté ci-contre la loi de probabilité d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

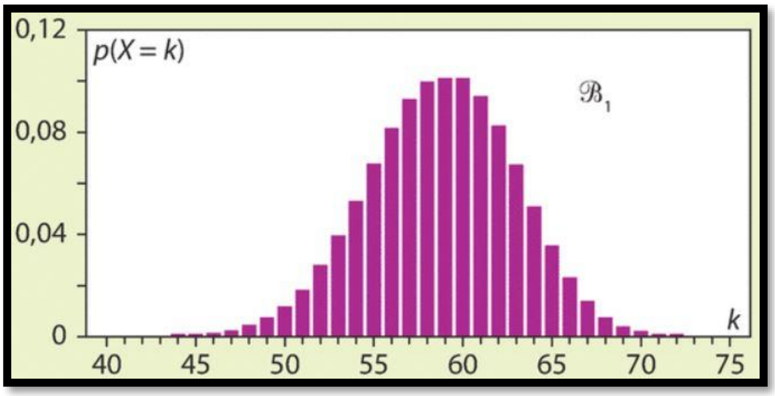
Sauriez-nous déterminer à l'aide des données lues sur le graphique la valeur de n, puis la valeur de l'espérance et enfin la valeur de p ?



Une loi binomiale

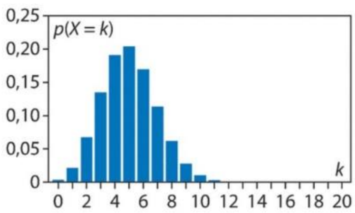
On donne ci-contre la loi de probabilité d'une loi binomiale de paramètres n à déterminer et $p = 0,74$.

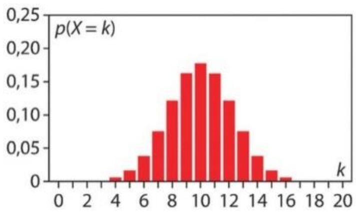
Estimer graphiquement l'espérance de cette loi binomiale et en déduire une valeur possible pour n.

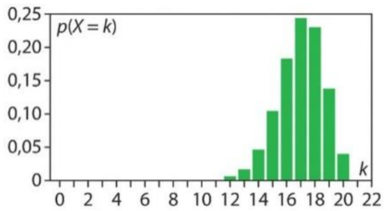


Trois lois binomiales

On propose 3 lois binomiales de paramètres $n = 20$ et p à déterminer sachant que l'espérance de la première est 5, l'espérance de la seconde est 10 et l'espérance de la troisième est 17.







Probabilités cumulées

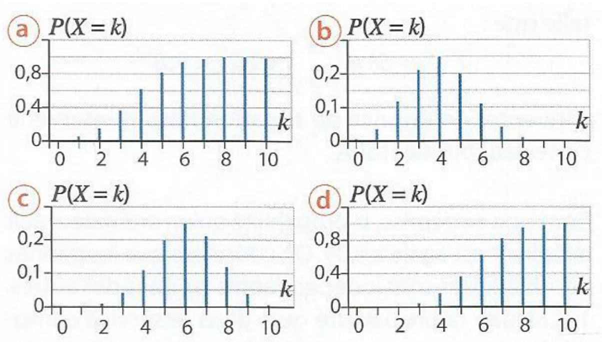
On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et p pouvant valoir $p = 0,4$ ou $p = 0,6$. Parmi les graphiques proposés ci-contre, lequel représente :

Les valeurs de $p(X = k)$ pour $p = 0,4$,

Les valeurs de $p(X \leq k)$ pour $p = 0,4$,

Les valeurs de $p(X = k)$ pour $p = 0,6$,

Les valeurs de $p(X \leq k)$ pour $p = 0,6$.



Extrait d'un sujet de bac

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années.
L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires.
Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de garantie** montrent que 11,5% d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

1. On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).

a. Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à 10^{-3}.

b. Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à 10^{-3}.

2. L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, El'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, **si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année.** Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.
On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Y la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise El'Ectro, grâce à l'extension de garantie.

a. Justifier que Y prend les valeurs 65 et -334 puis donner la loi de probabilité de Y.

b. Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ? Justifier.

Parier avec avantage

Partie A – Avec un seul dé

On joue dans un premier temps avec un dé à six faces bien équilibré. On note X le nombre de six obtenus au cours des n lancers. Quel type de loi suit la variable aléatoire X ? Déterminer, en fonction de n, la probabilité d'obtenir au moins un six au cours des n lancers. Déterminer la valeur de n à partir de laquelle on pourra « parier avec avantage » sur l'obtention d'un six.

Partie B – Avec deux dés

On joue maintenant avec deux dés à six faces bien équilibrés. On note X le nombre de double six obtenus au cours des n lancers. Quel type de loi suit la variable aléatoire X ? Déterminer, en fonction de n, la probabilité d'obtenir au moins un double six au cours des n lancers. Déterminer la valeur n à partir de laquelle on pourra « parier avec avantage » sur l'obtention d'un double six.

Note historique

En 1654, le Chevalier de Méré a posé à Pascal le problème suivant :

Supposons qu'on joue plusieurs fois de suite avec deux dés, combien faut-il de coups pour qu'on puisse parier avec avantage que, après avoir joué ces coups on aura amené **« sonnez ! »** ?

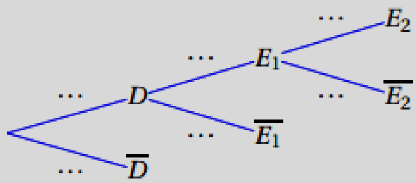
On précise que **« sonnez ! »** correspond à l'obtention d'un double six et que **« parier avec avantage »** correspond à une probabilité supérieure à une chance sur deux, plus grande que 0,5.

Autre extrait de sujet

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. **On choisit au hasard le dossier d'un candidat.**
On considère les évènements suivants :
- D **: « Le candidat est retenu sur dossier »,**
- E_1 **: « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,**
- E_2 **: « Le candidat est recruté ».**

a. **Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.**



b. **Calculer la probabilité de l'évènement** E_1**.**

c. **On note** F **l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».**
Démontrer que la probabilité de l'évènement F **est égale à** $0,93$**.**

2. **Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à** $0,07$**.**
On désigne par X **la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.**

a. **Justifier que** X **suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.**

b. **Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à** 10^{-3}**.**

3. **Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à** $0,999$ **?**

Le tir à l'arc

Un archer atteint sa cible dans 70% des cas. Combien de tirs doit-il effectuer pour qu'il soit sûr, avec une probabilité supérieure ou égale à 99,99% d'atteindre la cible au moins une fois ?

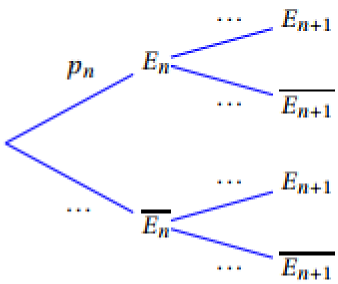
Probabilités totales, suites numériques et algorithmes

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. **a.** Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
   b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
2. **a.** Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



   b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
   c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.
   En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.
   d. En déduire la limite de la suite (p_n).
   e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0
	J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $P < 0,05 - 10^{-K}$
	P prend la valeur $0,2 \times P + 0,04$
	J prend la valeur J +1
	Fin tant que
Sortie	Afficher J

   À quoi correspond l'affichage final J ?
   Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

Probabilités totales, suites numériques et feuilles de calcul

Voir au verso…

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

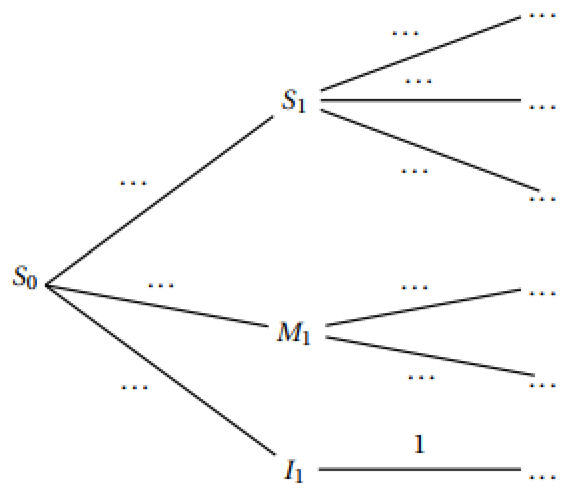
On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :
S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;
M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;
I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1\ ;\ P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. Montrer que $P(I_2) = 0{,}2025$.
3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.
Pour tout entier naturel n, on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.
   On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$.
2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,8500	0,0500	0,1000
4	2	0,7225	0,0750	0,2025
5	3	0,6141	0,0849	0,3010
6	4	0,5220	0,0859	0,3921
7	5	0,4437	0,0819	0,4744
8	6	0,3771	0,0754	0,5474
...	...	...	...	...
20	18	0,0536	0,0133	0,9330
21	19	0,0456	0,0113	0,9431
22	20	0,0388	0,0096	0,9516

*Pour répondre aux questions **a.** et **b.** suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.*

   a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n)?
   b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
      Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

3. a. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,85u_n$.
      En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right).$$

4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n).
   Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle?*

Probabilités totales, fonctions numériques et résolution d'inéquation

Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.
Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :
— la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98;
— la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.

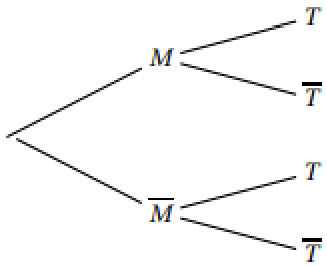
On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

— M l'évènement : « L'individu choisi est atteint du chikungunya »

— T l'évènement : « Le test de l'individu choisi est positif »

On notera $\overline{M}$ (respectivement $\overline{T}$) l'évènement contraire de l'évènement M (respectivement T).
On note p ($0 \leqslant p \leqslant 1$) la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1. **a.** Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



   b. Exprimer $P(M \cap T)$, $P\left(\overline{M} \cap T\right)$ puis $P(T)$ en fonction de p.

2. **a.** Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(p) = \frac{98p}{97p+1}.$$

   b. Étudier les variations de la fonction f.

3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95.
En utilisant les résultats de la question **2.**, à partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ?

Probabilités totales, présence d'un paramètre

Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.

Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.
Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.
La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée p.
Pour une journée donnée, on note :

- E l'évènement « La journée est ensoleillée » ;
- V l'évènement« Romane se déplace en vélo ».

1. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.
2. Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est

$$P(V) = 0{,}3p + 0{,}6.$$

3. On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.
   a. Calculer la valeur de p.
   b. Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\frac{1}{3}$.

Contrôle de production

Une entreprise fabrique chaque jour 10 000 composants électroniques. Chaque composant présente un défaut avec la probabilité 0,002. Si le composant est repéré comme étant défectueux, il est détruit par l'entreprise, et chaque composant détruit fait perdre 1 € à l'entreprise. Les composants sont contrôlés un à un, et chaque contrôle coûte 0,1 €. Quel est le coût moyen journalier pour l'entreprise (contrôles et destruction des composants défectueux) ?

Pile ou face

On joue à pile ou face cinq fois de suite. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de fois où on a obtenu face. Quelle loi suit la variable aléatoire X ? Donner ses paramètres. Pour jouer à ce jeu, il faut payer 3€. On gagne 1€ à chaque fois qu'on obtient face lors des cinq lancers. On note Y la variable aléatoire représentant le gain algébrique. Exprimer Y en fonction de X. En déduire E(Y). Ce jeu est-il financièrement intéressant ? Quelle somme aurait-il fallu payer au départ pour que le jeu soit équitable ?

Le tireur à l'arc

Un tireur à l'arc atteint sa cible neuf fois sur dix. Ce tireur participe à un concours primé. Il tire cinq flèches sur la cible. Pour chaque flèche, s'il atteint la cible, il gagne10€, sinon il perd 20€. On suppose que les tirs sont indépendants. On appelle X le nombre de flèches ayant atteint la cible à l'issue des cinq tirs. Quelle loi suit la variable aléatoire X ? Donner ses paramètres. Déterminer la probabilité d'atteindre au moins deux fois la cible. On appelle Y la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue des cinq tirs. Quelles sont les valeurs prises par Y ? Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y. Quel est le gain moyen du tireur s'il participe un grand nombre de fois à ce concours ? Est-ce intéressant ?

Roulette

Lorsqu'on joue à la roulette d'un casino, on peut miser sur un des 37 numéros. Si la bille s'arrete sur le numéro choisi, on gagne 35 fois sa mise. Thomas se dit qu'en misant 2 euros sur 30 numéros il a une probabilité de 30/37 de gagner 10 euros. La prévision de Thomas est-elle juste ?

Thomas joue 10 fois de suite en respectant cette même stratégie. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de fois où il gagne et G la variable aléatoire qui modélise son gain algébrique. Quelle loi suit la variable aléatoire X ? En déduire l'espérance de X. Exprimer G en fonction de X. En déduire quel gain moyen peut espérer obtenir Thomas.

Thomas joue désormais n fois de suite, toujours avec la même stratégie. Existe-t-il une valeur de n qui lui soit favorable ?

Equitation

Lors d'un parcours d'équitation, un cavalier effectue un parcours de 1500 m à la vitesse de 10km/h et franchit sur ce parcours six obstacles indépendamment. Pour ce cavalier, la probabilité de franchir un obstacle sans faute est 2/3. Le passage d'un obstacle ne ralentit pas le cavalier, tandis qu'un passage avec faute lui fait perdre une minute. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'obstacles franchis sans fautes. Quelle est la loi de probabilité de X ? Calculer l'espérance de X. On appelle Y la variable aléatoire égale à la durée du parcours. Exprimer Y en fonction de X et donner son espérance. Interpréter ce résultat.

Transformation affine d'une variable aléatoire

On appelle transformation affine d'une variable aléatoire X la variable aléatoire Y définie par la relation $Y = aX + b$ où a et b sont deux nombres réels.

Si $\{x_1; x_2; ...; x_n\}$ sont les valeurs prises par la variable aléatoire X alors les valeurs prises par la variable aléatoire Y seront $\{ax_1 + b; ax_2 + b; ...; ax_n + b\}$.

L'espérance de la variable Y et celle de la variable X vérifient la relation $E(Y) = a \times E(X) + b$.
La variance de la variable Y et celle de la variable X vérifient la relation $V(Y) = a^2 \times V(Y)$.

Application directe

On choisit de manière équiprobable un mois dans une année non bissextile (c'est-à-dire avec un mois de février de 28 jours). On note J la variable aléatoire égale au nombre de jours du mois choisi auquel on soustrait 30. On appelle H la variable aléatoire égale au nombre d'heures du mois choisi. Déterminer la loi de probabilité de J, son espérance et sa variance. Exprimer H en fonction de J. Quelle est l'espérance et la variance de la variable aléatoire H ?

On choisit de façon équiprobable une personne dans une assemblée. La variable aléatoire A donnant son année de naissance a pour espérance 2001 et pour variance 81. On note X la variable aléatoire égale à l'âge de la personne. Exprimer X en fonction A. Quelle est l'espérance et la variance de la variable aléatoire X ?

Somme de deux variables aléatoires

Lorsque X et Y sont deux variables aléatoires, $X + Y$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs les sommes des valeurs possibles de X et de Y. On a alors $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ qui est appelée la propriété de linéarité de l'espérance.

Si on suppose en plus que X et Y sont associées à des expériences aléatoires dont les conditions de réalisation sont indépendantes, alors on a aussi $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. On dit alors que les variables aléatoires sont indépendantes.

Application directe

On lance deux fois un dé équilibré. On note X la valeur de la face supérieure du premier dé et Y la valeur de la face supérieure du deuxième dé. On appelle S la somme des valeurs obtenues à l'issue des deux tirages. Quelles sont les valeurs possibles prises par la variable aléatoire S ? Calculer l'espérance et la variance cette variable aléatoire.

Le trajet de Myriam en b us pour aller au Lycée lui impose un changement dans le centre-ville. Le temps de ces trajets peut varier suivant les heures de transport et les embouteillages. Le temps de trajet entre sa maison et le centre-ville peut être de 5, 8 ou 10 minutes avec des probabilités respectives de 1/3, 5/12 et 1/4. Indépendamment, le temps de trajet entre le centre-ville et son Lycée peut être de 3, 6 ou 9 minutes avec des probabilités respectives de 1/3, 1/3, 1/3. On note X la variable aléatoire donnant le temps de la première partie du trajet et Y la variable aléatoire donnant le temps de la deuxième partie du trajet. Déterminer $E(X + Y)$. Interpréter…